Aufgabenblatt B3 : Quadratische Funktionen

Wir wollen auf diesem Arbeitsblatt die quadratischen Funktionen (Parabeln) studieren. Wir kennen dabei die folgenden Darstellungsformen:

Allgemeine Form: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$
Scheitelpunktform: $y = f(x) = a(x - d)^2 + e$

In der höheren Mathematik werden diese Funktionen als sogenannte „ganzrationale Funktionen“ eingeordnet, speziell mit Grad 2. Höhere Grade werden in der Schule nur am Rand behandelt und werden deshalb auch bei uns später eingeführt.

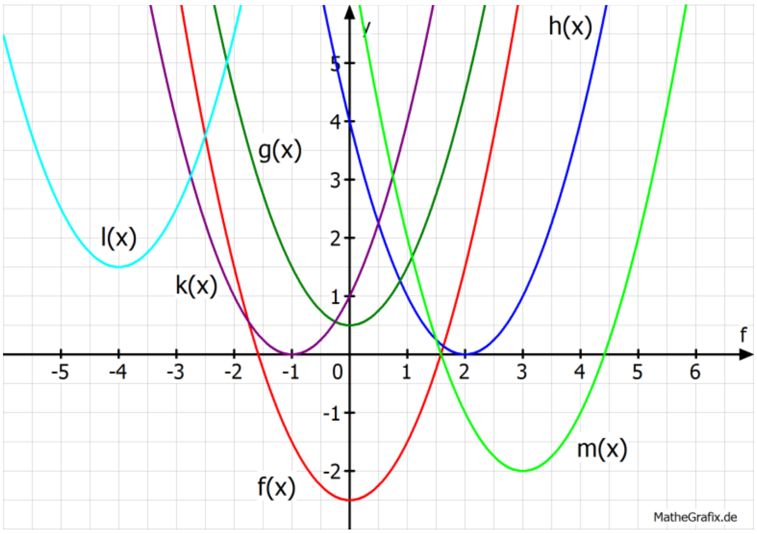
Vor allem im Bereich der Differentialrechnung werden Fähigkeiten wie die Berechnung der Nullstelle wieder benötigt.

Welche Fähigkeiten werden im Einzelnen auf diesem Blatt trainiert?

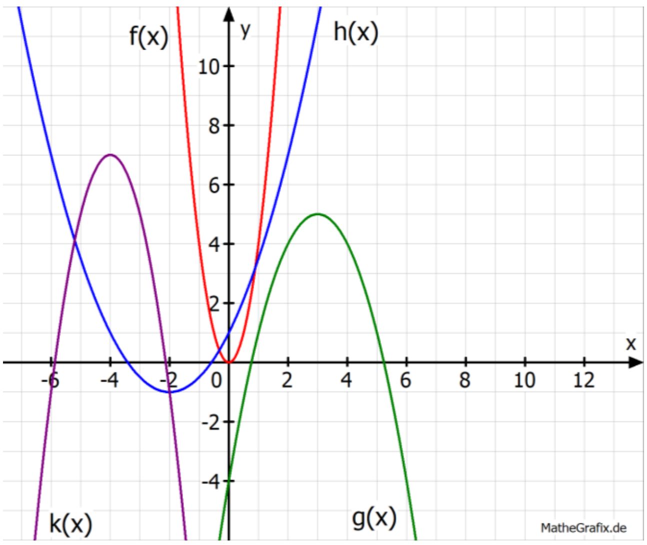
- Zeichnen quadratischer Funktionen, Ablesen der Funktionsgleichung
- Nullstellen, Schnittpunkte und weitere Funktionseigenschaften
- Anwendungsaufgaben aus der Physik

Aufgabe 1: Ablesen von Funktionsgraphen

a) Stellen Sie die Funktionsgleichung folgender Normalparabeln ($a = 1$) auf.



b) Stellen Sie die Funktionsgleichung folgender Parabeln ($a \neq 1$) auf.



Aufgabe 2: Zeichnen von Funktionsgraphen und Wertebereich

a) Zeichnen Sie mithilfe von Wertetabellen die Graphen folgender Funktionen. Vergleichen Sie im Anschluss mit Wolfram Alpha oder einem anderen Grafikwerkzeug:

$f(x) = x^2 - 4$ $\quad$ $g(x) = (x-1)^2$ $\quad$ $h(x) = (x+3)^2$

$i(x) = -(x+2)^2 + 1$ $\quad$ $j(x) = -3x^2 + 2$ $\quad$ $k(x) = -2(x-3)^2 - 2$

$l(x) = x^2 - 8x + 12$ $\quad$ $m(x) = x^2 - 2x - 3$ $\quad$ $n(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 6$

b) Geben Sie den Wertebereich der Funktionen $f(x), g(x), i(x)$ und $l(x)$ an.

Aufgabe 3: Nullstellen

Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen:

$f_1(x) = (x-1)^2 - 1$ $\quad$ $f_2(x) = x^2 + 9 - 6\mathrm{x}$ $\quad$ $f_3(x) = -x^2 + 4x - 6$

$f_4(x) = 3x^2 - 18x + 24$ $\quad$ $f_5(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2{,}5$

Aufgabe 4: Weitere Funktionseigenschaften

Gegeben seien folgende Funktionen:

$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\quad$ $f_2(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ $\quad$ $f_3(x) = x^2 + 4x - 4$

a) Berechnen Sie jeweils die Funktionswerte der Funktionen an den Stellen

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -\frac{1}{2}$

b) Berechnen Sie zu folgenden Funktionswerten jeweils die zugehörigen x-Werte (falls vorhanden).

$y_1 = 3 \qquad y_2 = -1$

c) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktionen mit den Koordinatenachsen (falls vorhanden).

d) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktionen f_2 und f_3 miteinander.

e) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ miteinander.

(1) $f(x) = (x+2)^2 - 3$ $\quad$ $g(x) = 2x + 3$

(2)* $f(x) = (x+2)(x-3)$ $\quad$ $g(x) = 4x - 10$

Aufgabe 5: Anwendungsaufgaben

a) Die Wurfparabel eines Geschosses sei durch folgende quadratische Gleichung gegeben. Berechnen Sie die Wurfweite, wenn das Geschoss auf der einen Seite aus einer Höhe von 1,80m abgeworfen wurde und auf der anderen Seite auf der Bodenhöhe von 0m landet.

geg.: $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3{,}5x + 5$, Höhe y und Weite x in m

b) Die Bewegungsbahn eines Elektrons in einem elektrischen Feld zwischen zwei Kondensatorplatten sei durch folgende quadratische Gleichung gegeben. Berechnen Sie den Umkehrpunkt des Elektrons.

geg.: $y = -\frac{1}{4}t^2 + 4t + 5$, y-Koordinate in cm und Zeit t in s

Lösungen: (Angaben ohne Gewähr, bei Unklarheit bitte nachfragen)

1. a) Funktionsgleichungen Normalparabel:

$f(x) = x^2 - 2{,}5$ $\quad g(x) = x^2 + 0{,}5$ $\quad h(x) = (x-2)^2$
$k(x) = (x+1)^2$ $\quad l(x) = (x+4)^2 + 1{,}5$ $\quad \mathrm{m}(x) = (x-3)^2 - 2$

1. b) Funktionsgleichungen:

$f(x) = 4x^2 \quad g(x) = -(x-3)^2 + 5 \quad h(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1 \quad k(x) = -2(x+4)^2 + 7$

2. b) Wertebereich:
$f(x)\colon [-4, \infty)$, $g(x)\colon [0, \infty)$, $i(x)\colon [1, -\infty)$, $l(x)\colon [4, \infty)$

3.
$f_1\colon x_1 = 0, \mathrm{x}_2 = 2$ $\quad f_2\colon x = 3,$ $\quad f_3$: keine Nullstelle
$f_4\colon x_1 = 2, \mathrm{x}_2 = 4$ $\quad f_5\colon x_1 = -5, \mathrm{x}_2 = 1$

4. a) $f_1(2) = 2$, $f_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$, $\quad f_2(2) = 9$, $f_2\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$, $f_3(2) = 8$, $f_3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{23}{4}$
b) $f_1\colon\ \frac{1}{2}x^2 = 3, x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$; $\frac{1}{2}x^2 = -1$, nicht lösbar
$f_2\colon 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 3, x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$; $4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -1$, nicht lösbar ;
$f_3\colon x^2 + 4x - 4 = 3, x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{9}, x_1 = 1, x_2 = -5$; $x^2 + 4x - 4 = -1,\ x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}$

c) Schnittpunkte mit y-Achse:
$f_1(0) = 0\ , S_y(0;\ 0)$; $\quad f_2(0) = 1\ , S_y(0;\ 1)$; $\quad f_3(0) = -4\ , S_y(0;\ -4)$

Schnittpunkte mit x-Achse:
$f_1\colon \frac{1}{2}x^2 = 0, x = 0, S_x(0;\ 0)$; $f_2\colon 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0, x = \frac{1}{2}\ , S_x\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$
$f_3\colon\ x^2 + 4x - 4 = 0, x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{6}\ , S_{x1}(2 + \sqrt{6};\ 0),\ S_{x2}(2 - \sqrt{6};\ 0)$

d) Schnittpunkte zweier Parabeln: $f_2(x) = f_3(x),\ \frac{1}{2}x^2 = x^2 + 4x - 4,\ \ \frac{1}{2}x^2 + 4x - 4 = 0, x^2 + 8x - 8 = 0$
x-Werte: $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{12}$; y-Werte am leichtesten mit f_2 berechnen:
$y_1 = \frac{1}{2}\left(4 + \sqrt{12}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(16 + 8\sqrt{12} + 12\right) = 14 + 4\sqrt{12}$, $S_1\left(4 + \sqrt{12}\ ; 14 + 4\sqrt{12}\right)$; $S_1\left(4 - \sqrt{12}\ ; 14 - 4\sqrt{12}\right)$

e) Schnittpunkte:

(1) $f(x) = g(x)$, ein Schnittpunkt bei: $S(-1; -2)$

(2) zwei Schnittpunkte bei: $S_1(4; 6), S_2(1; -6)$

5.

a) aus $y(x) = 1{,}8m$ $\quad x_1 = -0{,}86m$, aus $y(x) = 0$ $\quad x_2 = 15{,}31m$ damit Wurfweite $w = 16{,}17$

b) $y = -\frac{1}{4}(t-8)^2 + 21$ damit Umkehrpunkt bei $8s$ und $y = 21cm$