7 Aufgaben zur Stochastik

Aufgaben zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsbäumen und Erwartungswert

1) In einem Behälter befinden sich 100 Lose. Davon sind 80 Nieten, auf 15 Losen steht eine Gewinn von 5€ und auf 5 ein Gewinn von 10€.

Es werden 2 Lose gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man
a) zwei Nieten erhält?
b) 10€ gewinnt?
c) 20€ gewinnt?

2) Ein Spielautomat hat 3 Felder, wobei auf jedem die Ziffern von 1 bis 5 erscheinen können. Erscheinen drei gleiche Ziffern, gewinnt man 10€. Wenn genau zwei gleiche Ziffern erscheinen, gewinnt man 5€. Sind alle Ziffern verschieden, so gewinnt man 0€.
Wie große ist der **Erwartungswert** für den Gewinn (d.h. des Bruttogewinns ohne Berücksichtigung eines Einsatzes)?

3) Zwei Torschützen schießen jeweils einmal auf ein Tor. Der Eine trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% und der Andere mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) beide treffen?
b) nur genau einer der beiden Trifft?
c) beide nicht treffen?

4) Der Autohersteller X hat folgende Zahlen veröffentlicht: 20% aller produzierten PKW sind rot, und 40% sind blau.

Jemand hat 3 PKW dieses Herstellers gesehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) alle gesehenen PKW blau waren?
b) der erste gesehene PKW rot und die anderen beiden blau waren?
c) einer blau, einer rot und einer eine andere Farbe hatte?

5) In einem Verein sind 30 Mädchen und 28 Jungs. 3 Mädchen und 3 Jungs sollen einen Ausflug organisieren. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl der 3 Mädchen und 3 Jungs?

6) In einer Urne sind 4 Kugeln auf denen die Buchstaben A, B, M und U stehen. Es werden alle 4 Kugeln hintereinander gezogen und in der Reihenfolge der Ziehung auf den Tisch gelegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Wort BAUM zustande kommt?

7) Es stehen zwei Urnen auf einem Tisch. In der ersten Urne sind 8 rote und 12 schwarze Kugeln. In der zweiten Urne sind 15 rote und 5 schwarze Kugeln. Es wird zuerst eine Urne ausgewählt und dann eine Kugel aus dieser gezogen.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel rot ist?
b) Es wurde eine rote Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese aus Urne 1 stammt? (**Bedingte Wahrscheinlichkeiten.**)

8) Es werden 2 faire Würfel gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
(a) das Produkt der Augenzahlen gleich 6 ist?
(b) das Produkt der Augenzahlen höchstens gleich 4 ist?
(c) das Produkt der Augenzahlen größer als 2 ist?
(d) Wie groß ist der **Erwartungswert** der Zufallsvariable X, wenn X das Produkt der Augenzahlen ist?

9) In einer Urne sind 10 Kugeln, wobei einige rot und einige blau sind. Wie viele rote Kugeln sind in der Urne, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen zweier roter Kugeln (ohne Zurücklegen) 1/3 beträgt?

10) Bei einer Fahrkatenkontrolle befinden sich 100 Personen in einem Zug, wobei 5 keine Fahrkarte haben. Es werden 3 Personen kontrolliert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei dieser Kontrolle
a) keine Person ohne Fahrkarte dabei ist?
b) mindestens eine Person keine Fahrkarte hat?
c) genau drei Personen ohne Fahrkarte dabei sind?

Aufgaben zur Binomialverteilung

11) Es werden 100 Blumensamen gesät. Der Käuferin der 100 Samenkörner wurde mitgeteilt, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Samenkorn nicht auf geht, 10% beträgt.
I) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) genau 8 Körner nicht aufgehen?
b) höchsten 8 nicht aufgehen?
c) mindestens 12 nicht aufgehen?
d) von 8 bis 12 nicht aufgehen?

II) Wie viele Körner muss man mindestens pflanzen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. 95% mindestens ein Korn nicht aufgeht.

III) Wenn mehr als 14 Körner nicht aufgehen, möchte sich die Käuferin der Samenkörner beschweren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich zu Unrecht beschwert (d.h. dass die Wahrscheinlichkeit für das Nichtaufgehen eines Korns doch 10% beträgt)?

12) Es wird ein „unfairer“ Würfel geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer 6 bei einem Wurf höchstens, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine 6 bei fünfmaligen Würfeln geworfen wird, unter 10% liegt?

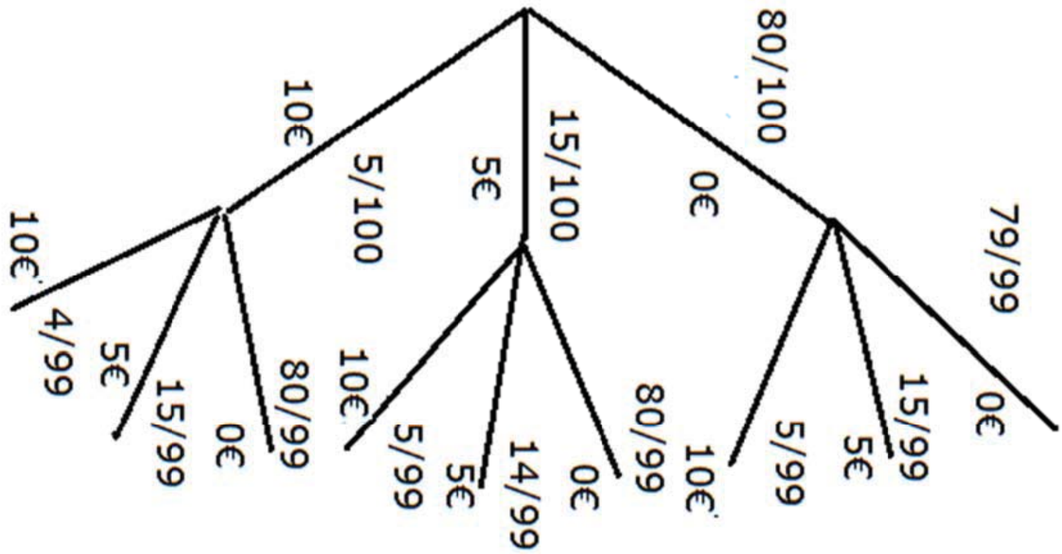
13) Eine Kiste enthält 10 Lampen. Eine Lampe ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% defekt. Wir gehen von einer Binomialverteilung der Anzahl der defekten Lampen aus (d.h. wir wissen nicht, dass unter den 10 genau eine defekte Lampe ist, sondern wir kennen nur die Wahrscheinlichkeit für eine defekte Lampe).
a) Es werden aus einer Kiste 10 Lampen entnommen. (I) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 defekt sind? (II) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Entnehmen (nacheinander) der Lampen aus der Kiste genau die ersten beiden Lampen defekt sind?
b) Ein Käufer hat beschlossen, eine gelieferte Kiste dann zurückzuschicken, wenn mehr als 2 Lampen defekt sind. (I) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er eine Kiste nicht zurückschickt? (II) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er von 100 Kisten mindestens eine zurückschickt?

Aufgabe zu Hypothesentests

14) Bei einem Würfelspiel hat sich Jenny notiert, wie oft sie bei den letzten 100 Würfen eine 6 geworfen hat. Sie hat nur 8-mal eine 6 geworfen.
a) Wie viele Sechsen waren zu erwarten?
b) Da sie vermutet, dass ihr Würfel zu wenig Sechsen „erzeugt“, möchte sie einen Test durchführen mit den Hypothesen H_0: $p \geq 1/6$ und H_1: $p < 1/6$. Die Irrtumswahrscheinlichkeit soll 5% betragen. Kann sie die Nullhypothese verwerfen?

Lösungen:
Bei den Lösungen wird die Berechnung beschrieben aber nicht immer das Endergebnis angegeben, da hier Primär die Art der Berechnung gezeigt werden soll.

1) Für dieses Problem könnte man einen Baum zeichnen:



a) P(„zwei Nieten“) = $\frac{80}{100} \cdot \frac{79}{99}$

b) P(„10€ Gewinn“) = $\frac{80}{100} \cdot \frac{5}{99} + \frac{5}{100} \cdot \frac{80}{99} + \frac{15}{100} \cdot \frac{14}{99}$

c) P(„20€ Gewinn“) = $\frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99}$

2) Es gibt 5^3 mögliche Ziffernkombinationen. Davon wären 111, 222, …, 555 die 5 Möglichkeiten für 3 gleiche Ziffern. Es sei X die Zufallsvariable Gewinn in Euro.

Dann gilt:

$P(X = 10€) = 5/5^3 = 1/25$

Wenn die ersten beiden Ziffern gleich wären, dann gäbe es für die erste Position 5 Möglichkeiten, die zweite Position muss dann gleich sein und bei der dritten Position gäbe es noch 4 Möglichkeiten, also insgesamt 5·4 Möglichkeiten. Nun können aber die ersten beiden Positionen gleich sein, die erste und die dritte Position oder die hinteren beiden Positionen. Es gibt als 3 mal 5·4 Möglichkeiten.

Die Drei ergibt sich auch, wenn man zwei von drei Feldern auswählen muss, die gleich sind:

$$\binom{3}{2} = 3$$

Damit gilt:

$P(X = 5€) = 3 \cdot 5 \cdot 4/5^3 = 12/25$

Da, falls alle Ziffern verschieden sind, 0€ ausgezahlt werden, benötigen wir diese Wahrscheinlichkeit nicht für den Bruttogewinn. Die Wahrscheinlichkeit dafür würde sich aber so ergeben:

Es gibt $\binom{5}{3} \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3$ Möglichkeiten, von 5 Ziffern 3 verschiedene auszuwählen, wenn die Reihenfolge relevant ist.

Also gilt:

$P(X = 0€) = 5 \cdot 4 \cdot 3/5^3 = 12/25$

Dieser Wert würde sich auch über 1 – 1/25 – 12/25 ergeben, da es nur 3 Möglichkeiten gibt (genau drei Ziffern sind gleich, genau zwei Ziffern sind gleich oder alle sind verschieden) und die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 ergibt.

Wir stellen die Wahrscheinlichkeiten zur Berechnung des Erwartungswertes in einer Tabelle dar:

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
10€	1/25	2/5€
5€	12/25	12/5€
0€	12/25	0€
	Summe bzw. E(X)	14/5€

Somit wäre der Erwartungswert des Gewinns gleich 2,80€, was auch der Einsatz bei einem „fairen Spiel“ wäre, wenn man keine sonstigen Kosten (z.B. Stromkosten oder Anschaffungskosten) berücksichtigt.

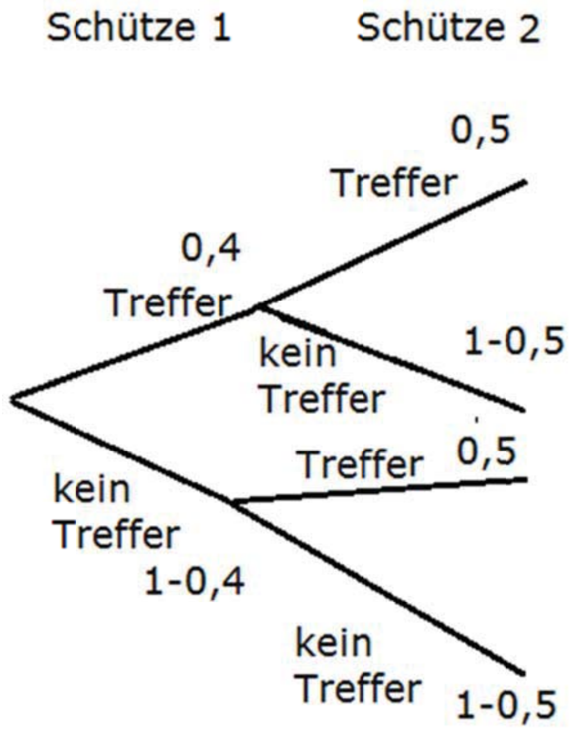
Bei einem Einsatz von 2,80€ wäre der Erwartungswert des Nettogewinns gleich 0€.

3) Die Wahrscheinlichkeiten könnte man in einem Baumdiagramm eintragen. Dabei ist es egal, wer zuerst schießt (da wir davon ausgehen, dass die beiden Ereignisse unabhängig sind). Wir nennen den Schützen, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% trifft, einfach mal Schütze 1. Wir legen folgende Ereignisse fest: Es sei A = „Schütze 1 trifft“ und B = „Schütze 2 trifft“.

Nun gilt:

$P(A) = 0{,}4$ und $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P(B) = 0{,}5$ und $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

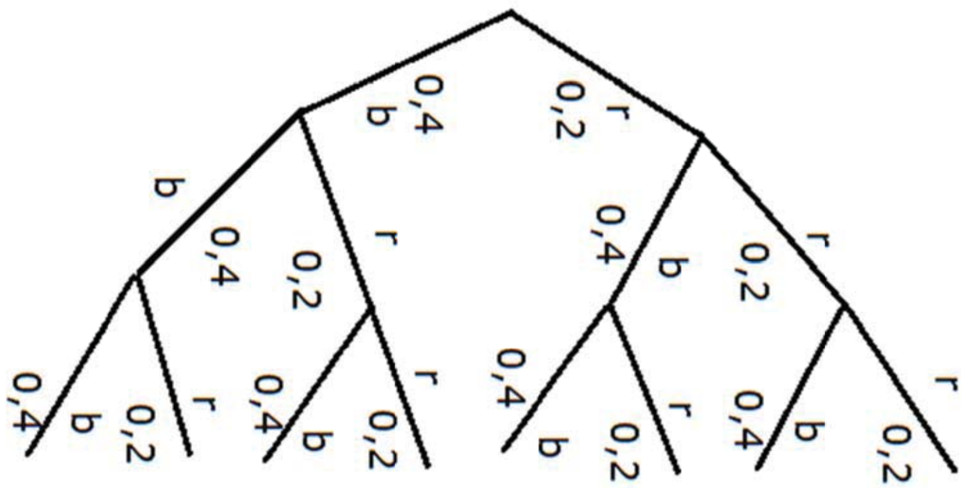


a) P(„beide treffen“) = $P(A)\cdot P(B) = 0{,}4\cdot 0{,}5 = 0{,}20$

b) P(„genau einer der beiden trifft“) = $P(A)\cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A})\cdot P(B) = 0{,}4\cdot 0{,}5 + 0{,}6\cdot 0{,}5 = 0{,}50$

c) P(„beide treffen nicht“) = $P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}) = 0{,}6\cdot 0{,}5 = 0{,}30$

4) Die Wahrscheinlichkeiten könnte man wieder in ein Baumdiagramm eintragen. Für die Aufgabenteile a) und b) würde ein Baumdiagramm genügen, welches nur die Farben rot (r) und blau (b) berücksichtigt, wobei man auch ohne Baumdiagramm auskommen könnte.



a) P({(b, b, b)}) = $0{,}4^3 = 0{,}064$

b) P({(r, b, b)}) = $0{,}2 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}032$

c) Den Baum für diesen Aufgabenteil zeichnen wir nicht. Da hier keine Reihenfolge vorgegeben ist, müssen alle Reihenfolgen bzw. Permutationen berücksichtigt werden. Wir kürzen die anderen Farben mit a ab. Die Wahrscheinlichkeit für eine andere Farbe beträgt $1 - 0{,}2 - 0{,}4 = 0{,}4$.

Es gilt P({(a, r, b)}) = $0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}032$, aber auch P({(r, a, b)}) = $0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}032$. Nun gibt es 3! = 6 mögliche Permutationen (oder 6 Äste im Baumdiagramm, die berücksichtigt werden müssten):

P(„ein PKW ist rot, einer ist blau und einer hat eine andere Farbe“) = $6 \cdot 0{,}032 = 0{,}192$

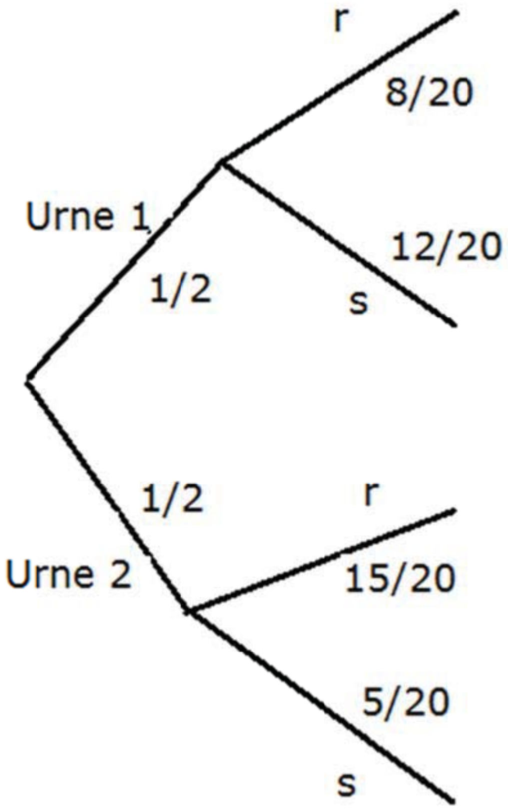
5) Es gibt $\binom{30}{3}$ Möglichkeiten aus 30 Mädchen 3 auszuwählen und $\binom{28}{3}$ aus 28 Jungs 3 auszuwählen. Da man beides kombinieren kann, gibt es

$$\binom{30}{3} \cdot \binom{28}{3}$$

Möglichkeiten.

6) Es wird ohne Zurücklegen gezogen, wobei die Reihenfolge relevant ist. Wenn alle 4 Kugeln gezogen werden, so gibt es 4! Möglichkeiten. Nun entsteht nur bei einer dieser Möglichkeiten das Wort BAUM, womit die Wahrscheinlichkeit dafür 1/4! beträgt.

7) Wir zeichnen einen Baum.



Wir gehen davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für die Auswahl jeder Urne gleich ist, also 50%.

a)
Auch wenn noch keine bedingte Wahrscheinlichkeiten behandelt worden wären, könnte man nun über den Baum die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen:

P(„es wird eine rote Kugel gezogen“) = $\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{20}+\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{20}=\frac{23}{40}=57{,}5\%$

Für Aufgabenteil b) ist es aber „einfacher“, wenn man die Notation für bedingte Wahrscheinlichkeiten verwendet. Wir lösen diese Aufgabe nun noch mal mit der für bedingte Wahrscheinlichkeiten üblichen Notation in der Schule. Dazu müssen wir zunächst die relevanten Ereignisse bezeichnen.

R sei das Ereignis, dass eine rote Kugel gezogen wird,
U1 das Ereignis, dass die Urne 1 ausgewählt wird und
U2 das Ereignis, dass die Urne 2 ausgewählt wird.

Nun gilt:
$P_{U1}(R) = 8/20$
$P_{U2}(R) = 15/20$
$P(U_1) = 1/2$
$P(U_2) = 1/2$

$P(U1 \cap R) = P(U1) \cdot P_{U1}(R) = 1/2 \cdot 8/20$
$P(U2 \cap R) = P(U2) \cdot P_{U2}(R) = 1/2 \cdot 15/20$

$P(R) = P(U1 \cap R) + P(U2 \cap R) = 23/40$

Nun kann man auch die Wahrscheinlichkeit für den Aufgabenteil b) berechnen:

b) $P_R(U1) = \frac{P(U1 \cap R)}{P(R)} = \frac{1/2 \cdot 8/20}{23/40} = \frac{8}{23} \approx 0{,}3478$

8)

Für diese Aufgabe kann man zunächst mal eine Tabelle mit den Produkten der Augenzahlen erstellen.

		Würfel 1					
		1	2	3	4	5	6
Würfel 2	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	4	6	8	10	12
	3	3	6	9	12	15	18
	4	4	8	12	16	20	24
	5	5	10	15	20	25	30
	6	6	12	18	24	30	36

Für X = Produkt der Augenzahlen.

(a) $P(X = 6) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ $\quad (= P(\{(1;6), (6;1), (2;3), (3;2)\}))$

(b) $P(X \leq 4) = \frac{4+2+1+1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

(c) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{11}{12}$

(d) $E(X) = 1 \cdot P(X = 1) + \cdots + 36 \cdot P(X = 36)$

$= 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{2}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \cdots + 36 \cdot \frac{1}{36}$

$= 49/4$

9) Wenn x rote Kugeln (r) in der Urne sind, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen zweier roter Kugeln ohne Zurücklegen

$$P(\{(r,r)\}) = \frac{x(x-1)}{10 \cdot 9} \quad ,$$

denn nach dem ersten Zug einer roten Kugel sind noch x – 1 rote Kugeln in der Urne. Damit gilt:

$$\frac{x(x-1)}{10\cdot 9} = 1/3 \quad | \cdot 90$$

$$x^2 - x = 30 \ | \ {-30}$$

$$x^2 - x - 30 = 0$$

Mit der p-q-Formel ergibt sich:

$$x_{1/2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 30}$$

Damit ist $x_1 = 6$ und $x_2 = -5$. Damit sind 6 rote Kugeln in der Urne (vor dem Ziehen).

10) Man könnte bei dieser Aufgabe ein Baumdiagramm zeichnen, was aber nicht notwendig ist, denn wir können diese Aufgabe auch ohne Baum lösen. Die Zufallsvariable für die Anzahl der Personen ohne Fahrkarte bezeichnen wir mit X. Aus 100 Personen werden drei ausgewählt (ziehen ohne Zurücklegen und die Reihenfolge ist hier auch irrelevant).

a) Von den 5 Personen ohne Fahrkarte soll keine dabei sein, womit von den 95 Personen mit Fahrkarte 3 kontrolliert werden:

$$P(X=0) = \frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{95}{3}}{\binom{100}{3}}$$

b)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{95}{3}}{\binom{100}{3}}$$

c)

$$P(X=3) = \frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{95}{0}}{\binom{100}{3}}$$

Bemerkung:
$\binom{n}{0} = 1$, womit man Terme dieser Form nicht in den Taschenrechner eingeben muss.

11) Die Zufallsvariable X steht für die Anzahl der Samenkörner, die nicht aufgehen. X ist dann binomialverteilt mit den Parametern n = 100 und p = 0,1.

I)

a) $P(X = 8) = \binom{100}{8} \cdot 0{,}1^8 \cdot (1 - 0{,}1)^{100-8} \approx 0{,}1148$

b) $P(X \leq 8) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 8) \approx 0{,}3209$

Diese Summe muss nicht berechnet werden, denn diesen Wert kann man aus einer (kumulierten) Tabelle für n = 100 und p = 0,1 ablesen. Eine solche Tabelle findet ihr im Anhang.

Man kann die Wahrscheinlichkeit aber auch unter der www-Adresse http://www.online-datenanalyse.de/Verteilungen/Binomialverteilung.html berechnen und unter http://alles-mathe.de/Binomial-Tabelle/Binomialverteilung-Tab.html kann man beliebige Tabellen erstellen (bis n gleich 100).

c) $P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) \approx 1 - 0{,}7030 = 0{,}2970$

d) $P(8 \leq X \leq 12) = P(X \leq 12) - P(X \leq 7) \approx 0{,}8018 - 0{,}2061 = 0{,}5957$

II) Hier ist n gesucht:

$$P(X \geq 1) \geq 0{,}95$$

$$1 - P(X = 0) \geq 0{,}95 \quad | -0{,}95 + P(X = 0)$$

$$0{,}05 \geq P(X = 0)$$

$$0{,}05 \geq \underbrace{\binom{n}{0} \cdot 0{,}1^0}_{=1} \cdot 0{,}9^n$$

$$0{,}05 \geq 0{,}9^n \quad | \lg$$

$$\lg(0{,}05) \geq n \cdot \lg(0{,}9) \quad | :\lg(0{,}9)$$

Da lg(0,9) < 0 ist, „dreht sich das ≥-Zeichen um“:

$$\lg(0{,}05)/\lg(0{,}9) \le n$$

Also muss $n \ge \lg(0{,}05)/\lg(0{,}9) \approx 28{,}43$ sein, womit mindestens 29 Samenkörner gesetzt werden müssen. Man hätte statt lg auch $\log_{0,9}$ anwenden können, wenn man diesen auf dem Taschenrechner zur Verfügung hat, womit sich direkt $\log_{0,9}(0{,}05) \le n$ ergibt.

III) Die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich zu Unrecht beschwert, ist gleich die, dass mehr als 14 Samenkörner nicht aufgehen, obwohl die Wahrscheinlichkeit für das Nichtaufgehen eines Korns tatsächlich 10% beträgt ($p = 0{,}1$).

Also berechnen wir:

$P(X > 14)$ für $p = 0{,}1$ und $n = 100$:

$P(X > 14) = 1 - P(X \le 14) \approx 1 - 0{,}9274 = 0{,}0726$

Somit beträgt diese Wahrscheinlichkeit rund 7,26%.

12) Hier ist $n = 5$ (5 mal würfeln) und $p = ?$. Die Anzahl der Sechsen ist binomialverteilt.

$$P(X > 1\,) < 0{,}10$$

$$1 - P(X = 0) < 0{,}1 \quad | +P(X = 0) - 0{,}1$$

$$0{,}9 < P(X = 0)$$

$$0{,}9 < \underbrace{\binom{5}{0} \cdot p^0}_{=1} \cdot (1-p)^5$$

$$0{,}9 < (1-p)^5 \quad | \sqrt[5]{}$$

$$\sqrt[5]{0{,}9} < 1 - p \quad | +p - \sqrt[5]{0{,}9}$$

$$p < 1 - \sqrt[5]{0{,}9} \approx 0{,}0208516$$

Damit muss die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs unter $\approx 2{,}08516\%$ liegen.

13)
a) Die Anzahl der defekten Lampen ist binomialverteilt. Es gilt: $n = 10$ und $p = 0{,}1$.

(I) $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^8 \approx 0{,}1937$

(II) Der Faktor $\binom{n}{k}$ wird deshalb in der Formel

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

verwendet, da bei der Binomialverteilung die Reihenfolge keine Rolle spielt.

Damit gibt es bei dieser Aufgabe

$$\binom{10}{2}$$

mögliche Positionen für zwei defekte Lampen unter 10 Lampen, wenn man diese beispielsweise nacheinander aus der Kiste nehmen würde. Da bei (II) die Reihenfolge fest ist, muss der Faktor entfallen und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich durch

$$0{,}1^2 \cdot 0{,}9^8 \approx 0{,}0043,$$

womit diese rund 0,43% beträgt.

b)
(I) Der Käufer würde die Kiste nicht zurückschicken, wenn höchstens zwei Lampen defekt sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt:

$P(X \leq 2) \approx 0{,}9298$ (Tabelle der Binomialverteilung mit $n = 10$ und $p = 0{,}1$.)

(II)
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kiste zurückgeschickt wird, beträgt

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0{,}0702,$$

wobei X binomialverteilt ist mit den Parametern $n = 10$ und $p = 0{,}1$.

Die Anzahl der Kisten, die zurückgeschickt werden, ist ebenfalls binomialverteilt. Hier ist nun $n = 100$ und $p \approx 0{,}0702$ (= Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kiste zurückgeschickt wird).

Die Zufallsvariable für die Anzahl der zurückgeschickten Kisten bezeichnen wir mit Y. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt dann

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{100}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{100} \approx 1 - 0{,}00069 = 0{,}99931 .$$

Also ist mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 99,931% mindestens eine Kiste unter 100 Kisten dabei, die zurückgeschickt wird, weil in dieser mehr als 2 Lampen defekt sind.

14)
a) Es sind $E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 1/6 = 50/3$ Sechsen zu erwarten.
b) Mit H_0: $p \geq 1/6$ und H_1: $p < 1/6$ muss H_0 verworfen werden, wenn „zu wenig“ Sechsen gewürfelt werden. Also liegt der kritische Bereich K auf der linken Seite:

$$K = \{0, 1, \ldots, k_u\}$$

Der kritische Bereich K ist der Ablehnungsbereich für H_0.

Also wird das größte k_u gesucht, für das (mit $n = 100$ und $p = 1/6$) folgendes gilt:

$$P(X \leq k_u) \leq \alpha = 0{,}05$$

	n=100	
k	p = 0,1	p = 1/6
0	0,0000	0,0000
1	0,0003	0,0000
2	0,0019	0,0000
3	0,0078	0,0000
4	0,0237	0,0001
5	0,0576	0,0004
6	0,1172	0,0013
7	0,2061	0,0038
8	0,3209	0,0095
9	0,4513	0,0213
10	0,5832	**0,0427**
11	0,7030	0,0777

Wir lesen dieses aus der Tabelle für $n = 100$ und $p = 1/6$ ab (siehe Tabelle oben oder im Anhang):

$$k_u = 10 \text{ und somit } K = \{0, 1, \ldots, 10\}.$$

Da nur 8 Sechsen gewürfelt wurden und 8 im kritischen Bereich liegt, kann H_0 verworfen werden. Die Anzahl der Sechsen ist somit signifikant zu niedrig.

Weitere Aufgaben mit Lösungen zur Stochastik findet ihr unter http://www.mathe-total.de/Aufgabenblaetter/Abi-Stochastik.pdf.