Seite 36

1

Feld Nummer n	Anzahl Reiskörner	2^{n-1}
1	1	2^0
2	2	2^1
3	4	2^2
4	8	2^3
5	16	2^4
6	32	2^5
…	…	…
10	1024	2^{10}
…	…	…
19	524 288	2^{19}
20	1 048 576	2^{20}
…	…	…
30	1 073 741 824	2^{30}
…	…	…
64	$1{,}845 \cdot 10^{19}$	2^{64}

Die Anzahl der Reiskörner auf dem n-ten Feld lässt sich mithilfe der Zweierpotenz 2^{n-1} berechnen, da sich die Anzahl der Reiskörner gegenüber dem vorherigen Feld immer verdoppelt. Das n steht für die Feldnummer.
Um herauszufinden, ab welchem Feld 1000 Reiskörner liegen, muss folgende Beziehung aufgelöst werden:

$2^x = 1000$

Durch Ausprobieren, z. B. mit dem Taschenrechner, erhält man für $x = 10$ einen Wert von 1024 Körnern.
Ab dem 10. Feld liegt mehr als 1000 Reiskörner.
Auf dieselbe Art untersucht man, ab welchem Feld die Million überschritten ist:

$2^x = 1\,000\,000$

Für $x = 20$ erhält man einen Wert von 1 048 576 Reiskörnern. Das bedeutet, dass auf dem 20. Feld 1 048 576 Reiskörner liegen. Daher liegen auf insgesamt 19 Feldern weniger als 1 000 000 Reiskörner.
Auf $45 = 64 - 19$ Feldern liegen also mindestens eine Million Reiskörner.

$2^x = 1\,000\,000\,000$

Für $x = 30$ erhält man einen Wert von 1 073 741 824 Reiskörnern.
Ab dem 30. Feld sind es mindestens eine Milliarde Reiskörner.

2 Damit die 10 000-fache Anzahl an Reiskörnern (also: 50 000 Stück) auf eine quadratische Fläche passen, werden 10 000 quadratzentimetergroße Flächen benötigt. Es gilt:
$10\,000\,\text{cm}^2 = 100 \cdot 100\,\text{cm}^2 = 1\,\text{m}^2$

Ein Quadrat, auf das 10 000-mal so viele Körner passen (also 50 000 Reiskörner), hat die Größe von einem Quadratmeter.
Um herauszufinden, wie viele Körner auf einen Quadratkilometer passen, muss man, ausgehend von einem Quadratmeter, mit dem Faktor 1 000 000 multiplizieren.
Bei der Umrechnung von Flächeninhalten gilt der Faktor 100.

$$\text{m}^2 \underset{\cdot 100}{\overset{:100}{\rightleftarrows}} \text{a} \underset{\cdot 100}{\overset{:100}{\rightleftarrows}} \text{ha} \underset{\cdot 100}{\overset{:100}{\rightleftarrows}} \text{km}^2$$

$100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000 = 1$ Million

Seite 37

3 Auf dem 64. Feld liegen $2^{64} = 1{,}845 \cdot 10^{19}$ Reiskörner.
Wenn man weiterhin davon ausgeht, dass 5 Reiskörner auf einem Quadratzentimeter nebeneinander Platz finden, so benötigt man insgesamt eine Fläche von $3{,}69 \cdot 10^{18}\,\text{cm}^2$.
Umgerechnet entspricht dies
$3{,}69 \cdot 10^{8}\,\text{km}^2 = 369$ Mio. km^2.
Der prozentuale Anteil an der Erdoberfläche ist: $\frac{369\,000\,000\,\text{km}^2}{510\,000\,000\,\text{km}^2} \approx 0{,}72 = 72\,\%$
Das Bild D gibt die Flächengröße der Reiskörner im Vergleich zur Erdoberfläche am besten wieder.

Seite 38

Einstieg

→ In der oberen Zeile steht der Platzhalter jeweils für den Wert der Potenz; in der unteren Zeile steht er für den Exponenten bzw. für die Potenz.

$625 \xrightarrow{:5} 125 \xrightarrow{:5} 25 \xrightarrow{:5} 5$

625	125	25	5	1
5^4	5^3	5^2	5^1	5^0

$5^4 \xrightarrow{:5} 5^3 \xrightarrow{:5} 5^2 \xrightarrow{:5} 5^1$

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{3125}$
5^{-1}	5^{-2}	5^{-3}	5^{-4}	5^{-5}

→ Es gilt: $5^0 = 1$

→

$10\,000 \xrightarrow{:10} 1000 \xrightarrow{:10} 100$

10 000	1000	100	10	1
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

$10^4 \xrightarrow{:10} 10^3 \xrightarrow{:10} 10^2$

0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}

Ist der Exponent ≥ 0; so ist der Exponent gleich der Anzahl der Nullen. Ist der Exponent negativ, dann gibt der Betrag des Exponenten die Anzahl der Nachkommastellen an. Die Anzahl der Nullen ist der Betrag minus 1.

→ In beiden Tabellen steht als Wert die Zahl 1 ($5^0 = 1$ und $10^0 = 1$).

1 a) $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$ b) $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$ c) $2^{-5} = \frac{1}{2^5}$
d) $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$ e) $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$ f) $0{,}3^{-2} = \frac{1}{0{,}3^2}$

2 a) $\frac{1}{3^2} = 3^{-2}$ b) $\frac{1}{4^3} = 4^{-3}$ c) $\frac{1}{5^6} = 5^{-6}$
d) $\frac{1}{2^1} = 2^{-1}$ e) $\frac{1}{10^{10}} = 10^{-10}$ f) $\frac{1}{0{,}5^3} = 0{,}5^{-3}$

3 a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$
b) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$
c) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0{,}008$
d) $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \approx 0{,}0370$
e) $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278$
f) $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000} \approx 0{,}0001$

Seite 39

A a) $\frac{1}{4^2}$ b) $\frac{1}{12^4}$ c) $\frac{1}{5^5}$
d) $\frac{1}{6^2}$ e) $\frac{1}{0{,}1^2}$ f) $\frac{1}{0{,}4^5}$

B a) 5^{-3} b) 3^{-3} c) $0{,}2^{-6}$
d) 12^{-2} e) $0{,}15^{-2}$ f) $1{,}6^{-4}$

Seite 39, links

4 Zusammen gehören die Kärtchen:
$0{,}01 = 10^{-2} = \frac{1}{100}$;
$0{,}0001 = 10^{-4} = \frac{1}{10\,000}$.
Übrig bleiben die Kärtchen:
$0{,}01$; 10^{-5} und $\frac{1}{1\,000\,000}$.

5 a) $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = 0{,}5$
b) $0{,}2^{-1} = \frac{1}{0{,}2^1} = 5$
c) $100 \cdot 5^{-2} = 100 \cdot \frac{1}{5^2} = 100 \cdot \frac{1}{25} = 4$
d) $8 \cdot 2^{-3} = 8 \cdot \frac{1}{2^3} = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1$
e) $20 \cdot 2^{-2} = 20 \cdot \frac{1}{2^2} = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5$
f) $50 \cdot 5^{-1} = 50 \cdot \frac{1}{5^1} = 10$

6 a) $4^{-6} = \frac{1}{4^6} = \frac{1}{4096} \approx 0{,}0002$
b) $12^{-3} = \frac{1}{12^3} = \frac{1}{1728} \approx 0{,}0006$
c) $8^{-4} = \frac{1}{8^4} = \frac{1}{4096} \approx 0{,}0002$
d) $7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343} \approx 0{,}0029$
e) $3^{-6} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729} \approx 0{,}0014$
f) $11^{-3} = \frac{1}{11^3} = \frac{1}{1331} \approx 0{,}0008$

7 a) $0{,}5^{-4} = \frac{1}{0{,}5^4} = \frac{1}{0{,}0625} = 16$
b) $0{,}2^{-3} = \frac{1}{0{,}2^3} = \frac{1}{0{,}008} = 125$
c) $0{,}25^{-4} = \frac{1}{0{,}25^4} = \frac{1}{0{,}003\,906\,25} = 256$
d) $2{,}5^{-2} = \frac{1}{2{,}5^2} = \frac{1}{6{,}25} = 0{,}16$
Alternativer Lösungsweg
z. B. zu a): $0{,}5^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{1}\right)^4 = 2^4 = 16$

8 a) $8^6 \cdot 4^{-5} = 8^6 \cdot \frac{1}{4^5} = 262\,144 \cdot \frac{1}{1024} = 256$
b) $5^2 \cdot 2^{-3} = 5^2 \cdot \frac{1}{2^3} = 25 \cdot \frac{1}{8} = 3{,}125$
c) $5^2 \cdot 4^{-5} = 5^2 \cdot \frac{1}{4^5} = 25 \cdot \frac{1}{1024} \approx 0{,}0244$
d) $8^{-6} \cdot 4^5 = \frac{1}{8^6} \cdot 4^5 = \frac{1}{262\,144} \cdot 1024 \approx 0{,}0039$
e) $5^{-2} \cdot 2^3 = \frac{1}{5^2} \cdot 8 = \frac{1}{25} \cdot 8 = 0{,}32$
f) $5^{-2} \cdot 4^5 = \frac{1}{5^2} \cdot 4^5 = \frac{1}{25} \cdot 1024 = 40{,}96$

9 a) $4^{-2} \cdot 3^{-2} = \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{9}$
b) $5^{-3} \cdot 6^{-2} = \frac{1}{5^3} \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{1}{125} \cdot \frac{1}{36}$
c) $5^{-2} \cdot 2^{-5} = \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{32}$

10 a) $2^{-4} \cdot 3^5 + 2^{-4} \cdot 5^3$
$= 2^{-4} \cdot (3^5 + 5^3)$
$= \frac{1}{2^4} \cdot (243 + 125)$
$= \frac{1}{16} \cdot 368 = 23$

b) $2^{-4} \cdot 7^3 + 2^{-4} \cdot 9^3$
$= 2^{-4} \cdot (7^3 + 9^3)$
$= \frac{1}{2^4} \cdot (343 + 729)$
$= \frac{1}{16} \cdot 1072 = 67$

c) $5^{-3} \cdot 11^3 + 5^{-3} \cdot 13^2$
$= 5^{-3} \cdot (11^3 + 13^2)$
$= \frac{1}{5^3} \cdot (1331 + 169)$
$= \frac{1}{125} \cdot 1500 = 12$

d) $7^{-1} \cdot 2^6 + 7^{-1} \cdot 3^3$
$= 7^{-1} \cdot (2^6 + 3^3)$
$= \frac{1}{7^1} \cdot (64 + 27)$
$= \frac{1}{7} \cdot 91 = 13$

11 a) $a^{-6} = \frac{1}{a^6}$ b) $b^{-2} = \frac{1}{b^2}$
c) $x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ d) $y^{-1} = \frac{1}{y^1} = \frac{1}{y}$

12 a) Hier wurden vermutlich Basis und Exponent miteinander multipliziert. Richtig ist:
$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
b) Das negative Vorzeichen vor der Potenz wurde vergessen oder man hat $(-3)^2$ statt -3^2 gerechnet. Richtig ist:
$-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$
c) Hier wurde das negative Vorzeichen vor der Potenz vergessen oder eventuell mit dem negativen Exponenten „multipliziert". Richtig ist:
$-4^{-2} = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}$
d) Hier wurde vermutlich der Exponent von der Basis subtrahiert. Richtig ist:
$10^{-2} = -\frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

Seite 39, rechts

4 a) $5^{-1} = \frac{1}{5} = 0{,}2$
b) $0{,}5^{-1} = \frac{1}{0{,}5} = 2$
c) $0{,}2^{-1} = \frac{1}{0{,}2} = 5$
d) $125 \cdot 5^{-3} = 125 \cdot \frac{1}{5^3} = 125 \cdot \frac{1}{125} = 1$
e) $40 \cdot 2^{-3} = 40 \cdot \frac{1}{2^3} = 40 \cdot \frac{1}{8} = 5$
f) $200 \cdot 5^{-2} = 200 \cdot \frac{1}{5^2} = 200 \cdot \frac{1}{25} = 8$

5 a) $8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64} = 0{,}015\,625$
b) $0{,}8^{-2} = \frac{1}{0{,}8^2} = \frac{1}{0{,}64} = 1{,}5626$
c) $0{,}08^{-2} = \frac{1}{0{,}08^2} = \frac{1}{0{,}0064} = 156{,}25$
d) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0{,}008$
e) $0{,}5^{-3} = \frac{1}{0{,}5^3} = \frac{1}{0{,}125} = 8$
f) $0{,}05^{-3} = \frac{1}{0{,}05^3} = \frac{1}{0{,}000\,125} = 8000$
Folgendes fällt auf:
Wenn die Position der Kommastelle in der Basis sich um eins nach links verschiebt, so verschiebt sich die Position der Kommastelle im Ergebnis um zwei bzw. drei Stellen nach rechts, je nach Größe des Exponenten.

6 a) $3^{-3} \cdot 2^6 + 3^{-3} \cdot 8^5$
$= 3^{-3} \cdot (2^6 + 8^5)$
$= \frac{1}{3^3} \cdot (64 + 32\,768)$
$= \frac{1}{27} \cdot 32\,832 = 1216$
b) $2^{-5} \cdot 9^4 + 2^{-5} \cdot 7^4 - 2^{-5} \cdot 5^4 - 2^{-5} \cdot 3^4$
$= 2^{-5} \cdot (9^4 + 7^4 - 5^4 - 3^4)$
$= \frac{1}{2^5} \cdot (6561 + 2401 - 625 - 81)$
$= \frac{1}{32} \cdot 8256 = 258$
c) $11^{-6} \cdot 10^5 + 11^{-6} \cdot 8^5 + 11^{-6} \cdot 7^5$
$= 11^{-6} \cdot (10^5 + 8^5 + 7^5)$
$= \frac{1}{11^6} \cdot (100\,000 + 32\,768 + 16\,807)$
$= \frac{1}{1\,771\,561} \cdot 149\,575 \approx 0{,}0844$
d) $0{,}05^{-2} \cdot 0{,}2^8 + 0{,}05^{-2} \cdot 0{,}7^8$
$= \frac{1}{0{,}05^2} \cdot (0{,}2^8 + 0{,}7^8)$
$= 400 \cdot (0{,}2^8 + 0{,}7^8) \approx 23{,}0602$

7 a) Die Potenzwerte unterscheiden sich durch ihr Vorzeichen. Denn es gilt:
$-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$ und
$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.
b) Die Potenzwerte sind gleich. Denn es gilt:
$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$ und
$-3^3 = -3 \cdot 3 \cdot 3 = -27$.
c) Die Potenzwerte unterscheiden sich durch ihr Vorzeichen. Denn es gilt:
$-4^{-2} = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}$ und $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$.
d) Die Potenzwerte unterscheiden sich durch ihr Vorzeichen. Denn es gilt:
$-5^{-3} = -\frac{1}{5^3} = -\frac{1}{125}$ und $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$.
e) Die Potenzwerte unterscheiden sich durch ihr Vorzeichen. Dadurch dass der Exponent eine gerade Zahl ist, wird das Vorzeichen bei der ersten Potenz im Ergebnis positiv; bei der zweiten Potenz kommt aber das Vorzeichen nur einmal vor, das Ergebnis ist damit negativ. Genauer:
$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$ und
$-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$.
f) Die Potenzwerte unterscheiden sich durch ihr Vorzeichen. Denn es gilt:
$(-3)^{-5} = \frac{1}{(-3)^5} = \frac{1}{-243} = -\frac{1}{243}$ und $3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$.

8 a) $5^3 = 125$ und $3^5 = 243$;
$6^4 = 1296$ und $4^6 = 4096$;
$10^8 = 100\,000\,000$ und $8^{10} = 1\,073\,741\,824$.
Wählt man zwei natürliche Zahlen, die sich um mindestens zwei unterscheiden, dann stellt man fest, dass der Potenzwert größer ist, wenn die kleinere der beiden Zahlen die Basis bildet und die größere im Exponenten steht.
Weiteres Beispiel:
$8^6 = 262\,144$ und $6^8 = 1\,679\,616$.

Man kann feststellen, dass diese Regel im Allgemeinen auch dann gilt, wenn der Unterschied zwischen den beiden Zahlen 1 beträgt. Z. B.:
$4^3 = 64$ und $3^4 = 81$ oder
$5^4 = 625$ und $4^5 = 1024$.
Ausnahme bilden allerdings die Zahlenpaare 1 und 3 bzw. 2 und 3. Man erhält:
$3^1 = 3$ und $1^3 = 1$ bzw. $3^2 = 9$ und $2^3 = 8$.
Eine weitere Ausnahme von der Regel findet man in Teilaufgabe b).
b) Es gibt ein einziges Zahlenpaar (a, b), bei dem $a^b = b^a$ gilt. Das sind die Zahlen 2 und 4. Es gilt:
$2^4 = 16$ und $4^2 = 16$.

9 Individuelle Ausführung
Man stellt fest, dass die Zahlen vor dem Komma die steigenden 2er-Potenzen sind:
2; 4; 8; 16; 32; 64; …
Die Zahlen nach dem Komma werden gebildet aus den Nachkommastellen der steigenden Potenzen von 0,5. Denn es gilt:
$0{,}5^1 = 0{,}5$; $0{,}5^2 = 0{,}25$; $0{,}5^3 = 0{,}125$; $0{,}5^4 = 0{,}0625$;
$0{,}5^5 = 0{,}03125$; $0{,}5^6 = 0{,}015625$; …
Das hängt damit zusammen, dass gilt:

$2^1 + 2^{-1} = 2 + \frac{1}{2} = 2 + 0{,}5;$

$2^2 + 2^{-2} = 2^2 + \frac{1}{2^2} = 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2^2 + 0{,}5^2 = 4 + 0{,}25;$

$2^3 + 2^{-3}$
$= 2^3 + \frac{1}{2^3} = 2^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2^3 + 0{,}5^3 = 8 + 0{,}125;$

$2^4 + 2^{-4}$
$= 2^4 + \frac{1}{2^4} = 2^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2^4 + 0{,}5^4 = 16 + 0{,}0625;$

…

Allgemein gilt:
$2^n + 2^{-n} = 2^n + \frac{1}{2^n} = 2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^n + 0{,}5^n$

Je nachdem, wie die Anzahl der angezeigten Nachkommastellen eingestellt ist, „verschwindet" der zweite Summand ab einer bestimmten Größe von n. Bei 4 angezeigten Nachkommastellen werden ab $n = 15$ nur noch Nullen nach dem Komma angezeigt, bei 2 Nachkommastellen bereits ab $n = 8$.
Egal wie hoch jedoch die Anzeige eingestellt ist, sind ab einem bestimmten n alle Nachkommastellen gleich null (bei Verwendung von Excel 2010 beispielsweise ab $n = 25$). Hier ist die Rechengenauigkeit des Programms erreicht.

Seite 40

Einstieg

→ grüne Tabelle:

·	2	4	8	16	32	64
2	4	8	16	32	64	128
4	8	16	32	64	128	256
8	16	32	64	128	256	512
16	32	64	128	256	512	1024
32	64	128	256	512	1024	2048
64	128	256	512	1024	2048	4096

orange Tabelle:

·	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}
2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}

Für die Multiplikationen in der grünen Tabelle hat man vermutlich etwas länger gebraucht.

→ Mögliche Antwort:
In der orangen Tabelle findet man den neuen Exponenten, indem man den Exponenten der Potenz in der Kopfspalte zum Exponenten der Potenz in der Kopfzeile addiert.
Oder auch: Die Exponenten fangen oben links mit 2 an. Pro Kästchen nach rechts bzw. nach unten erhöht sich der Exponent jeweils um 1. Die Basis bei allen Potenzen beträgt stets 2.

→ Erste Divisionstabelle:

:	2	4	8	16	32	64
2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$
64	32	16	8	4	2	1

Zweite Divisionstabelle:

:	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}
2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}
2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Mögliches Vorgehen:
Man subtrahiert den Exponenten der Potenz in der Kopfzeile vom Exponenten der Potenz in der Kopfspalte. Die Basis beträgt immer 2.

Seite 41

1 a) $6^5 \cdot 6^3 = 6^{5+3} = 6^8$
b) $4^7 \cdot 4^2 = 4^{7+2} = 4^9$
c) $5^{12} : 5^8 = 5^{12-8} = 5^4$
d) $2^{10} \cdot 2^{-4} = 2^{10+(-4)} = 2^6$
e) $10^4 \cdot 10^{-6} = 10^{4+(-6)} = 10^{-2}$
f) $\frac{9^6}{9^3} = 9^{6-3} = 9^3$

2 a) $a^7 \cdot a^2 = a^{7+2} = a^9$
b) $a^4 \cdot a^4 = a^{4+4} = a^8$
c) $a^8 : a^6 = a^{8-6} = a^2$
d) $x^5 \cdot x^{-2} = x^{5+(-2)} = x^3$
e) $x^4 \cdot x^{-7} = x^{4+(-7)} = x^{-3}$
f) $\frac{x^7}{x^6} = x^{7-6} = x^1 = x$

3 a) $(2^3)^4 = 2^{3\cdot4} = 2^{12}$
b) $(4^5)^2 = 4^{5\cdot2} = 4^{10}$
c) $(2^3)^{-2} = 2^{3\cdot(-2)} = 2^{-6}$
d) $(10^{10})^{10} = 10^{10\cdot10} = 10^{100}$
e) $(a^4)^5 = a^{4\cdot5} = a^{20}$
f) $(b^2)^{-1} = b^{2\cdot(-1)} = b^{-2}$

A a) $7^5 \cdot 7^2 = 7^{5+2} = 7^7$
b) $7^5 \cdot 7^{-2} = 7^{5-2} = 7^3$
c) $12^9 : 12^3 = 12^{9-3} = 12^6$
d) $12^{10} \cdot 12^{-15} = 12^{10-15} = 12^{-5}$
e) $\frac{11^8}{11^7} = 11^{8-7} = 11^1 = 11$
f) $(5^4)^6 = 5^{4\cdot6} = 5^{24}$

B a) $a^2 \cdot a^2 = a^{2+2} = a^4$ b) $x^6 \cdot x^{-3} = x^{6-3} = x^3$
c) $(y^2)^6 = y^{2\cdot6} = y^{12}$ d) $(x^4)^{-2} = x^{4\cdot(-2)} = x^{-8}$
e) $\frac{a^4}{a^6} = a^{4-6} = a^{-2}$ f) $a^8 : a^3 = a^{8-3} = a^5$

Seite 41, links

4 a) $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
b) $12^8 : 12^7 = 12^{8-7} = 12^1 = 12$
c) $5^8 \cdot 5^{-6} = 5^{8+(-6)} = 5^2 = 25$
d) $23^5 : 23^4 = 23^{5-4} = 23^1 = 23$

5 a) $2^3 \cdot 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$
b) $4^5 \cdot 4^2 = 4^{5+2} = 4^7$
c) $3^5 \cdot 3^6 : 3^4 = 3^{5+6-4} = 3^7$
d) $5^2 \cdot 5^4 : 5^8 = 5^{2+4-8} = 5^{-2}$
e) $3^8 : (3^2 \cdot 3^4) = 3^8 : 3^{2+4} = 3^8 : 3^6 = 3^{8-6} = 3^2$
f) $10^5 : (10^6 \cdot 10^4)$
$= 10^5 : 10^{6+4} = 10^5 : 10^{10} = 10^{5-10} = 10^{-5}$

6 a) $4^6 \cdot 4^3 = 4^9$ b) $3^4 \cdot 3^{-6} = 3^{-2}$

c) $\frac{12^8}{12^{10}} = 12^{-2}$ d) $(6^4)^3 = 6^{12}$

7 Man kann folgende Gleichungen legen:
$2^{-4} = 0{,}0625$; $2^{-5} = 0{,}031\,25$; $5^4 = 625$;
$5^{-5} = 0{,}000\,32$

8 a) $3^4 \cdot 3^5 = 3^{20}$
Statt die Exponenten miteinander zu addieren, hat man sie miteinander multipliziert. Richtig ist: $3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$.
b) $(3^4)^2 = 3^{16}$
Statt die Exponenten miteinander zu multiplizieren, hat man den Exponenten innerhalb der Klammer mit dem anderen Exponenten potenziert. Richtig ist:
$(3^4)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$.
c) $6^5 : 6^2 = 3^3$
Hier hat man einerseits die Exponenten voneinander subtrahiert, was richtig ist, auf der anderen Seite aber auch die Basis des Ergebnisses verändert, was falsch ist. Richtig ist:
$6^5 : 6^2 = 6^{5-2} = 6^3$.
d) $3^5 + 3^2 = 3^7$
Hier hat man versucht, zwei unterschiedliche Potenzen miteinander zu addieren; dafür hat man die Exponenten miteinander addiert. Diese Operation ist aber falsch. Um unterschiedliche Potenzen zu addieren oder subtrahieren, muss man erst ihre Werte berechnen.
Richtig ist also:
$3^5 + 3^2 = 243 + 9 = 252$.
(Eine Addition ist nur möglich, indem man die Potenzwerte ausrechnet.)
e) $\frac{3^8}{3^2} = 3^4$
Um einen Bruch aus zwei Potenzen mit gleicher Basis zu berechnen, subtrahiert man den Exponenten im Nenner vom Exponenten im Zähler. Statt zu subtrahieren, wurde hier dividiert.
Richtig ist: $\frac{3^8}{3^2} = 3^{8-2} = 3^6$.
f) $\frac{4^4}{4^2} = 1^2$
Um die Potenzen zu dividieren, hat man hier sowohl den unteren Exponenten vom oberen subtrahiert – was richtig ist – als auch die eine Basis durch die andere Basis dividiert – was falsch ist. Die richtige Rechnung lautet: $\frac{4^4}{4^2} = 4^{4-2} = 4^2$.
g) $33^2 = 66$
Um die Potenz auszurechnen, hat man hier die Basis 33 mit dem Exponenten 2 multipliziert.
Richtig ist: $33^2 = 33 \cdot 33 = 1089$.
h) $2 + 2^3 = 16$
Statt zu addieren wurde multipliziert:
$2 \cdot 2^3 = 2^4 = 16$
Richtig ist: $2 + 2^3 = 2 + 8 = 10$.
i) $x^{10} : x^5 = x^2$
Hier hat man den ersten Exponenten durch den zweiten dividiert, statt den zweiten vom ersten zu subtrahieren. Richtig ist: $x^{10} : x^5 = x^{10-5} = x^5$.
j) $x^5 - x^3 = x^2$
Hier wurde dividiert statt subtrahiert:
$x^5 : x^3 = x^{5-3} = x^2$
Der Rechenausdruck $x^5 - x^3$ lässt sich nicht vereinfachen.

Seite 41, rechts

4 a) $a^4 \cdot a^{-2} \cdot a^5 = a^{4-2+5} = a^7$
b) $b^3 \cdot b^3 \cdot (b^3)^2 = b^{3+3+3\cdot 2} = b^{12}$
c) $(c^4)^2 : c^4 : c^2 = c^{4\cdot 2-4-2} = c^2$
d) $(x^5 : x^7) \cdot x^6 = x^{5-7} \cdot x^6 = x^{-2+6} = x^4$
e) $x^{10} : x^8 \cdot x^{-4} = x^{10-8} \cdot x^{-4} = x^{2+(-4)} = x^{-2}$
f) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot a^{-10} = a^{2+3+4+(-10)} = a^{-1}$

5 a) $a^1 \cdot a^2 \cdot a^{-3} = a^{1+2+(-3)} = a^0 = 1$
b) $a^9 : a^8 : a^1 = a^{9-8-1} = a^0 = 1$
c) $\frac{a^5 \cdot a^3}{a^7} = a^{5+3-7} = a^1 = a$
d) $\frac{a^2}{a^4} \cdot a^3 = \frac{a^2 \cdot a^3}{a^4} = a^{2+3-4} = a^1 = a$
e) $\frac{a^7}{a^3 \cdot a^4} = a^{7-3-4} = a^0 = 1$

6 Die Terme können nicht mit dem Taschenrechner berechnet werden, weil die Zahlen zu groß für den Taschenrechner sind. Man erhält eine Fehlermeldung, z. B. „Math Error“ oder ähnliches. Die Terme können aber mithilfe der Potenzrechengesetze vereinfacht und anschließend berechnet werden.
a) $\frac{2^{800}}{2^{796}} = 2^{800-796} = 2^4 = 16$
b) $4^{-250} \cdot 4^{252} = 2^{-250+252} = 4^2 = 16$
c) $3^{210} \cdot 3^{-209} = 2^{210-209} = 3^1 = 3$
d) $3^{-210} \cdot 3^{209} = 2^{-210+209} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

7 a) $(2x)^4 = (2x) \cdot (2x) \cdot (2x) \cdot (2x)$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = 2^4 \cdot x^4 = 16x^4$
b) $(5a)^2 = (5a) \cdot (5a)$
$= 5 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 5^2 \cdot a^2 = 25a^2$
c) $(-4x)^4 = (-4x) \cdot (-4x) \cdot (-4x) \cdot (-4x)$
$= (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$
$= (-4)^4 \cdot x^4 = 256x^4$
d) $(3x)^6 = (3x) \cdot (3x) \cdot (3x) \cdot (3x) \cdot (3x) \cdot (3x)$
$= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$
$= 3^6 \cdot x^6 = 729x^6$
e) $(25a^2)^2 = (25a^2) \cdot (25a^2)$
$= 25 \cdot 25 \cdot a^2 \cdot a^2 = 25^2 \cdot (a^2)^2 = 625a^4$
f) $(-2x)^3 = (-2x) \cdot (-2x) \cdot (-2x)$
$= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot x \cdot x \cdot x$
$= (-2)^3 \cdot x^3 = -8x^3$

Seite 42, links

9 a) $x^5 \cdot x^4 = x^{5+4} = x^9$
b) $x^3 \cdot x^{-5} = x^{3-5} = x^{-2}$
c) $(y^4)^2 = y^{4 \cdot 2} = y^8$
d) $a^{-8} \cdot a^6 = a^{-8+6} = a^{-2}$
e) $b^{-4} \cdot b^{-2} = b^{-4-2} = b^{-6}$
f) $(z^3)^{-2} = z^{3 \cdot (-2)} = z^{-6}$
g) $\frac{c^5}{c^3} = c^{5-3} = c^2$
h) $\frac{c^4}{c^6} = c^{4-6} = c^{-2}$
i) $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$

10 a) $8a^2 \cdot 5a^3 = 8 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a^3 = 40a^5$
b) $5x^2 \cdot 4x^4 = 5 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot x^4 = 20x^6$
c) $20a^5 \cdot 8a^5 = 20 \cdot 8 \cdot a^5 \cdot a^5 = 160a^{10}$
d) $6x^3 \cdot 2x^5 = 6 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot x^5 = 12x^8$
e) $4a^4 \cdot 4a^4 = 4 \cdot 4 \cdot a^4 \cdot a^4 = 16a^8$
f) $3x^4 \cdot 5x^{-6} = 3 \cdot 5 \cdot x^4 \cdot x^{-6} = 15x^{-2}$
g) $9a^{-2} \cdot 3a^{-4} = 9 \cdot 3 \cdot a^{-2} \cdot a^{-4} = 27a^{-6}$
h) $4a^{-2} \cdot 5a^{-3} = 4 \cdot 5 \cdot a^{-2} \cdot a^{-3} = 20a^{-5}$

11 a) $2^9 \cdot 2^{-8} = 2^1 = 2$ b) $3^7 \cdot 3^{-8} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
c) $5^{17} \cdot 5^{-17} = 5^0 = 1$ d) $\frac{4^3}{4^4} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$
e) $\frac{6^{10}}{6^9} = 6^1 = 6$ f) $\frac{12^{12}}{12^{12}} = 12^0 = 1$
g) $a^7 \cdot a^{-6} = a^{7-6} = a^1 = a$
h) $x^{10} \cdot x^{-10} = x^0 = 1$ i) $b^5 : b^6 = b^{-1} = \frac{1}{b}$
j) $\frac{x^3}{x^2} = x^1 = x$ k) $\frac{x^1}{x^1} = x^0 = 1$
l) $\frac{x}{x^2} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

12 Folgende Terme sind gleich:
$x^n \cdot x^{3n} = x^{4n}$; $2x^n \cdot x^{2n} = 2x^{3n}$; $x^{n+1} \cdot x^{n+2} = x^{2n+3}$;
$2x^{2n} \cdot 3x^{3n} = 6x^{5n}$; $x^{n+1} \cdot x^n = x^{2n+1}$;
$6x^{n+1} \cdot x^{1-n} = 6x^0 = 6$

13 a) Man schreibt die Basis der Potenz als neue Potenz mit einer möglichst kleinen Basis. Der neue Exponent ist das Produkt der zwei Exponenten.
(1) $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10}$
(2) $8^2 = (2^3)^2 = 2^6$
(3) $27^4 = (3^3)^4 = 3^{12}$
(4) $125^5 = (5^3)^5 = 5^{15}$
b) Man zerlegt den Exponenten in ein Produkt aus zwei Faktoren. Einer davon soll möglichst groß sein, der andere möglichst klein, aber größer als 1. Dann berechnet man den Potenzwert aus Basis und großem Faktor und nimmt diesen als neue Basis.
(1) $2^{10} = 2^{2 \cdot 5} = (2^5)^2 = 32^2$
(2) $8^4 = 8^{2 \cdot 2} = (8^2)^2 = 64^2$
(3) $3^9 = 3^{3 \cdot 3} = (3^3)^3 = 27^3$
(4) $25^8 = 25^{4 \cdot 2} = (25^4)^2 = 390\,625^2$

14 Spiel; individuelle Lösungen

Seite 42, rechts

8 a) $a^m \cdot a^{1-m} = a^{m+(1-m)} = a^1 = a$
b) $y^{m-2} \cdot y^{2-m} = y^{m-2+2-m} = y^0 = 1$
c) $x^1 \cdot x = x^1 \cdot x^1 = x^2$
d) $\frac{b^m}{b} = \frac{b^m}{b^1} = b^{m-1}$
e) $\frac{a^{2(n+1)}}{a^{2n+2}} = a^{2(n+1)-(2n+2)} = a^{2n+2-2n-2} = a^0 = 1$
f) $\frac{a^{2n}}{a^{2n+1}} = a^{2n-(2n+1)} = a^{2n-2n-1} = a^{-1} = \frac{1}{a}$
g) $\frac{a^{m+1}}{a^{m-1}} = a^{m+1-(m-1)} = a^{m+1-m+1} = a^2$
h) $\frac{x^{2m}}{x^m} = x^{2m-m} = x^m$
i) $\frac{y^{2m+1}}{y^{3m}} = y^{2m+1-3m} = y^{1-m}$

9 a) $5a^m \cdot 4a^m = 5 \cdot 4a^{m+m} = 20a^{2m}$
b) $6x^{m+1} \cdot 3x^{m-1} = 6 \cdot 3x^{m+1+m-1} = 18x^{2m}$
c) $3a^{2m} \cdot 5a^{3m} = 3 \cdot 5a^{2m+3m} = 15a^{5m}$
d) $6x^{m-5} \cdot x^5 = 6x^{m-5+5} = 6x^m$
e) $2a^{4-m} \cdot 2a^m = 2 \cdot 2\,a^{4-m+m} = 4a^4$
f) $10x^{10m} \cdot 10x^{10m} = 10 \cdot 10x^{10m+10m} = 100x^{20m}$
g) $\frac{4a^{3m}}{2a^m} = (4:2) \cdot a^{3m-m} = 2a^{2m}$
h) $\frac{10x^m}{2x^2} = (10:2) \cdot x^{m-2} = 5x^{m-2}$

10 Es sind jeweils beide Möglichkeiten angegeben.
a) $2^5 \cdot 2^7 = 2^{12}$ b) $3^2 \cdot 3^6 = 3^8$
$2^5 \cdot 2^7 = 4^6$ $3^2 \cdot 3^6 = 81^2$
c) $2x^2 \cdot 2x^2 = 4x^4$ d) $(2x^2)^3 = 8x^6$
$2x^2 \cdot 2x^2 = 2^2 \cdot (x^2)^2$ $(2x^2)^3 = 8 \cdot (x^3)^2$
Übrig bleiben die Kärtchen:
4^8; 3^{12}; $4x^6$ und $8x^4$.
Zu diesen Kärtchen kann man keine Aufgaben mit doppelten Lösungen mehr finden, da die Rechenausdrücke in den Kärtchen alle unterschiedlich sind.
Beispielaufgaben:
$4^{12} : 4^4 = 4^8$; $3^{10} \cdot 3^2 = 3^{12}$; $(2x^3)^2 = 4x^6$;
$2x^5 \cdot 4x^{-1} = 8x^4$

11 a) $(2^4 \cdot 2^3)^2 = (2^{4+3})^2 = (2^7)^2 = 2^{7 \cdot 2} = 2^{14} = 16\,384$
b) $(2^4 \cdot 2^{-3})^2 = (2^1)^2 = 2^2 = 4$
c) $(2^{-4} \cdot 2^3)^2 = (2^{-1})^2 = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
d) $(2^{-4} \cdot 2^{-3})^2 = (2^{-7})^2 = 2^{-14} = \frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16\,384}$
Tipp: Man kann von innen nach außen arbeiten, wie in Teilaufgabe a) ausführlich gezeigt. Möglich ist aber auch, zu Beginn jede Potenz getrennt zu potenzieren und anschließend die beiden Potenzen miteinander zu multiplizieren, z. B. in a): $(2^4 \cdot 2^3)^2 = (2^4)^2 \cdot (2^3)^2 = 2^8 \cdot 2^6 = 2^{14}$

12 a) Die Basis der jeweiligen Potenz kann auch als Potenz zu einer kleineren Basis geschrieben werden. Der neue Exponent ergibt sich als Produkt beider Exponenten.

(1) $4^6 = (2^2)^6 = 2^{12}$

(2) $100^6 = (10^2)^6 = 10^{12}$

(3) $49^3 = (7^2)^3 = 7^6$

(4) $27^5 = (3^3)^5 = 3^{15}$

b) Um die Potenz mit möglichst großer Basis und kleinem Exponenten zu schreiben, schreibt man als erstes den Exponenten als Produkt und nimmt dann einen möglichst großen Faktor des Produkts zum Bilden der neuen Basis.

(1) $2^{10} = 2^{2 \cdot 5} = (2^5)^2 = 32^2$

(2) $5^6 = 5^{2 \cdot 3} = (5^3)^2 = 125^2$

(3) $3^9 = 3^{3 \cdot 3} = (3^3)^3 = 27^3$

(4) $4^{15} = 4^{3 \cdot 5} = (4^5)^3 = 1024^3$

13 Spiel; individuelle Lösungen

Seite 43

Einstieg

→ $3^2 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16 = 144$ Quadrate
(3 · 4)2 = 122 = 144 Quadrate

→ Mögliche Formulierung:
Zwei Quadratzahlen können miteinander multipliziert werden, indem man zuerst die Basen miteinander multipliziert und anschließend das Quadrat des Produkts berechnet.

→ 23 · 53 = 8 · 125 = 1000 Würfel
(2 · 5)3 = 103 = 1000 Würfel

→ Mögliche Formulierung:
Zwei Kubikzahlen können miteinander multipliziert werden, indem man zuerst die Basen miteinander multipliziert und anschließend die dritte Potenz des Produkts berechnet.

1 a) $3^2 \cdot 4^2 = (3 \cdot 4)^2 = 12^2 = 144$

b) $0{,}5^2 \cdot 2^2 = (0{,}5 \cdot 2)^2 = 1^2 = 1$

c) $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$

d) $3^3 \cdot 2^3 = (3 \cdot 2)^3 = 6^3 = 216$

e) $0{,}01^2 \cdot 100^2 = (0{,}01 \cdot 100)^2 = 1^2 = 1$

f) $\frac{4^4}{2^4} = \left(\frac{4}{2}\right)^4 = 2^4 = 16$

g) $\frac{12^3}{4^3} = \left(\frac{12}{4}\right)^3 = 3^3 = 27$

h) $\frac{1{,}4^3}{0{,}7^3} = \left(\frac{1{,}4}{0{,}7}\right)^3 = 2^3 = 8$

i) $\frac{12^3}{24^3} = \left(\frac{12}{24}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

j) $\frac{0{,}9^4}{0{,}45^4} = \left(\frac{0{,}9}{0{,}45}\right)^4 = 2^4 = 16$

2 a) $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$

b) $x^5 \cdot y^5 = (x \cdot y)^5$

c) $\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$

d) $\frac{x^4}{y^4} = \left(\frac{x}{y}\right)^4$

e) $\frac{a^3}{2^3} = \left(\frac{a}{2}\right)^3$

Seite 44

A a) $5^2 \cdot 2^2 = (5 \cdot 2)^2 = 10^2 = 100$
b) $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$
c) $0{,}3^3 \cdot 10^3 = (0{,}3 \cdot 10)^3 = 3^3 = 27$
d) $0{,}4^5 \cdot 2{,}5^5 = (0{,}4 \cdot 2{,}5)^5 = 1^5 = 1$
e) $20^3 \cdot 5^3 = (20 \cdot 5)^3 = 100^3 = 1\,000\,000$

B a) $a^{10} \cdot b^{10} = (a \cdot b)^{10}$ b) $u^2 \cdot v^2 = (u \cdot v)^2$
c) $0{,}5^3 \cdot y^3 = (0{,}5 \cdot y)^3$ d) $\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$
e) $\frac{y^6}{2^6} = \left(\frac{y}{2}\right)^6$ f) $\frac{7^3}{a^3} = \left(\frac{7}{a}\right)^3$

Seite 44, links

3 a) $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$
b) $5^3 \cdot 20^3 = (5 \cdot 20)^3 = 100^3 = 1\,000\,000$
c) $2^3 \cdot 1{,}5^3 = (2 \cdot 1{,}5)^3 = 3^3 = 27$
d) $8^3 \cdot 1{,}25^3 = (8 \cdot 1{,}25)^3 = 10^3 = 1000$
e) $26^4 : 13^4 = (26 : 13)^4 = 2^4 = 16$
f) $15^2 : 30^2 = (15 : 30)^2 = 0{,}5^2 = 0{,}25$
g) $1000^2 : 200^2 = (1000 : 200)^2 = 5^2 = 25$
h) $25^3 : 50^3 = (25 : 50)^3 = 0{,}5^3 = 0{,}125$

4 a) $\frac{6^2}{3^2} = 2^2 = 4$ b) $\frac{12^3}{4^3} = 3^3 = 27$
c) $\frac{20^4}{10^4} = 2^4 = 16$ d) $\frac{25^4}{12{,}5^4} = 2^4 = 16$
e) $\frac{5{,}6^3}{1{,}4^3} = 4^3 = 64$ f) $\frac{27^5}{13{,}5^5} = 2^5 = 32$

5 a) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 = (2 \cdot 3 \cdot 4)^2 = 24^2 = 576$
b) $2^3 \cdot 5^3 \cdot 20^3 = (2 \cdot 5 \cdot 20)^3 = 200^3 = 8\,000\,000$
c) $0{,}5^5 \cdot 0{,}2^5 \cdot 10^5 = (0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 10)^5 = 1^5 = 1$
d) $7^3 \cdot 11^3 \cdot 13^3$
$= (7 \cdot 11 \cdot 13)^3 = 1001^3 = 1\,003\,003\,001$

6 a) $5^3 \cdot 2^3 + 2{,}5^4 \cdot 4^4 = (5 \cdot 2)^3 + (2{,}5 \cdot 4)^4$
$= 10^3 + 10^4 = 1000 + 10\,000 = 11\,000$
b) $1{,}25^3 \cdot 4^3 + 4^2 \cdot 1{,}5^2$
$= (1{,}25 \cdot 4)^3 + (4 \cdot 1{,}5)^2 = 5^3 + 6^2 = 125 + 36 = 161$
c) $1{,}5^3 \cdot 4^3 : 6^3 = (1{,}5 \cdot 4)^3 : 6^3 = 6^3 : 6^3 = 1$
d) $5^3 \cdot 20^3 + 2{,}5^3 \cdot 40^3 = (5 \cdot 20)^3 + (2{,}5 \cdot 40)^3$
$= 100^3 + 100^3 = 2\,000\,000$

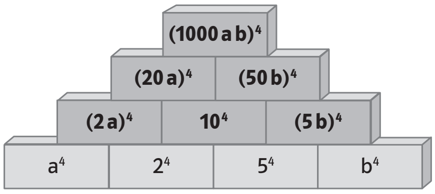
7

	falsch	richtig
$(2 \cdot 3)^3$	54	$6^3 = 216$
$(2 \cdot 4)^3$	128	$8^3 = 512$
$(4 \cdot 10)^{-3}$	0,004	$40^{-3} = 0{,}000\,015\,625$
$2 \cdot 3^4$	6^4	$2 \cdot 81 = 162$
$3 \cdot 2^2$	36	$3 \cdot 4 = 12$

Es wurden folgende Fehler gemacht:
1. Zeile: Statt $2^3 \cdot 3^3$ hat man $2 \cdot 3^3$ gerechnet.
2. Zeile: Statt $(2 \cdot 4)^3$ bzw. $2^3 \cdot 4^3$ hat man $2 \cdot 4^3$ gerechnet.
3. Zeile: Statt $(4 \cdot 10)^{-3}$ bzw. $4^{-3} \cdot 10^{-3}$ hat man $4 \cdot 10^{-3}$ gerechnet.
4. Zeile: Statt $2 \cdot 3^4$ hat man $(2 \cdot 3)^4$; also 6^4 gerechnet.
5. Zeile: Statt $3 \cdot 2^2$ hat man $(3 \cdot 2)^2$; also $6^2 = 36$ gerechnet.

8 a) $a^3 \cdot x^3 = (a \cdot x)^3$ b) $b^5 \cdot y^5 = (b \cdot y)^5$
c) $4^{-3} \cdot a^{-3} = (4a)^{-3}$ d) $0{,}2^6 \cdot x^6 = (0{,}2x)^6$
e) $5{,}4^2 \cdot y^2 = (5{,}4\,y)^2$
f) $(a + 1)^2 \cdot b^2 = ((a + 1)\,b)^2$
g) $\frac{x^5}{b^5} = \left(\frac{x}{b}\right)^5$ h) $\frac{6^4}{y^4} = \left(\frac{6}{y}\right)^4$
i) $\frac{1}{x^3} = \frac{1^3}{x^3} = \left(\frac{1}{x}\right)^3$

9



Seite 44, rechts

3 a) $\frac{2{,}4^3}{0{,}8^3} = \left(\frac{2{,}4}{0{,}8}\right)^3 = 3^3 = 27$
b) $\frac{14{,}4^4}{3{,}6^4} = \left(\frac{14{,}4}{3{,}6}\right)^4 = 4^4 = 256$
c) $\frac{13^2}{52^2} = \left(\frac{13}{52}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{16}$

4 a) $3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 = (3 \cdot 4 \cdot 5)^3 = 60^3 = 216\,000$
Überprüfen über das Produkt der Potenzen:
$3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 = 27 \cdot 64 \cdot 125 = 216\,000$
b) $5^4 \cdot 1{,}5^4 \cdot 6^4 = (5 \cdot 1{,}5 \cdot 6)^4 = 45^4 = 4\,100\,625$
Überprüfen über das Produkt der Potenzen:
$5^4 \cdot 1{,}5^4 \cdot 6^4 = 625 \cdot 5{,}0625 \cdot 1296 = 4\,100\,625$
c) $1{,}7^2 \cdot 20^2 \cdot 0{,}5^2 = (1{,}7 \cdot 20 \cdot 0{,}5)^2 = 17^2 = 289$
Überprüfen über das Produkt der Potenzen:
$1{,}7^2 \cdot 20^2 \cdot 0{,}5^2 = 2{,}89 \cdot 400 \cdot 0{,}25 = 289$
d) $400^6 \cdot 0{,}025^6 \cdot 0{,}1^6 = (400 \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}1)^6 = 1^6 = 1$
Überprüfen über das Produkt der Potenzen:
$400^6 \cdot 0{,}025^6 \cdot 0{,}1^6$
$= (4{,}096 \cdot 10^{15}) \cdot (2{,}441\,406\,25 \cdot 10^{-10}) \cdot 0{,}000\,001$
$= 1\,000\,000 \cdot 0{,}000\,001 = 1$

5 a) $2^2 \cdot 9^2 : 6^2 = 18^2 : 6^2 = 3^2 = 9$
b) $6^4 \cdot 4^4 : 12^4 = 24^4 : 12^4 = 2^4 = 16$
c) $\left(\frac{9}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1}\right)^2 = 6^2 = 36$
d) $\left(\frac{6}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{30}{12}\right)^2 = \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{30}{12}\right)^2 = 3^2 = 9$

6 a) $\frac{8192^{30}}{4096^{30}} = \left(\frac{8192}{4096}\right)^{30} = \left(\frac{2}{1}\right)^{30} = 2^{30} = 1\,073\,741\,824$
b) $\frac{738\,738^{20}}{246\,246^{20}} = \left(\frac{738\,738}{246\,246}\right)^{20} = 3^{20} = 3\,486\,784\,401$
c) $\frac{617\,283\,945^{13}}{123\,456\,789^{13}} = \left(\frac{617\,283\,945}{123\,456\,789}\right)^{13} = 5^{13}$
$= 1\,220\,703\,125$
d) $\frac{123^4}{6150^4} = \left(\frac{123}{6150}\right)^4 = \left(\frac{1}{50}\right)^4 = \frac{1}{50^4} = \frac{1}{6\,250\,000}$

7 a) $3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 = 60^3$

b) $18^5 : (4{,}5^5 : 0{,}75^5) = 3^5$

Begründung: Es gilt:

$18^5 : (4{,}5^5 : 0{,}75^5) = 18^5 : 6^5 = 3^5$

c) $(18^{-3} : 9^{-3}) \cdot 0{,}5^{-3} = 1^{-3}$

Begründung: Es gilt:

$(18^{-3} : 9^{-3}) \cdot 0{,}5^{-3} = 2^{-3} \cdot 0{,}5^{-3} = 1^{-3}$

d) $(14^4 : 21^4) \cdot 45^4 = 30^4$

Begründung: Es gilt:

$(14^4 : 21^4) \cdot 45^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 45^4 = \left(\frac{2}{3} \cdot 45\right)^4 = 30^4$

8 a) $2^{m+1} \cdot 3^{m+1} = 6^{m+1}$

b) $a^{2m} \cdot b^{2m} = (a \cdot b)^{2m}$

c) $a^3 \cdot (a+1)^3 = (a(a+1))^3 = (a^2 + a)^3$

d) $(x+1)^2 \cdot (x-1)^2 = ((x+1)(x-1))^2 = (x^2 - 1)^2$

(letzter Schritt mit der 3. binomischen Formel)

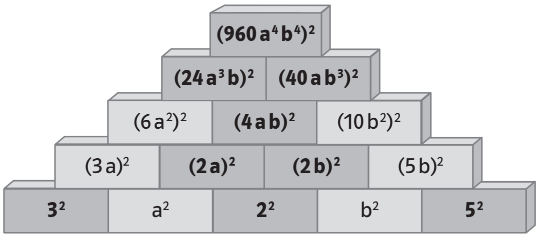
e) $\frac{(2x+6)^2}{(x+3)^2} = \left(\frac{2x+6}{x+3}\right)^2 = \left(\frac{2(x+3)}{x+3}\right)^2 = 2^2 = 4$

(Kürzen mit $x + 3$, wenn $x \neq -3$)

f) $\frac{(5x-10)^2}{(x-2)^2} = \left(\frac{5x-10}{x-2}\right)^2 = \left(\frac{5(x-2)}{x-2}\right)^2 = 5^2 = 25$

(Kürzen mit $x - 2$, wenn $x \neq 2$)

9



Seite 45

Einstieg

→ Energie von der Sonne:
4 Quadrillionen Ws
= 4000 Trilliarden Ws
= 4 000 000 Trillionen Ws
= 4 000 000 000 000 000 000 000 000 Ws
Verbrauch Pflanzen:
3 Trilliarden Ws
= 3000 Trillionen Ws
= 3 000 000 000 000 000 000 000 Ws
Verbrauch Menschen:
500 Trillionen Ws
= 500 000 000 000 000 000 000 Ws
Energievergleiche:
$\frac{\text{Energie Sonne}}{\text{Verbrauch Pflanzen}} = \frac{4\,000\,000 \text{ Trillionen}}{3000 \text{ Trillionen}} \approx 1333{,}3$
$\frac{\text{Energie Sonne}}{\text{Verbrauch Menschen}} = \frac{4\,000\,000 \text{ Trillionen}}{500 \text{ Trillionen}} = 8000$
Die Sonne liefert ca. 1330-mal mehr Energie als die Pflanzen verbrauchen und 8000-mal mehr Energie als der Mensch verbraucht.
→ Die nicht verbrauchte Energie wird von der Erde wieder abgestrahlt und verteilt sich im All.

1 a) $123\,456 = 1{,}234\,56 \cdot 10^5$
b) $123{,}456 = 1{,}234\,56 \cdot 10^2$
c) $6783{,}126 = 6{,}783\,126 \cdot 10^3$
d) $975\,318\,642 = 9{,}753\,186\,42 \cdot 10^8$
e) $0{,}000\,123 = 1{,}23 \cdot 10^{-4}$
f) $0{,}001\,111 = 1{,}111 \cdot 10^{-3}$
g) $0{,}019\,05 = 1{,}905 \cdot 10^{-2}$
h) $0{,}000\,000\,001 = 1 \cdot 10^{-9}$

2 a) $53\,084 = 5{,}308\,4 \cdot 10^4$; damit gilt:
$10^4 < 53\,084 < 10^5$
b) $1\,234\,567{,}8 = 1{,}234\,567\,8 \cdot 10^6$; damit erhält man: $10^6 < 1\,234\,567{,}8 < 10^7$
c) $0{,}005\,24 = 5{,}24 \cdot 10^{-3}$; damit gilt:
$10^{-3} < 0{,}005\,24 < 10^{-2}$
d) $0{,}000\,009 = 9 \cdot 10^{-6}$; damit gilt:
$10^{-6} < 0{,}000\,009 < 10^{-5}$

3 a) $456 \cdot 10^3 = 456\,000$
b) $65{,}4 \cdot 10^3 = 65\,400$
c) $4{,}567\,89 \cdot 10^4 = 45\,678{,}9$
d) $0{,}007\,531 \cdot 10^2 = 7{,}531 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2$
$= 7{,}531 \cdot 10^{-1} = 0{,}7531$
e) $512 \cdot 10^{-3} = 0{,}512$
f) $128{,}5 \cdot 10^{-5} = 1{,}285 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5} = 1{,}285 \cdot 10^{-3}$
$= 0{,}001\,285$
g) $0{,}19 \cdot 10^{-2} = 1{,}9 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-2} = 1{,}9 \cdot 10^{-3}$
$= 0{,}0019$
h) $0{,}0753 \cdot 10^{-3} = 7{,}53 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} = 7{,}53 \cdot 10^{-5}$
$= 0{,}000\,0753$

Seite 46

A a) $5679 = 5{,}679 \cdot 10^3$
b) $445{,}889 = 4{,}458\,89 \cdot 10^2$
c) $0{,}78 = 7{,}8 \cdot 10^{-1}$
d) $0{,}000\,51 = 5{,}1 \cdot 10^{-4}$

B a) $7{,}95 \cdot 10^3 = 7950$
b) $89{,}53 \cdot 10^{-3} = 0{,}089\,53$
c) $0{,}000\,67 \cdot 10^2 = 0{,}067$
d) $0{,}872 \cdot 10^{-3} = 0{,}000\,872$

Seite 46, links

4 $12{,}34 \cdot 10^1 = 123{,}4 = 1{,}234 \cdot 10^2$
$0{,}1234 \cdot 10^4 = 1234 = 1{,}234 \cdot 10^3$
$0{,}012\,34 \cdot 10^6 = 1{,}234 \cdot 10^{-2} \cdot 10^6 = 1{,}234 \cdot 10^4$
$0{,}001\,234 \cdot 10^8 = 1{,}234 \cdot 10^{-3} \cdot 10^8 = 1{,}234 \cdot 10^5$
Sortieren der Zahlen in der Kette:
$10^2 < 12{,}34 \cdot 10^1 < 10^3 < 0{,}1234 \cdot 10^4 < 10^4$
$< 0{,}012\,34 \cdot 10^6 < 10^5 < 0{,}001\,234 \cdot 10^8 < 10^6$

5 a) $0{,}025\,m$
$= 25 \cdot 10^{-3}\,m$
$= 25\,mm$
b) $0{,}0006\,g$
$= 600 \cdot 10^{-6}\,g$
$= 600\,\mu g$
c) $0{,}000\,004\,g$
$= 4 \cdot 10^{-6}\,g$
$= 4\,\mu g$
d) $0{,}000\,000\,015\,m$
$= 15 \cdot 10^{-9}\,m$
$= 15\,nm$

6 a) $10\,\mu m = 10 \cdot 10^{-6}\,m = 10^{-5}\,m$
$0{,}1\,\mu m = 0{,}1 \cdot 10^{-6}\,m = 10^{-7}\,m$
b) Individuelle Lösungen
Andere Verursacher von Feinstaub sind z.B. Industrieanlagen, Kleinfeuerungsanlagen, landwirtschaftliche Anlagen und anderer Verkehr außer dem Straßenverkehr, also Schienen-, Flug- und Schiffsverkehr.
Feinstaub wirkt negativ auf die Atemwege (verstärkt Allergien und asthmatische Anfälle, erhöht das Risiko von Atemwegsbeschwerden und Lungenkrebs) und verstärkt bzw. verursacht Herz-Kreislauf-Erkrankungen.

7 a) Anzahl der Bakterien
zu Beginn: $100 \cdot 1 = 10^2$
nach 1 Stunde: $100 \cdot 2^1 = 2 \cdot 10^2$
nach 2 Stunden: $100 \cdot 2^2 = 4 \cdot 10^2$
nach 3 Stunden: $100 \cdot 2^3 = 8 \cdot 10^2$
nach 4 Stunden: $100 \cdot 2^4 = 1{,}6 \cdot 10^3$
nach 5 Stunden: $100 \cdot 2^5 = 3{,}2 \cdot 10^3$
nach 6 Stunden: $100 \cdot 2^6 = 6{,}4 \cdot 10^3$
nach 7 Stunden: $100 \cdot 2^7 = 1{,}28 \cdot 10^4$
nach 8 Stunden: $100 \cdot 2^8 = 2{,}56 \cdot 10^4$
nach 9 Stunden: $100 \cdot 2^9 = 5{,}12 \cdot 10^4$
nach 10 Stunden: $100 \cdot 2^{10} = 1{,}024 \cdot 10^5$
nach 11 Stunden: $100 \cdot 2^{11} = 2{,}048 \cdot 10^5$
nach 12 Stunden: $100 \cdot 2^{12} = 4{,}096 \cdot 10^5$
b) Ein Bakterium hat im Bild einen Durchmesser von ca. 1 cm. In Wirklichkeit beträgt der Durchmesser also ca.
$(1\,cm) : 10\,000 = 1 \cdot 10^{-4}\,cm = 100\,\mu m$
c) Bakterien benötigen u.a. Nährstoffe, um sich zu vermehren. Mit zunehmender Bakterienzahl wird die Nahrung knapp. Die Bakterien vermehren sich immer langsamer und schließlich gar nicht mehr.

Seite 46, rechts

4 a) $(3^4)^5 = 3^{20} = 3\,486\,784\,401$
$(4^5)^3 = 4^{15} = 1\,073\,741\,824$
$(5^3)^4 = 5^{12} = 244\,140\,625$
Die Potenz $(3^4)^5 = 3^{20}$ ist am größten.
b) Man findet mithilfe des Taschenrechners
$(4^5)^6 > (5^6)^4 > (6^4)^5$ und $(5^6)^7 > (6^7)^5 > (7^5)^6$
Man kann vermuten: Der Potenzwert ist am größten, wenn die kleinste der drei aufeinanderfolgenden Zahlen als Basis genommen wird.

5 a) $1\,nm = 10^{-9}\,m$
$85\,nm = 85 \cdot 10^{-9}\,m$
(1) $85\,nm = 8{,}5 \cdot 10^{-8}\,m$
(2) $85\,nm = 0{,}000\,000\,085\,m$
b) Mögliche Schätzung:
Auf einem weißen Pfeil von 2 nm Länge liegen ca. 80 Moleküle.
Die Molekülmittelpunkte haben also einen durchschnittlichen Abstand von rund
$\frac{2}{80}\,nm = 0{,}025\,nm = 25\,pm$.

6 a) $97\,531\,kg = 97{,}531 \cdot 10^3\,kg = 97{,}531\,t$
b) $0{,}0033\,g = 3{,}3 \cdot 10^{-3}\,g = 3{,}3\,mg$
c) $250\,000\,kWh = 250 \cdot 10^3\,kWh = 250\,MWh$
d) $12\,500\,Hz = 12{,}5 \cdot 10^3\,Hz = 12{,}5\,KHz$

7 Windenergie:
$0{,}700\,TWh = 700 \cdot 10^{-3}\,TWh = 700\,GWh$
Solarenergie:
$0{,}030\,TWh = 30 \cdot 10^{-3}\,TWh = 30\,GWh$
Energie aus konventionellen Kraftwerken:
$0{,}490\,TWh = 490 \cdot 10^{-3}\,TWh = 490\,GWh$

Seite 47

Einstieg

→ In der oberen Reihe wird der Exponent der Potenz in jedem Schritt halbiert.
→ Die Operation für den Exponenten lautet jeweils: Division durch 2 (vgl. Skizze).

$$2^8 \xrightarrow{:2} 2^4 \xrightarrow{:2} 2^2 \xrightarrow{:2} 2^1 \xrightarrow{:2} 2^{\frac{1}{2}}$$

$$256 \xrightarrow{\sqrt{\ }} 16 \xrightarrow{\sqrt{\ }} 4 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \mathbf{2} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{\mathbf{2}}$$

1 a) $\sqrt[2]{8} = 8^{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}$ c) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[2]{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}$ e) $6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}$ f) $5^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{5^3}$

g) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$ h) $12^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{12^3}$

2 a) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

b) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$

c) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3$

d) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{3^6} = 3^{\frac{6}{3}} = 3^2 = 9$

e) $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5^{\frac{3}{3}} = 5$

f) $125^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$

g) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2^{\frac{4}{4}} = 2$

h) $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{4}} = 2^3 = 8$

Seite 48

3 a) $3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$
b) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^2 = 4$
c) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^2 = 4$
d) $9^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = (3^2)^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$
e) $(9^4)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{4}{2}} = 9^2 = 81$
f) $(8^2)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = (4^3)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{3}{3}} = 4$

4 $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}59$
$6^{\frac{3}{2}} = \sqrt{6^3} = \sqrt{216} \approx 14{,}70$
$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$
$6^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{6^4} = \sqrt[3]{1296} \approx 10{,}90$
$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25} \approx 2{,}92$
$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \approx 1{,}71$
$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} \approx 2{,}52$
$5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3} = \sqrt{125} \approx 11{,}18$

A a) $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ oder auch $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{10}$
b) $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$ c) $7^{\frac{3}{2}} = \sqrt{7^3}$
d) $\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$ e) $\sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}$ f) $\sqrt[2]{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$

B a) $\sqrt[2]{121} = 11$ b) $64^{\frac{1}{3}} = 4$ c) $\sqrt[3]{8} = 2$
d) $100^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{100}\right)^3 = 10^3 = 1000$

C a) $10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 10^1 = 10$
b) $6^{\frac{4}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}} = 6^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} = 6^2 = 36$
c) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5 \cdot 25} = \sqrt[3]{125} = 5$
d) $\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{32 \cdot 16} = \sqrt[3]{512} = 8$
alternativer Lösungsweg:
$\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{32 \cdot 16} = \sqrt[3]{64 \cdot 8} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{8}$
$= 4 \cdot 2 = 8$

Seite 48, links

5 a) $4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4$ b) $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5$
c) $10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{3}{2}} = 10^2 = 100$ d) $6^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{4}{3}} = 6^2 = 36$
e) $25^1 \cdot 25^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25}^3 = 5^3 = 125$
f) $8^{\frac{1}{6}} \cdot 8^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$ g) $(3^{\frac{1}{2}})^4 = 3^2 = 9$
h) $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64}$ i) $(5^4)^{\frac{1}{2}} = 5^2 = 25$

6 a) $4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4^1$ b) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^2$
c) $5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^2$ d) $10^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{\frac{5}{3}} = 10^2$
e) $6^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{3}{2}} = 36\ (= 6^2)$ f) $9^{\frac{3}{2}} \cdot 9^{\frac{3}{2}} = 729\ (= 9^3)$

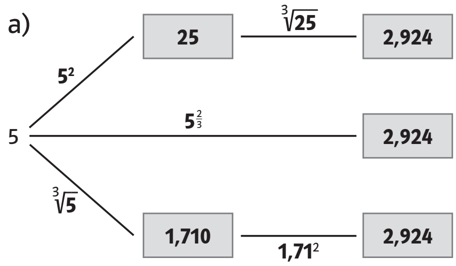
7 a) und b)

	Berlin	Stuttgart	Ziergras
Höhe h	250 m	167 m	500 cm
Basisdicke d	16,5 m	12,2 m	4,5 cm
h : d	15,2	13,7	111,1
$h^{\frac{2}{3}}$: d	2,4	2,5	14,0

Bei den beiden Fernsehtürmen liegen die Verhältnisse h : d nah beieinander; die Verhältnisse $h^{\frac{2}{3}}$: d sind sogar annähernd gleich. Beim Ziergras ist das Verhältnis h : d etwa 8-mal so groß wie bei den Fernsehtürmen; das Verhältnis $h^{\frac{2}{3}}$: d ist etwa 7-mal so groß und hat etwa den gleichen Wert wie das Verhältnis h : d bei den Fernsehtürmen.

Seite 48, rechts

5 a)



b) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 = 7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2} \approx 3{,}659$
c) $9^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{9^3} = \left(\sqrt[4]{9}\right)^3 \approx 5{,}196$
d) $\sqrt[10]{4^5} = \left(\sqrt[10]{4}\right)^5 = 4^{\frac{5}{10}} = 2$
e) $\left(\sqrt[8]{1296}\right)^2 = 1296^{\frac{2}{8}} = \sqrt[8]{1296^2} = 6$
f) $125^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{125^5} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^5 \approx 3125$
Die Ergebnisse in den Teilaufgaben d), e) und f) können genau angegeben werden.

6 a) $6^{\frac{3}{2}} \cdot 6^{-\frac{1}{2}} = 6^1$ b) $8^{\frac{7}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} = 8^2$
c) $(7^2)^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{2}{3}}$ d) $(9^{\frac{1}{3}})^3 = 1$
e) $3^{\frac{7}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} = 27\ (= 3^3)$ f) $(5^3)^{\frac{4}{3}} = 625\ (= 5^4)$

7 a) Individuelle Lösungen, z. B.
- für a = 5 cm:
  $V = 5^3 = 125$; $O = 6 \cdot 5^2 = 150$
  $\frac{O}{V} = \frac{150}{125} = 1{,}2$; $\frac{O^{\frac{3}{2}}}{V} = \frac{150^{\frac{3}{2}}}{125} \approx 14{,}70$
- für a = 2 cm:
  $V = 2^3 = 8$; $O = 6 \cdot 2^2 = 24$
  $\frac{O}{V} = \frac{24}{8} = 3$; $\frac{O^{\frac{3}{2}}}{V} = \frac{24^{\frac{3}{2}}}{8} \approx 14{,}70$

b) a: Kantenlänge des Würfels
Es gilt: $O = 6 \cdot a^2$ und $V = a^3$.
Man erhält: $\frac{O}{V} = \frac{6 \cdot a^2}{a^3} = \frac{6}{a}$ und
$\frac{O^{\frac{3}{2}}}{V} = \frac{(6 \cdot a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3} = \frac{6^{\frac{3}{2}} \cdot (a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3} = \frac{\sqrt{6^3} \cdot a^3}{a^3} = \sqrt{6^3} \approx 14{,}70$

c) Aus den allgemeinen Berechnungen in Teilaufgabe b) stellt man fest:
- Der Quotient $\frac{O}{V}$ ist abhängig von a; damit ändert er sich, wenn sich die Seitenlänge a des

Würfels ändert. Je größer der Wert von a ist, desto kleiner ist der Quotient.

- Der Quotient $\frac{O^{\frac{3}{2}}}{V}$ ist unabhängig von a; er ist immer gleich der Zahl $\sqrt{6^3} \approx 14{,}70$ (vgl. dazu auch Teilaufgabe a)).

Seite 50

1 a) $2^{-4} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$ b) $5^{-4} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$

c) $6^{-3} = \frac{1}{6 \cdot 6 \cdot 6}$ d) $2^{-6} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$

e) $0{,}5^{-3} = \frac{1}{0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}$ f) $3^{-5} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$

2 a) $2^5 \cdot 2^3 = 2^8$ b) $3^4 \cdot 3^{10} = 3^{14}$
c) $6^5 \cdot 6^{-3} = 6^2$ d) $5^{-4} \cdot 5^6 = 5^2$
e) $8^5 \cdot 8^{-7} = 8^{-2}$ f) $12^5 \cdot 12^{-5} = 12^0 = 1$
g) $10^8 \cdot 10^{-7} = 10^1 = 10$ h) $9^2 \cdot 9^{-1} = 9^1 = 9$

3 a) $\frac{5^6}{5^4} = 5^2$ b) $\frac{3^4}{3^9} = 3^{-5}$

c) $\frac{3^{12}}{3^{10}} = 3^2$ d) $\frac{7^5}{7^6} = 7^{-1}$

e) $\frac{8^6}{8^5} = 8^1 = 8$ f) $\frac{2^{20}}{2^{10}} = 2^{10}$

4 a) $(4^5)^3 = 4^{15}$ b) $(6^2)^{-3} = 6^{-6}$
c) $(3^2)^6 = 3^{12}$ d) $(2^{-3})^5 = 2^{-15}$
e) $(4^4)^4 = 4^{16}$ f) $(5^5)^5 = 5^{25}$
g) $(10^9)^{-8} = 10^{-72}$ h) $(4^{-3})^{-2} = 4^6$
i) $(1^4)^5 = 1^{20} = 1$

5 a) $2^4 \cdot 3^4 = 6^4$ b) $3^2 \cdot 7^2 = 21^2$
c) $5^5 \cdot 6^5 = 30^5$ d) $2^5 \cdot 4^5 = 8^5$
e) $10^6 \cdot 5^6 = 50^6$ f) $5^{10} \cdot 20^{10} = 100^{10}$
g) $2^{-3} \cdot 4^{-3} = 8^{-3}$ h) $5^{-3} \cdot 4^{-3} = 20^{-3}$
i) $5^{-4} \cdot 8^{-4} = 40^{-4}$

6 a) $5^6 \cdot 5^3 \cdot 5^2 = 5^{6+3+2} = 5^{11}$
b) $10^4 \cdot 10^7 \cdot 10^9 = 10^{4+7+9} = 10^{20}$
c) $2^8 \cdot 2^4 \cdot 2^{-5} = 2^{8+4+(-5)} = 2^7$
d) $6^3 \cdot 6^3 \cdot 6^{-8} = 6^{3+3+(-8)} = 6^{-2}$
e) $4^{-3} \cdot 4^2 \cdot 4^8 = 4^{-3+2+8} = 4^7$
f) $3^3 \cdot 3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^{-11} = 3^{3+4+5-11} = 3^1 = 3$
g) $7^{-4} \cdot 7^5 \cdot 7^1 = 7^{-4+5+1} = 7^2$
h) $8^4 \cdot 8^{-9} \cdot 8^5 = 8^{4+(-9)+5} = 8^0 = 1$

7 a) $(3^2 \cdot 3^8) : 3^7 = 3^{2+8} : 3^7$
$= 3^{10} : 3^7 = 3^{10-7} = 3^3 = 27$
b) $(10^4 \cdot 10^{-2}) : 5^2 = 10^{4-2} : 5^2$
$= 10^2 : 5^2 = (10 : 5)^2 = 2^2 = 4$
c) $(10^5 \cdot 10^2) : 2^7 = 10^{5+2} : 2^7$
$= 10^7 : 2^7 = (10 : 2)^7 = 5^7 = 78\,125$
d) $9^2 \cdot (3^6 : 3^2)$
$= 9^2 \cdot 3^{6-2} = (3^2)^2 \cdot 3^4$
$= 3^4 \cdot 3^4 = 3^{4+4} = 3^8$
e) $5^2 \cdot 2^4 + 5^2 \cdot 2^2 = 5^2 \cdot (2^2)^2 + 5^2 \cdot 2^2$
$= 5^2 \cdot 4^2 + 5^2 \cdot 2^2 = (5 \cdot 4)^2 + (5 \cdot 2)^2$
$= 20^2 + 10^2 = 400 + 100 = 500$
f) $5^4 \cdot 5^8 - 25^6 = 5^{4+8} - (5^2)^6$
$= 5^{12} - 5^{12} = 0$
g) $(10^3 \cdot 0{,}1) : 5^2 = (10^3 \cdot 10^{-1}) : 5^2$
$= 10^{3-1} : 5^2 = 10^2 : 5^2 = (10 : 5)^2 = 2^2 = 4$
h) $0{,}2^2 \cdot 5^2 = (0{,}2 \cdot 5)^2 = 1^2 = 1$

8 Zusammen gehören die Kärtchen:
$10^{-3} = 0{,}001 \; \left(\text{da } 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}\right)$
$5^{-3} = 0{,}008 \; \left(\text{da } 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}\right)$
$20^{-3} = 0{,}000\,125 \; \left(\text{da } 20^{-3} = \frac{1}{20^3} = \frac{1}{8000}\right)$
$50^{-2} = 0{,}0004 \; \left(\text{da } 50^{-2} = \frac{1}{50^2} = \frac{1}{2500}\right)$
$25^{-2} = 0{,}0016 \; \left(\text{da } 25^{-2} = \frac{1}{25^2} = \frac{1}{625}\right)$

9 a) $7^{-3} \approx 0{,}0029$ b) $8^{-2} \approx 0{,}0156$
c) $1{,}5^{-4} \approx 0{,}1975$ d) $3{,}5^{-3} \approx 0{,}0233$
e) $2{,}2^{-4} \approx 0{,}0427$ f) $1{,}23^{-4} \approx 0{,}4369$

10 a) $4^8 \cdot 5^{-6} \approx 4{,}1943$
b) $7^{-5} \cdot 6^8 \approx 99{,}9355$
c) $1{,}5^4 \cdot 2{,}4^{-3} \approx 0{,}3662$
d) $(5{,}1^{-3} + 7{,}4^{-3}) : 5^{-4} \approx 6{,}2540$
e) $6^{-2} - 5^{-2} \cdot 4^{-2}$
$= 6^{-2} - (5 \cdot 4)^{-2} = 6^{-2} - 20^{-2} \approx 0{,}0253$
f) $3{,}2^4 \cdot 8{,}5^{-1} + 4{,}6^{-3} \approx 12{,}3465$
Tipp: Hier muss man überall mit dem Taschenrechner arbeiten, da man die Potenzrechengesetze nicht anwenden kann. Es gibt hier nämlich weder Potenzen mit gleicher Basis noch Potenzen mit gleichem Exponenten. Nur in Teilaufgabe e) kann an einer Stelle ein Potenzrechengesetz angewendet werden.

11 Mögliche Lösungen:
a) $10^8 = 10^2 \cdot 10^6$; $10^8 = 10^4 \cdot 10^4$
b) $6^4 = 6^2 \cdot 6^2$; $6^4 = 6^3 \cdot 6^1$
c) $15^2 = 15^1 \cdot 15^1$; $15^2 = 5^2 \cdot 3^2$
d) $14^2 = 14^1 \cdot 14^1$; $14^2 = 7^2 \cdot 2^2$
e) $22^5 = 22^3 \cdot 22^2$; $22^5 = 11^5 \cdot 2^5$
f) $25^5 = 25^4 \cdot 25^1$; $25^5 = 5^5 \cdot 5^5$
g) $21^{-3} = 21^{-1} \cdot 21^{-2}$; $21^{-3} = 3^{-3} \cdot 7^{-3}$
h) $26^{-2} = 26^{-1} \cdot 26^{-1}$; $26^{-2} = 2^{-2} \cdot 13^{-2}$
i) $27^{-4} = 27^{-2} \cdot 27^{-2}$; $27^{-4} = 3^{-4} \cdot 9^{-4}$

12 a) $3^{12} = 531\,441$; $3^{-12} = \frac{1}{531\,441} \approx 1{,}88 \cdot 10^{-6}$
$3^{12} + 3^{-12} = 531\,441$
b) $5^8 = 390\,625$; $5^{-8} = \frac{1}{390625} = 2{,}56 \cdot 10^{-6}$
$5^8 - 5^{-8} = 390\,625$
c) $100^5 = 10^{10} = 10\,000\,000\,000$;
$100^{-5} = 10^{-10} = \frac{1}{10\,000\,000\,000}$
$100^5 + 100^{-5} = 10^{10} = 10\,000\,000\,000$
Es fällt auf, dass die Ergebnisse der Addition bzw. der Subtraktion gleich dem ersten Summanden sind.
Erklärung: Die Berechnungen werden mit dem Taschenrechner durchgeführt. Der zweite Sum-

mand ist jeweils im Vergleich zum ersten so klein, dass er bei der Addition (bzw. Subtraktion) überhaupt nicht mehr berücksichtigt wird. Der Taschenrechner kann das Ergebnis nicht mit voller Stellenzahl anzeigen. Daher gilt scheinbar $3^{12} + 3^{-12} = 3^{12}$ usw.

13 a) $(2^2)^3 = 2^6$ b) $(3^2)^2 = 81$
c) $(4^2)^2 = 4 \cdot 4^3$
d) $2^8 \cdot 2^{-3} = 32$ (da $32 = 2^5$)
e) $5^7 \cdot 5^{-9} = 5^{-2}$ f) $6^{-4} \cdot 6^4 = 1$ $(6^0 = 1)$
g) $3^8 : 3^6 = 3^2$ h) $7^5 : 7^9 = 7^{-4}$
i) $\frac{4^7}{4^2} = 4^5$ j) $\frac{9^8}{9^5} = 9^3$

14 a) $5^4 = \mathbf{25}^2$ (denn $5^4 = (5^2)^2 = 25^2$)
b) $4^5 = \mathbf{2}^{10}$ (denn $4^5 = (2^2)^5 = 2^{2 \cdot 5}$)
c) $\mathbf{8}^3 = 2^9$ (denn $2^9 = 2^{3 \cdot 3} = (2^3)^3 = 8^3$)
d) $125^2 = \mathbf{5}^6$ (denn $125^2 = (5^3)^2 = 5^6$)
e) $10^{12} = \mathbf{1000}^4$ (denn $10^{12} = 10^{3 \cdot 4} = (10^3)^4$)
f) $\mathbf{7}^8 = 49^4$ (denn $49^4 = (7^2)^4 = 7^8$)
g) $\mathbf{32}^1 = 2^5$ (denn $2^5 = 32 = 32^1$)
h) $2^{12} = \mathbf{64}^2$ (denn $2^{12} = 2^{6 \cdot 2} = (2^6)^2 = 64^2$)

15 a) $574\,836 = 5{,}748\,36 \cdot 10^5$
b) $0{,}000\,333 = 3{,}33 \cdot 10^{-4}$
c) $1\,000\,000 = 10^6$
d) $0{,}000\,000\,1 = 10^{-7}$

16 a) $58 \cdot 10^3 = 5{,}8 \cdot 10 \cdot 10^3 = 5{,}8 \cdot 10^4$
b) $0{,}067 \cdot 10^4 = 6{,}7 \cdot 10^{-2} \cdot 10^4 = 6{,}7 \cdot 10^2$
c) $123 \cdot 10^{-6} = 1{,}23 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} = 1{,}23 \cdot 10^{-4}$
d) $0{,}012 \cdot 10^{-4} = 1{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4} = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$

Seite 51

17 a) $2^3 \cdot 5^3 + 2^2 \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^3 + (2 \cdot 5)^2$
$= 10^3 + 10^2 = 1100$
b) $5^3 \cdot 4^3 \cdot 3^3 \cdot 2^3 \cdot 30^{-3} = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)^3 \cdot 30^{-3}$
$= 120^3 \cdot 30^{-3} = \frac{120^3}{30^3} = \left(\frac{120}{30}\right)^3 = 4^3 = 64$
c) $\frac{4^4}{2^4} + \frac{9^2 \cdot 2^2}{6^2} = \left(\frac{4}{2}\right)^4 + \left(\frac{9 \cdot 2}{6}\right)^2$
$= 2^4 + \left(\frac{18}{6}\right)^2 = 2^4 + 3^2 = 16 + 9 = 25$
d) $\frac{8^4 \cdot 3^4}{6^4} - (2^2)^4 = \left(\frac{8 \cdot 3}{6}\right)^4 - 2^8$
$= 4^4 - 2^8 = (2^2)^4 - 2^8 = 2^8 - 2^8 = 0$
e) $(2^2)^3 - 4^5 \cdot 2^{-8} = 2^6 - (2^2)^5 \cdot 2^{-8}$
$= 2^6 - 2^{10} \cdot 2^{-8} = 2^6 - 2^2 = 64 - 4 = 60$
f) $9^2 \cdot 3^{-4} + 3^6 \cdot 9^{-2} = (3^2)^2 \cdot 3^{-4} + 3^6 \cdot (3^2)^{-2}$
$= 3^4 \cdot 3^{-4} + 3^6 \cdot 3^{-4} = 3^0 + 3^2 = 1 + 9 = 10$
g) $\frac{(2^6)^2}{2^6} \cdot \frac{5^4}{25} = \frac{2^{12}}{2^6} \cdot \frac{5^4}{5^2} = 2^6 \cdot 5^2 = 64 \cdot 25 = 1600$
h) $\frac{4^4 \cdot 7^4}{14^4} + \frac{(3^8)^2}{9^7} = \left(\frac{4 \cdot 7}{14}\right)^4 + \frac{3^{16}}{(3^2)^7}$
$= \left(\frac{28}{14}\right)^4 + \frac{3^{16}}{3^{14}} = 2^4 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

18 Spiel; individuelle Lösungen

19 a) $10^6 \cdot 0{,}001 : 2^3$
$= 10^6 \cdot 10^{-3} : 2^3$
$= 10^3 : 2^3$
$= (10 : 2)^3 = 5^3 = 125$
b) $20^2 \cdot 0{,}05^2 : 5^2$
$= (20 \cdot 0{,}05)^2 : 5^2$
$= 1^2 : 5^2$
$= 1 : 25 = 0{,}04$
c) $(0{,}6 \cdot 0{,}5)^3 \cdot 1000$
$= 0{,}3^3 \cdot 10^3$
$= (0{,}3 \cdot 10)^3 = 3^3 = 27$
d) $0{,}5^3 \cdot 20^3 \cdot 5^{-3}$
$= (0{,}5 \cdot 20)^3 \cdot 5^{-3}$
$= \frac{10^3}{5^3} = \left(\frac{10}{5}\right)^3$
$= 2^3 = 8$

20 a) $a^n \cdot a^{2n} = a^{3n}$ b) $a^n \cdot a^{n+2} = a^{2n+2}$
c) $x^m \cdot x^{1-m} = x^1 = x$ d) $x^{m+1} \cdot x^{m-1} = x^{2m}$
e) $b \cdot b^n = b^{n+1}$ f) $b^{2n-2} \cdot b^{3n-3} = b^{5n-5}$
g) $y^n : y^5 = y^{n-5}$
h) $y^3 : y^{3-m} = y^{3-(3-m)} = y^m$
i) $\frac{c^{2n}}{c^n} = c^n$
j) $\frac{c^{m+3}}{c^{2m+3}} = c^{-m} = \frac{1}{c^m}$
k) $(a^2)^m \cdot (a^m)^2 = a^{2m} \cdot a^{2m} = a^{4m}$
l) $(x^2)^6 + (x^3)^4 = x^{12} + x^{12} = 2 \cdot x^{12}$

21 a) $a^{-3} \cdot a^{-4} \cdot a^{-5} = a^{-12}$
b) $x^{-4} \cdot x^6 : x^6 = x^{-4}$
c) $a^5 \cdot a^6 \cdot a^{-10} = a^1 = a$
d) $x^4 : x^3 : x^2 = x^1 : x^2 = x^{-1}$
e) $(3a)^4 \cdot (3a)^2 = (3a)^6 = 729a^6$
f) $2^5 \cdot x^3 \cdot (2x)^4 = 2^5 \cdot x^3 \cdot 2^4 \cdot x^4 = 2^9 \cdot x^7 = 512x^7$
g) $(5b)^4 : (5b)^3 = (5b)^1 = 5b$
h) $4^3 \cdot (4x)^2 : (4x) = 4^5 \cdot x^2 : (4x) = 4^4 \cdot x = 256x$
i) $(5^2 \cdot a^2)^3 = (5^2)^3 \cdot (a^2)^3 = 5^6 \cdot a^6 = 15\,625a^6$
j) $(2a^4)^2 = 2^2 \cdot a^{4 \cdot 2} = 4a^8$

22 a) $a^4 \cdot x^3 \cdot a^2 \cdot x^5 = a^6 \cdot x^8$
b) $b^3 \cdot y^2 \cdot b^{-2} \cdot y^1 = b \cdot y^3$
c) $c^6 \cdot x^4 \cdot c^{-2} : x = c^4 \cdot x^3$
d) $x^2 \cdot y \cdot x^{-2} \cdot y^{-1} = x^0 \cdot y^0 = 1$
e) $y^4 \cdot x : y^5 : x^2 = y^{-1} \cdot x : x^2 = y^{-1} \cdot x^{-1}$
f) $a^6 \cdot b^3 \cdot a^{-8} \cdot b^{-5} = a^{-2} \cdot b^{-2}$
g) $\frac{x^4 \cdot y^2}{x \cdot y} = x^3 \cdot y$
h) $\frac{c^2 \cdot d^5}{c^5 \cdot d^2} = c^{-3} \cdot d^3$

23 a) $2^2 = 4$; $(-2)^2 = 4$; $-2^2 = -4$; $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$;
$(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$; $-2^{-2} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$
b) $2^3 = 8$; $(-2)^3 = -8$; $-2^3 = -8$; $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$;
$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$; $-(2^{-3}) = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}$
c) $10^2 = 100$; $(-10)^2 = 100$; $-10^2 = -100$;
$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$; $(-10)^{-2} = \frac{1}{(-10)^2} = \frac{1}{100}$;
$-10^{-2} = -\frac{1}{10^2} = -\frac{1}{100}$
d) $10^3 = 1000$; $(-10)^3 = -1000$; $-10^3 = -1000$;
$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$; $(-10)^{-3} = \frac{1}{(-10)^3} = -\frac{1}{1000}$;
$-10^{-3} = -\frac{1}{10^3} = -\frac{1}{1000}$
Kontrolle: Das Produkt der 6 Werte ergibt immer 1.

24 a) (1)

$a^5 \cdot b^5$

$a^3 \cdot b^2 \quad a^2 \cdot b^3$

$a^2 \cdot b \quad a \cdot b \quad a \cdot b^2$

$a \cdot b \quad a \quad b \quad a \cdot b$

(2)

$a^{32} \cdot b^{32}$

$a^{20} \cdot b^{12} \quad a^{12} \cdot b^{20}$

$a^{12} \cdot b^4 \quad a^8 \cdot b^8 \quad a^4 \cdot b^{12}$

$a^7 \cdot b \quad a^5 \cdot b^3 \quad a^3 \cdot b^5 \quad a \cdot b^7$

$a^4 \quad a^3 \cdot b \quad a^2 \cdot b^2 \quad a \cdot b^3 \quad b^4$

(3)

1

$a^8 \quad a^{-8}$

$a^8 \quad 1 \quad a^{-8}$

$a^6 \quad a^2 \quad a^{-2} \quad a^{-6}$

$a^4 \quad a^2 \quad 1 \quad a^{-2} \quad a^{-4}$

b) Setzt man $a = 2$ und $b = 2^{-1}$ dann erhält man folgende Mauern:

(1)

1

$2 \quad 2^{-1}$

$2 \quad 1 \quad 2^{-1}$

$2 \cdot 2^{-1} \quad 2 \quad 2^{-1} \quad 2 \cdot 2^{-1}$

(2)

1

$2^8 \quad 2^{-8}$

$2^8 \quad 1 \quad 2^{-8}$

$2^6 \quad 2^2 \quad 2^{-2} \quad 2^{-6}$

$2^4 \quad 2^3 \cdot 2^{-1} \quad 2^2 \cdot 2^{-2} \quad 2 \cdot 2^{-3} \quad 2^{-4}$

(3)

1

$2^8 \quad 2^{-8}$

$2^8 \quad 1 \quad 2^{-8}$

$2^6 \quad 2^2 \quad 2^{-2} \quad 2^{-6}$

$2^4 \quad 2^2 \quad 1 \quad 2^{-2} \quad 2^{-4}$

Man stellt als Erstes fest, dass die Mauern (2) und (3) genau gleich aussehen. Vergleicht man alle drei Mauern mit der Mauer (3) aus Teilaufgabe a), dann stellt man fest, dass das Ergebnis im obersten Stein immer 1 beträgt.

Seite 52

25 a) $a^3 \cdot b^{-1} \cdot a^5 \cdot c = a^8 \cdot b^{-1} \cdot c^1$
b) $a^7 \cdot c^2 \cdot b^1 \cdot a^{-1} = a^6 \cdot b^1 \cdot c^2$
c) $\frac{a^9 \cdot b^4 \cdot c^2}{a^7 \cdot c \cdot b^3} = a^2 \cdot b^1 \cdot c^1$
d) $\frac{c \cdot a \cdot b}{a^4 \cdot b^4 \cdot c^4} = a^{-3} \cdot b^{-3} \cdot c^{-3}$
e) $\frac{a^{-2} \cdot b^7}{a^3 \cdot c^4 \cdot b^2} = a^{-5} \cdot b^5 \cdot c^{-4}$
f) $\frac{a^2 \cdot b^{-1} \cdot c^3}{a^{10} \cdot b^2} = a^{-8} \cdot b^{-3} \cdot c^3$
Kontrolle der Ergebnisse mithilfe des Gesamtprodukts:
$(a^8 \cdot b^{-1} \cdot c^1) \cdot (a^6 \cdot b^1 \cdot c^2) \cdot (a^2 \cdot b^1 \cdot c^1)$
$\cdot (a^{-3} \cdot b^{-3} \cdot c^{-3}) \cdot (a^{-5} \cdot b^5 \cdot c^{-4}) \cdot (a^{-8} \cdot b^{-3} \cdot c^3)$
$= a^0 \cdot b^0 \cdot c^0 = 1$

26 a) $(x^2 + x^3)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot x^3 + (x^3)^2$
$= x^4 + 2x^5 + x^6$
b) $(x^3 + x^{-2})^2 = (x^3)^2 + 2 \cdot x^3 \cdot x^{-2} + (x^{-2})^2$
$= x^6 + 2x + x^{-4}$
c) $(y^3 + y^{-3})^2 = (y^3)^2 + 2 \cdot y^3 \cdot y^{-3} + (y^{-3})^2$
$= y^6 + 2 + y^{-6}$
d) $(2y^2 + 3y)^2 = (2y^2)^2 + 2 \cdot 2y^2 \cdot 3y + (3y)^2$
$= 4y^4 + 12y^3 + 9y^2$
e) $(5a^4 + a^{-4})^2 = (5a^4)^2 + 2 \cdot 5a^4 \cdot a^{-4} + (a^{-4})^2$
$= 25a^8 + 10 + a^{-8}$
f) $(b + b^{-1})^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot b^{-1} + (b^{-1})^2$
$= b^2 + 2 + b^{-2}$

27 a) $2 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^2 = 6 \cdot 10^6$
b) $3 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^2 = 9 \cdot 10^7$
c) $4 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 8 \cdot 10^2$
d) $4 \cdot 10^2 \cdot 6 \cdot 10^3 = 24 \cdot 10^5 = 2{,}4 \cdot 10^6$
e) $9 \cdot 10^4 \cdot 9 \cdot 10^{-2} = 81 \cdot 10^2 = 8{,}1 \cdot 10^3$
f) $5 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 10 \cdot 10^{-1} = 1$

28 a) $(7^4)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{4}{2}} = 7^2 = 49$
b) $(8^{\frac{1}{3}})^4 = 8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 = 16$
c) $(25^{\frac{1}{5}})^{10} = 25^{\frac{10}{5}} = 25^2 = 625$
d) $(9^3)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$
e) $216^{\frac{2}{3}} = (6^3)^{\frac{2}{3}} = 6^2 = 36$
f) $27^{\frac{5}{3}} = (3^3)^{\frac{5}{3}} = 3^5 = 243$

29 a) $(a^4)^{\frac{1}{2}} = a^2$
b) $(x^{\frac{1}{2}})^4 = x^2$
c) $(a^6)^{\frac{1}{2}} = a^3$
d) $(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$
e) $(x^4)^{\frac{1}{4}} = x^1 = x$
f) $(x^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{x}$

30 a) Je nach Taschenrechnermodell erhält man ein anderes n, ab dem nicht weiter sinnvoll gerechnet werden kann; ab diesem Wert für n erhält man als Ergebnis 0.
Zum Beispiel:
$n = 5$: $(1 + 10^{-5}) - 1 = 10^{-5}$
$n = 6$: $(1 + 10^{-6}) - 1 = 10^{-6}$
$n = 7$: $(1 + 10^{-7}) - 1 = 10^{-7}$
$n = 8$: $(1 + 10^{-8}) - 1 = 10^{-8}$
$n = 9$: $(1 + 10^{-9}) - 1 = 10^{-9}$
$n = 10$: $(1 + 10^{-10}) - 1 = 10^{-10}$
$n = 11$: $(1 + 10^{-11}) - 1 = 0$
b) Erklärung:
Jeder Taschenrechner hat eine bestimmte Anzahl von Positionen, um Zahlen darzustellen. Die Taschenrechneranzeige im Schülerbuch hat zum Beispiel 13 Positionen. Zwei von diesen werden für die Stelle vor dem Komma (hier ebenfalls eine Null) und für das Komma selbst benötigt. Es bleiben also 11 Positionen für die Nachkommastellen. Damit können nur diejenigen sehr kleinen Zahlen dargestellt werden, die bis zu der 11. Nachkommastelle eine Ziffer ungleich Null haben. Die Zahl $10^{-12} = 0{,}000\,000\,000\,001$ kann dementsprechend nicht dargestellt werden, denn sie hat an allen Positionen, die anzeigt werden können, eine Null; aus Sicht des Taschenrechners gilt für diese Zahl: $10^{-12} = 0$. Damit erhält man: $(1 + 10^{-12}) - 1 = (1 + 0) - 1 = 0$.
Im Beispiel in Teilaufgabe a) hat die Taschenrechneranzeige eine Stelle weniger. Daher gilt für den entsprechenden Taschenrechner $10^{-11} = 0$. Dies bedeutet, dass nur mit den Zahlen bis $n = -10$ richtig gerechnet werden kann.

31 Die Potenzen werden nach der Regel gebildet:
Basis − Exponent = 20.
Man erhält:
$3^{-17} \approx 7{,}74 \cdot 10^{-9}$
$4^{-16} \approx 2{,}33 \cdot 10^{-10}$
$5^{-15} \approx 3{,}28 \cdot 10^{-11}$
$6^{-14} \approx 1{,}28 \cdot 10^{-11}$
$7^{-13} \approx 1{,}03 \cdot 10^{-11}$
$8^{-12} \approx 1{,}46 \cdot 10^{-11}$
$9^{-11} \approx 3{,}19 \cdot 10^{-11}$
$10^{-10} = 1 \cdot 10^{-10}$
$11^{-9} \approx 4{,}24 \cdot 10^{-10}$
$12^{-8} \approx 2{,}33 \cdot 10^{-9}$
$13^{-7} \approx 1{,}59 \cdot 10^{-8}$
$14^{-6} \approx 1{,}33 \cdot 10^{-7}$
$15^{-5} \approx 1{,}32 \cdot 10^{-6}$
$16^{-4} \approx 1{,}53 \cdot 10^{-5}$
$17^{-3} \approx 2{,}04 \cdot 10^{-4}$
Die kleinste Zahl ist: $7^{-13} \approx 1{,}03 \cdot 10^{-11}$.
Die größte Zahl ist: $17^{-3} \approx 2{,}04 \cdot 10^{-4}$.

32 a) Die Zahl genau in der Mitte wird als der Mittelwert der beiden Zahlen berechnet.
(1) $\frac{1}{2} \cdot (0 + 10^3) = 500 = 5 \cdot 10^2$
(2) $\frac{1}{2} \cdot (0 + 10^{-3}) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}001 = 0{,}0005 = 5 \cdot 10^{-4}$
(3) $\frac{1}{2} \cdot (10^1 + 10^3) = \frac{1}{2} \cdot 1010 = 505 = 5{,}05 \cdot 10^2$

b) Länge des Abschnitts:
(1) $10^3 - 10^{-3} = 1000 - 0{,}001 = 999{,}999$
$10^3 - 10^{-9} = 1000 - 0{,}000\,000\,001$
$= 999{,}999\,999\,999$
Der Abschnitt von 10^3 bis 10^{-9} ist etwas länger, und zwar um 0,000 999 999 (bzw. $9{,}999\,99 \cdot 10^{-4}$).
Das kann man sich auch ohne Rechnung klarmachen; da $10^3 > 10^{-3} > 10^{-9}$ gilt, ist der Abschnitt von 10^3 bis 10^{-3} im Abschnitt von 10^3 bis 10^{-9} enthalten.
(2) $10^5 - 10^1 = 100\,000 - 10 = 99\,990$
$10^{-1} - 10^{-5} = 0{,}1 - 0{,}000\,01 = 0{,}099\,99$
Der Abschnitt von 10^5 bis 10^1 ist deutlich länger.

33 a) Man rechnet die Schritte:
1. Schritt: $0{,}5^2 = 0{,}25$;
2. Schritt: $0{,}25^2 = 0{,}0625$;
3. Schritt: $0{,}0625^2 \approx 0{,}003\,906\,25$;
4. Schritt: $0{,}003\,906\,25^2 \approx 1{,}53 \cdot 10^{-5}$;
5. Schritt: $(1{,}53 \cdot 10^{-5})^2 \approx 2{,}33 \cdot 10^{-10}$;
6. Schritt: $(2{,}33 \cdot 10^{-10})^2 \approx 5{,}42 \cdot 10^{-20}$
Damit erhält man:
(1) Nach 4 Schritten ist der Wert kleiner als $\frac{1}{1000}$; also als 0,001.
Denn nach 3 Schritten hat man den Wert $0{,}003\,906\,25 > 0{,}001$; und nach 4 Schritten erhält man: $1{,}53 \cdot 10^{-5} < 10^{-3} = 0{,}001$.
(2) Nach 5 Schritten ist der Wert kleiner als $\frac{1}{1\,000\,000}$; also als 10^{-6}. Denn es gilt:
$2{,}33 \cdot 10^{-10} < 10^{-6} < 1{,}53 \cdot 10^{-5}$.
(3) Der Wert ist nach 5 Schritten auch kleiner als 10^{-9}. Denn für das Ergebnis nach 5 Schritten gilt ebenfalls:
$2{,}33 \cdot 10^{-10} < 10^{-9}$.
(4) Der Wert ist kleiner als 10^{-12} nach 6 Schritten. Denn es gilt:
$5{,}42 \cdot 10^{-20} < 10^{-12} < 2{,}33 \cdot 10^{-10}$.
b) Die Potenzen lauten:
$0{,}5^2$; $(0{,}5^2)^2 = 0{,}5^4$; $(0{,}5^4)^2 = 0{,}5^8$; $(0{,}5^8)^2 = 0{,}5^{16}$; $(0{,}5^{16})^2 = 0{,}5^{32}$; $(0{,}5^{32})^2 = 0{,}5^{64}$; $(0{,}5^{64})^2 = 0{,}5^{128}$; …
Die Exponenten lauten also:
2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; … (bzw. 2^1; 2^2; 2^3; 2^4; 2^5; 2^6; 2^7; …). Sie haben die Form 2^n; sind also Zweierpotenzen.
c) Der Taschenrechner dürfte ab der Potenz $0{,}5^{512}$ ein falsches Ergebnis zeigen (nämlich gleich 0). Da $512 = 2^9$ gilt, ist dies das Ergebnis beim 9. Schritt.
Die Taschenrechneranzeige lautet also
- beim 8. Schritt: $0{,}5^{256} \approx 8{,}636 \cdot 10^{-78}$
- beim 9. Schritt: $0{,}5^{512} = 0$

(Anmerkung: Das hängt damit zusammen, dass normale Taschenrechner keine Rechnungen mit Zahlen durchführen können, die größer als oder gleich 10^{100} sind.)

d) Von einem Schritt auf den nächsten verdoppeln sich in etwa die Exponenten. Die 10er-Potenzen der Ergebnisse lauten:
- beim 4. Schritt (also $0{,}5^{16}$): 10^{-5};
- beim 5. Schritt (also bei $0{,}5^{32}$): 10^{-10};
- beim 6. Schritt (also bei $0{,}5^{64}$): 10^{-20};
- beim 7. Schritt (also bei $0{,}5^{128}$): 10^{-39};
- beim 8. Schritt (also bei $0{,}5^{256}$): 10^{-78}.

34 Einsetzen von $a = 1 + 10^{-n}$ und $b = 1$ in die Formel (2) ergibt:
$$\frac{(1 + 10^{-n})^2 - 1^2}{(1 + 10^{-n}) - 1} = 1 + 10^{-n} + 1$$
Überprüfen der Ergebnisse auf beiden Seiten für die unterschiedlichen Werte von n:
Zum Beispiel
für $n = 5$: $2{,}000\,01 = 2{,}000\,01$;
für $n = 6$: $2 = 2{,}000\,001$;
für $n = 7$: $2 = 2{,}000\,000\,1$.
Man stellt fest, dass schon ab $n = 6$ die Gleichung nicht gültig ist. (Diese Zahl könnte aber bei einem stärkeren Taschenrechner auch 7 statt 6 betragen.)
Erklärung:
Der Zähler des Bruches auf der linken Seite der Gleichung ergibt nach der binomischen Formel:
$1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 10^{-n} + (10^{-n})^2 = 1 + 2 \cdot 10^{-n} + 10^{-2n}$.
Für $n = 6$ lautet daher der dritte Term $10^{-2 \cdot 6} = 10^{-12}$ bzw. 0,000 000 000 001. Dieser Term braucht (zusammen mit der Null vor dem Komma und dem Komma selbst) 14 Positionen auf der Taschenrechneranzeige, damit er dargestellt werden kann. So viele Positionen stehen allerdings bei den meisten handelsüblichen Taschenrechnern nicht zur Verfügung; meistens beträgt die Anzahl der Positionen 12 oder 13. Die Zahl 10^{-12} wird also aus Taschenrechnersicht wie 0 behandelt; damit ergibt die Rechnung auf der linken Seite der Gleichung:
$$\frac{(1 + 10^{-6})^2 - 1}{(1 + 10^{-6}) - 1} = \frac{1 + 2 \cdot 10^{-6} + 10^{-12} - 1}{(1 + 10^{-6}) - 1}$$
$$= \frac{1 + 2 \cdot 10^{-6} + 0 - 1}{1 + 10^{-6} - 1} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{10^{-6}} = 2$$
Tipp: Etwas ausführlichere Erklärungen zu den Taschenrechneranzeigen findest du in der Lösung der Aufgabe 30 auf Seite 58.

Seite 53

35 Abstand Erde – Mond:
$386\,000\,\text{km} = 386\,000 \cdot 10^6\,\text{mm}$
$= 3{,}86 \cdot 10^5 \cdot 10^6\,\text{mm}$
$= 3{,}86 \cdot 10^{11}\,\text{mm}$
Dicke des Papiers: $0{,}1\,\text{mm} = 10^{-1}\,\text{mm}$
$3{,}86 \cdot 10^{11} : 10^{-1} = 3{,}86 \cdot 10^{11-(-1)} = 3{,}86 \cdot 10^{12}$
Die Zahl der Papierschichten verdoppelt sich mit jedem Falten:
1. Faltung: $2^1 = 2$ Schichten

2. Faltung: $2^2 = 4$ Schichten
3. Faltung: $2^3 = 8$ Schichten
…
10. Faltung: $2^{10} = 1024$ Schichten
20. Faltung: $2^{20} \approx 1{,}05 \cdot 10^6$ Schichten
30. Faltung: $2^{30} \approx 1{,}07 \cdot 10^9$ Schichten
40. Faltung: $2^{40} \approx 1{,}10 \cdot 10^{12}$ Schichten
41. Faltung: $2^{41} \approx 2{,}20 \cdot 10^{12}$ Schichten
42. Faltung: $2^{42} \approx 4{,}40 \cdot 10^{12}$ Schichten
Um $3{,}86 \cdot 10^{12}$ Papierschichten zu erhalten, müsste man das Blatt 42-mal falten. Das sind überraschend wenige Faltungen.

36 a) Flächeninhalt der Oberseite eines Blutkörperchens (in m^2):
$A = (8 \cdot 10^{-6})^2 = 64 \cdot 10^{-12} = 6{,}4 \cdot 10^{-11}$
Dieser Flächeninhalt muss verdoppelt und mit der Gesamtzahl der Blutkörperchen multipliziert werden, um den Gesamtflächeninhalt zu berechnen.
$A_{gesamt} = 2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-11} \cdot 25 \cdot 10^{12}$
$= 2 \cdot 6{,}4 \cdot 25 \cdot 10^{12-11}$
$= 320 \cdot 10 = 3200$
Der Flächeninhalt der Blutkörperchen insgesamt beträgt $3200\,m^2$.
b) Die Größe der Vorderseite des menschlichen Körpers wird in etwa mit $1\,m^2$ geschätzt (vgl. Angabe in der Zeichnung im Schulbuch). Damit steht diese in einem Verhältnis von 1 : 3200 zum Gesamtflächeninhalt der roten Blutkörperchen. Wenn das rote Quadrat der gesamten Oberfläche der Blutkörperchen entspricht, dann entsprechen 100 Kästchen $3200\,m^2$, also 1 Kästchen $32\,m^2$.
Bei der kleinsten Figur C gilt: Diese ist ca. $\frac{1}{4}$ Kästchen, also ca. $8\,m^2$ groß. Diese Größe ist immer noch um den Faktor 8 zu groß; eine passende Figur müsste etwa $\frac{1}{30}$ eines Kästchens belegen. Man könnte sie gar nicht mehr richtig sehen.

37 a) Anzahl der Sekunden in einem normalen Jahr mit 365 Tagen:
$365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31\,536\,000$
Anzahl der Sekunden in einem Schaltjahr:
$366 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31\,622\,400$
Durchschnittliche Anzahl Sekunden im Jahr (ein Schaltjahr alle 4 Jahre):
$\frac{3 \cdot 31\,536\,000 + 31\,622\,400}{4} = 31\,557\,600 = 3{,}15576 \cdot 10^7$
Ein Jahr hat also etwa $3{,}2 \cdot 10^7$ Sekunden.

b) Aus der Angabe zur Lichtgeschwindigkeit weiß man: In einer Sekunde legt das Licht $300 \cdot 10^6\,m$ zurück.
Gesucht ist nun die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. Da ein Jahr etwa $3{,}2 \cdot 10^7$ Sekunden hat (vgl. Teilaufgabe a)), rechnet man:
$300 \cdot 10^6 \cdot 3{,}2 \cdot 10^7 = 960 \cdot 10^{13}$
$= 9{,}6 \cdot 10^2 \cdot 10^{13}$
$= 9{,}6 \cdot 10^{15}$
In einem Jahr legt also das Licht $9{,}6 \cdot 10^{15}\,m$ zurück. Das entspricht einem Lichtjahr.

38 a) Es ist hilfreich, wenn man zuerst die Anzahl der Nullen beim Tipp in der Marginalie ergänzt:
1 Quadrillion: 1 mit 24 Nullen
1 Quintillion: 1 mit 30 Nullen
Damit erhält man:
170 Quintillionen = $170 \cdot 10^{30}$
- in technischer Schreibweise:
  $170 \cdot 10^{30}$ Möglichkeiten
- in wissenschaftlicher Schreibweise:
  $1{,}7 \cdot 10^{32}$ Möglichkeiten

b) Gesamtweglänge einer Schachfigur bei 10 Zügen: 10 m
Gesamtlänge bei allen Möglichkeiten:
$1{,}7 \cdot 10^{32} \cdot 10\,m = 1{,}7 \cdot 10^{33}\,m = 1{,}7 \cdot 10^{30}\,km$
Eine Schachfigur würde bei allen möglichen 10-zügigen Spielanfängen eine Gesamtstrecke von $1{,}7 \cdot 10^{33}\,m$ (bzw. 1,7 Quintillionen km) zurücklegen.
c) Größte Entfernung im All:
$78 \cdot 10^9\,Lj = 78 \cdot 10^9 \cdot 9{,}6 \cdot 10^{15}\,m$
$= 78 \cdot 9{,}6 \cdot 10^{9+15}\,m$
$= 748{,}8 \cdot 10^{24}\,m$
$= 7{,}488 \cdot 10^2 \cdot 10^{24}$
$= 7{,}488 \cdot 10^{26}\,m$
Vergleich dieser Strecke mit dem Weg der Schachfigur aus Teilaufgabe b)
$\frac{\text{Weg Schachfigur}}{\text{Entfernung All}} = \frac{1{,}7 \cdot 10^{33}}{7{,}488 \cdot 10^{26}}$
$= \frac{1{,}7}{7{,}488} \cdot 10^7 \approx 0{,}227 \cdot 10^7$
$= 2{,}27 \cdot 10^6$
Der Weg der Schachfigur wäre also um ca. 2 Millionen Mal länger als die größte Entfernung zwischen zwei Objekten im All!