

Vorkurs Mathematik

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung

1 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 1.1 Beim Werfen eines Würfels betrachten wir das Ereignis A „Eine ungerade Zahl wird geworfen“ und $B =$ „Eine Zahl größer als 3 wird geworfen“.

- (a) Schreiben Sie die Ereignisse A und B als Teilmengen aller möglichen Wurf-Ergebnisse $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- (b) Bestimmen Sie $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ sowie die Komplement-Mengen A^c und B^c . Sind A und B disjunkt?
- (c) Berechnen Sie zu den Mengen aus (b) die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten.
- (d) Sind die Ereignisse A und B unabhängig?

Aufgabe 1.2 Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Werfen von drei Würfeln

- (a) mindestens eine 4 auftritt?
- (b) höchstens eine 6 auftritt?
- (c) genau zweimal die 3 fällt?
- (d) mindestens eine 4 und eine 5 auftritt?

Aufgabe 1.3 Wir ziehen nacheinander zwei Socken aus einer Schublade mit 5 **schwarzen**, 6 **blauen** und 4 **roten** Socken. Wir definieren Ereignis A als „Beide Socken haben unterschiedliche Farben“ und Ereignis B als „Die erste gezogene Socke ist **rot**“.

- (a) Berechnen Sie $p(B)$.
- (b) Berechnen Sie $p(A)$.
- (c) Sind A und B unabhängig?

Aufgabe 1.4 Bei einer Lotterie sind unter 1000 Losen 75 Gewinne zu 2 Euro, 60 Gewinne zu 5 Euro sowie der Hauptgewinn von 100 Euro. Die restlichen Lose sind Nieten. Der Preis für ein Los beträgt 1 Euro.

- (a) Definieren Sie die Zufallsvariable X , die Gewinn-Auszahlung an einen Losinhaber beschreibt.

- (b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Gewinn-Auszahlung an einen Losinhaber. Eine Lotterie heißt “fair” wenn der Erwartungswert der Gewinn-Auszahlung den Lospreis nicht überschreitet. Ist das Spiel fair?
- (c) Definieren Sie die Zufallsvariable Y , die den Gewinn der Lottogesellschaft je Los beschreibt.
- (d) Berechnen Sie den mittleren Gewinn der Lottogesellschaft je Los.

Aufgabe 1.5 (Zusatzaufgabe) Ein Student im Stochastikkurs behauptet, die Wahrscheinlichkeit, dass irgendein anderer der insgesamt 25 Studenten im Kurs am gleichen Tag im Jahr Geburtstag feiert wie er, sei sehr klein, nämlich nur ca. 0.06. Der Professor schaut ihn zustimmend an und behauptet dann frech, dass die Wahrscheinlichkeit, dass trotzdem mindestens zwei Studenten ihren Geburtstag teilen, viel höher sei, nämlich über 0.5. Das macht den Studenten sehr stutzig, kann das stimmen? Überprüfen Sie die Aussage des Studenten und die des Professors.

Hinweis: Vorsicht beim Benutzen des Taschenrechners. Eine falsche Zahl und das Ergebnis ist komplett falsch.

Aufgabe 1.6 (Zusatzaufgabe) Bei einer Prüfung wird einer Kandidatin ein „Multiple Choice“-Fragenbogen vorgelegt. Dabei steht unter jeder der 9 Fragen in zufälliger Reihenfolge die richtige und zwei falsche Antworten. Zum Bestehen der Prüfung müssen mindestens 6 Antworten richtig angekreuzt werden. Die Kandidatin kreuzt bei jeder Frage eine der drei Antworten zufällig an.

- (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht sie die Prüfung?
- (b) Die Kandidatin kann bei jeder Frage eine falsche Antwort ausschließen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht sie nun die Prüfung?

Hinweis: Untersuchen Sie separat alle 4 Punktzahlen, mit der die Studentin bestehen kann.

2 Lösungen

Lösungen zu Aufgabe 1.1

$$A = \{1, 3, 5\}, B = \{4, 5, 6\}.$$

(a) $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{5\}$, $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$, $\bar{B} = \{1, 2, 3\}$, $A \setminus B = \{1, 3\}$ und $B \setminus A = \{4, 6\}$. A und B sind nicht disjunkt da $A \cap B \neq \emptyset$.

$$(b) p(A \cup B) = \frac{5}{6}, p(A \cap B) = \frac{1}{6}, p(\bar{A}) = \frac{1}{2}, p(\bar{B}) = \frac{1}{2}, p(A \setminus B) = \frac{1}{3}, p(B \setminus A) = \frac{1}{3}$$

(c) A und B sind nicht unabhängig, da $p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{6} = p(A \cap B)$.

Lösungen zu Aufgabe 1.2

$$(a) p(\text{„keine 4“}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216} \Rightarrow p(\text{„mind. eine 4“}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

$$(b) p(\text{„keine 6“}) = \frac{125}{216}, p(\text{„genau eine 6“}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{75}{216} \\ \Rightarrow p(\text{„höchstens eine 6“}) = \frac{125}{216} + \frac{75}{216} = \frac{25}{27}$$

$$(c) p(\text{„genau zweimal 3“}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{15}{216}$$

$$(d) p(\text{„genau einmal 4 und einmal 5“}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot 6 = \frac{1}{9} \\ p(\text{„zweimal 4 und einmal 5“}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{72} \\ p(\text{„zweimal 5 und einmal 4“}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{72} \\ \Rightarrow p(\text{„mind. eine 4 und eine 5“}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{72} + \frac{1}{72} = \frac{5}{36}$$

Lösungen zu Aufgabe 1.3

$$(a) p(B) = \frac{4}{15}.$$

$$(b) p(\text{„erste Socke schwarz, zweite anders“}) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{5}{21} \\ p(\text{„erste Socke rot, zweite anders“}) = p(A \cap B) = \frac{4}{15} \cdot \frac{11}{14} = \frac{22}{105} \\ p(\text{„erste Socke blau, zweite anders“}) = \frac{6}{15} \cdot \frac{9}{14} = \frac{18}{70} \\ \Rightarrow p(A) = \frac{5}{21} + \frac{22}{105} + \frac{18}{70} = \frac{74}{105}$$

$$(c) p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{22}{105}}{\frac{4}{15}} = \frac{11}{14}$$

$$(d) p(A) \cdot p(B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{15} = \frac{2}{9} \neq \frac{22}{105} = p(A \cap B) \Rightarrow A \text{ und } B \text{ sind nicht unabhängig.}$$

Lösungen zu Aufgabe 1.4

1. Die folgende Zufallsvariable X modelliert die Ausschüttung.

$$X : \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \text{Hauptgewinn, 2.Preis,} \\ \text{3.Preis, Niete} \end{array} \right\}}_{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Hauptgewinn	$\mapsto$	100
2.Preis	$\mapsto$	5
3.Preis	$\mapsto$	2
Niete	$\mapsto$	0

2. Für den Erwartungswert erhalten wir:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) X(\omega) \\ &= p(\text{Hauptgewinn}) \cdot 100 + p(2.\text{Preis}) \cdot 5 + p(3.\text{Preis}) \cdot 2 + p(\text{Niete}) \cdot 0 \\ &= \frac{1}{1000} \cdot 100 + \frac{60}{1000} \cdot 5 + \frac{75}{1000} \cdot 2 + \frac{864}{1000} \cdot 0 \\ &= \frac{550}{1000} = 0.55 \end{aligned}$$

Man verliert also durchschnittlich 45 Cent pro Spiel. Das Spiel ist also nicht fair.

3. Die folgende Zufallsvariable Y modelliert den Gewinn des Anbieters.

$$Y : \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \text{Hauptgewinn, 2.Preis,} \\ \text{3.Preis, Niete} \end{array} \right\}}_{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Hauptgewinn	$\mapsto$	$1 - 100 = -99$
2.Preis	$\mapsto$	$1 - 5 = -4$
3.Preis	$\mapsto$	$1 - 2 = -1$
Niete	$\mapsto$	$1 - 0 = 1$

Also $Y(\omega) = -X(\omega) + 1$.

4. $E(Y) = -E(X) + 1 = 0.45$
5. Die Varianz von X berechnet sich als:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) (X(\omega) - E(X))^2 \\ &= \frac{1}{1000} \cdot (100 - 0.55)^2 + \frac{60}{1000} \cdot (5 - 0.55)^2 \\ &\quad + \frac{75}{1000} \cdot (2 - 0.55)^2 + \frac{864}{1000} \cdot (0 - 0.55)^2 \\ &= 11.4975 \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 1.6

- (a) Wir berechnen zunächst alle Fälle, in denen die Studentin besteht, separat aus. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Studentin besteht ist dann die Summe dieser einzelnen Wahrscheinlichkeiten.

$$p(\# \text{ Richtige} = 6) = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \binom{9}{6} = \frac{672}{3^9}$$

$$p(\# \text{ Richtige} = 7) = \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \binom{9}{7} = \frac{144}{3^9}$$

$$p(\# \text{ Richtige} = 8) = \left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \binom{9}{8} = \frac{18}{3^9}$$

$$p(\# \text{ Richtige} = 9) = \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{1}{3^9}$$

$$\Rightarrow p(\# \text{ Richtige} \geq 6) = \frac{672}{3^9} + \frac{144}{3^9} + \frac{18}{3^9} + \frac{1}{3^9} = \frac{835}{3^9} \approx 4.24\%$$

- (b) Man braucht nur die Erfolgswahrscheinlichkeit von $1/3$ auf $1/2$ erhöhen.

$$p(\# \text{ Richtige} = 6) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \binom{9}{6} = \frac{84}{2^9}$$

$$p(\# \text{ Richtige} = 7) = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \binom{9}{7} = \frac{36}{2^9}$$

$$p(\# \text{ Richtige} = 8) = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \binom{9}{8} = \frac{9}{2^9}$$

$$p(\# \text{ Richtige} = 9) = \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{2^9}$$

$$\Rightarrow p(\# \text{ Richtige} \geq 6) = \frac{84+36+9+1}{2^9} = \frac{130}{512} \approx 25\%$$

- (c) Hier muss die 9 zu einer 6 verändert werden.

$$p(\# \text{ Richtige} = 6) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \binom{6}{3} = \frac{160}{3^6}$$

$$p(\# \text{ Richtige} = 7) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \binom{6}{2} = \frac{24}{3^6}$$

$$p(\# \text{ Richtige} = 8) = \left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \binom{6}{1} = \frac{12}{3^6}$$

$$p(\# \text{ Richtige} = 9) = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{3^6}$$

$$\Rightarrow p(\# \text{ Richtige} \geq 6) = \frac{160+24+12+1}{3^6} = \frac{197}{729} \approx 27\%$$

- (d) Die erwartete Anzahl (im ersten Modell) an richtig geratenen Antworten und deren Va-

rianz ist dann:

$$E(X) = \sum_{i=0}^9 \left(\frac{1}{3}\right)^i \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{9-i} \cdot \binom{9}{i} \cdot i = \dots = 3$$

$$Var(X) = \sum_{i=0}^9 \left(\frac{1}{3}\right)^i \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{9-i} \cdot \binom{9}{i} \cdot (i-3)^2 = \dots = 2.$$

Die Anzahl richtiger Antworten ist binomialverteilt zu den Parametern $n = 9, p = 1/3$.

Lösungen zu Aufgabe 1.5

Zur Aussage des Studenten: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Student im Kurs nicht am gleichen Tag wie er selbst Geburtstag hat, ist $\frac{364}{365}$. Dass dies unabhängig voneinander für sämtliche der 24 Studenten gilt, tritt mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{364}{365}\right)^{24}$ ein und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist damit

$$1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{24} \approx 0.06$$

Zur Aussage des Profs: Wir bestimmen die Wahrscheinlichkeit, dass alle Studenten an verschiedenen Tagen Geburtstag haben. Der erste kann sich unter den 365 Tagen einen beliebig aussuchen, der zweite muss dann einen der übrigen 364 nehmen, der dritte kann nur noch einen der restlichen 363 wählen. So geht es weiter und der 25. Student hat nur noch 341 freie Tage übrig. Die Wahrscheinlichkeit, dass es bei den Geburtstagen aller keine Überschneidungen gibt, ist demnach

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{341}{365} = \frac{365!}{365^{25} 340!} \approx 0.43$$

Damit ist die Wskt, dass sich mindestens zwei Studenten ihren Geburtstag teilen etwa 0.57, mehr als 0.5.

Näheres zu diesem Problem findet sich im Internet unter "Geburtstagsparadoxon".