# Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen

## Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass sich die Kurven $K_f$ und $K_h$ der Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x+\sin(x)-1 \\ h(x) &= -e^{-4x} \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 0$ berühren.

## Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass sich die Kurven $K_f$ und $K_h$ der Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x)+2x \\ h(x) &= e^{2x} \end{aligned}$$

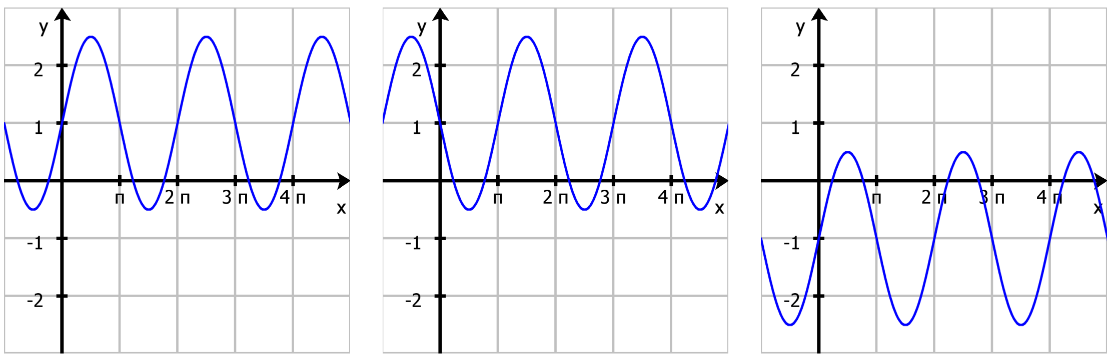
$x \in \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 0$ berühren.

## Aufgabe 3

Sei $K$ das Schaubild der Funktion $f$ mit $f(x) = \cos\left(\frac{3}{2}x\right)-1$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die exakten Nullstellen von $K$ für $-\pi \le x \le 4\pi$.

## Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x) = -\frac{3}{2}\sin(x)+1$.




A B C

1. Es ist bekannt, dass zwei der dargestellten Kurven A, B und C nicht Schaubild von $f$ sein können. Welche sind dies? Begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie zu jedem nicht zutreffenden Schaubild eine Eigenschaft nennen, die nicht mit den Funktionseigenschaften von $f$ vereinbar ist.
2. Ändern Sie die Funktionsgleichung von $f$ ab, so dass sich die Periode von $f$ halbiert.

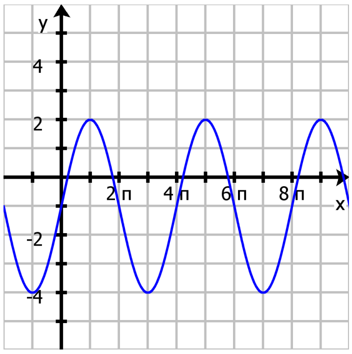
 

## Aufgabe 5

Das nebenstehende Schaubild hat die

Funktionsgleichung: $f(x)=a\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+b$, $x\in\mathbb{R}$.

Bestimmen Sie $a$ und $b$.

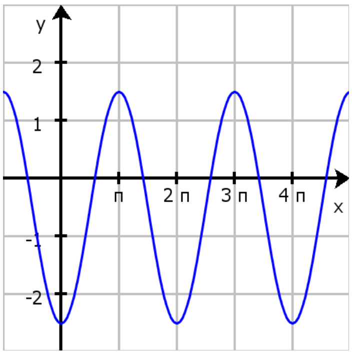



## Aufgabe 6

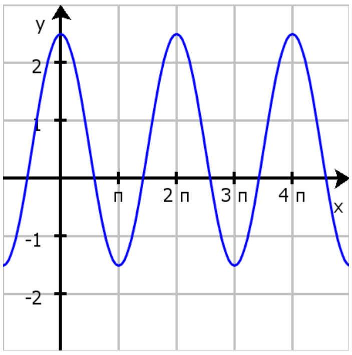
Sei $K$ das Schaubild der Funktion $f$ mit $f(x)=\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$. Bestimmen Sie die exakten Nullstellen von $K$ für $-\pi\le x\le 2\pi$.

## Aufgabe 7

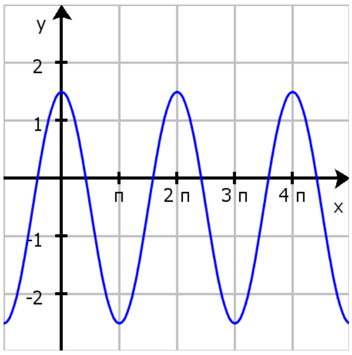
Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x)=2\cos(x)-\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.




A




B




C

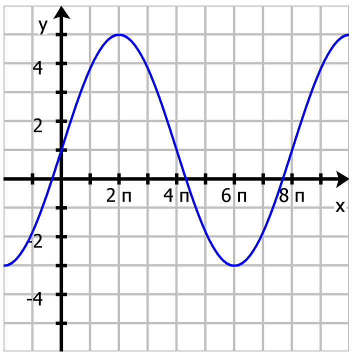
1. Es ist bekannt, dass zwei der dargestellten Kurven A, B und C nicht Schaubild von $f$ sein können. Welche sind dies? Begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie zu jedem nicht zutreffenden Schaubild eine Eigenschaft nennen, nicht mit den Funktionseigenschaften von $f$ vereinbar ist.
2. Ändern Sie die Funktionsgleichung von $f$ ab, so dass sich die Periode von $f$ verdoppelt.

## Aufgabe 8

Das nebenstehende Schaubild hat die

Funktionsgleichung: $f(x)=a\sin\left(\frac{1}{4}x\right)+b$, $x\in\mathbb{R}$.

Bestimmen Sie $a$ und $b$.



## Aufgabe 9

Bestimmen Sie für folgende Gleichung den exakten Wert für $x$.

$$\sin\left(\frac{2}{9}\pi\right) = \sin(x\pi); \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad x \neq \frac{2}{9}$$

## Aufgabe 10

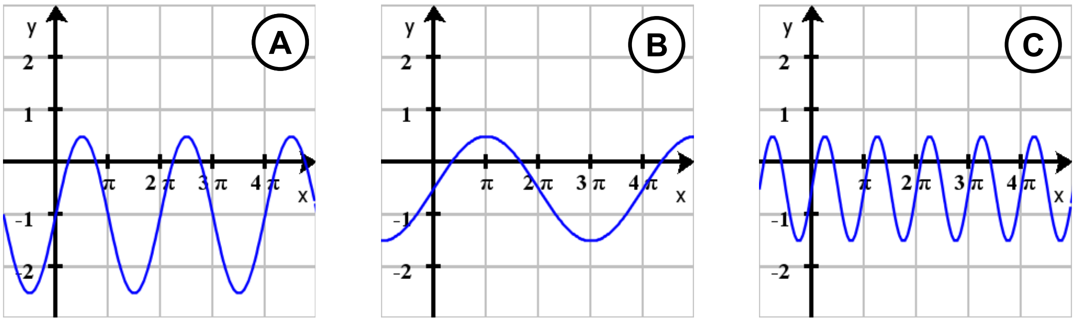
Bestimmen Sie für folgende Gleichung den exakten Wert für $x$.

$$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \cos(x\pi); \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

## Aufgabe 11

Sei $K_f$ das Schaubild der Funktion $f$ mit $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + b$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Welche der zwei folgenden Schaubilder gehören nicht zu $K_f$. Begründen Sie Ihre Aussage.




2. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung zu dem Graphen aus Schaubild A.

## Aufgabe 12

Sei $f$ eine Funktion mit $f(x) = 0{,}5\cos(x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = 1{,}5$ zwei Lösungen für $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ besitzt.
2. Sei $K_f$ der Graph von $f$. Begründen Sie, warum $K_f$ keine Nullstellen besitzt.

## Aufgabe 13

Bestimmen Sie für folgende Gleichung den exakten Wert für $x$.

$$\cos\left(\frac{2}{9}\pi\right) = \cos(x\pi); \quad 0 \leqslant x \leqslant 2; \quad x \neq \frac{2}{9}$$

## Aufgabe 14

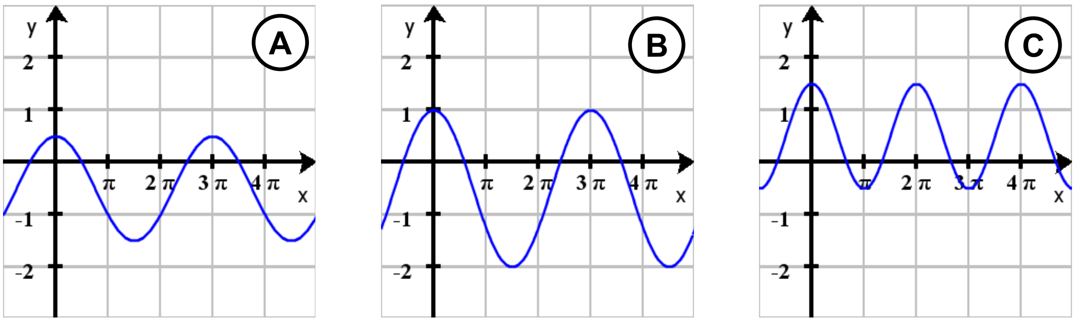
Bestimmen Sie für folgende Gleichung den exakten Wert für $x$.

$$\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin(x\pi); \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$$

## Aufgabe 15

Sei $K_f$ das Schaubild der Funktion $f$ mit $f(x) = \cos\left(\frac{2}{3}x\right)+b$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Welche der zwei folgenden Schaubilder gehören nicht zu $K_f$. Begründen Sie Ihre Aussage.




2. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung zu dem Graphen aus Schaubild B.

## Aufgabe 16

Sei $f$ eine Funktion mit $f(x) = 1{,}5\cos(x)+2$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = 3{,}5$ zwei Lösungen für $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ besitzt.
2. Sei $K_f$ der Graph von $f$. Zeigen Sie, dass $K_f$ nur oberhalb der $x$-Achse verläuft.

## Aufgabe 17

Für jedes $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist die Funktion $f_t$ durch

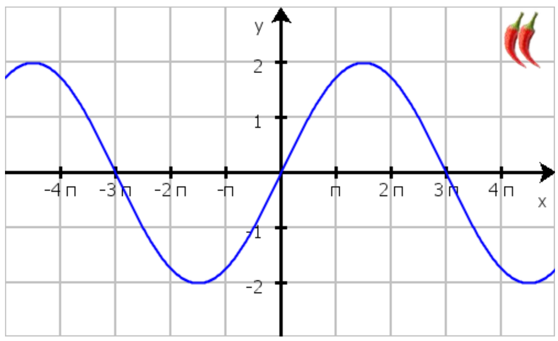
$$f_t(x)=\frac{t}{4}\left(\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-1\right), \quad x\in[-\pi;5\pi]$$

gegeben. Das Schaubild von $f_t$ ist gegeben durch $K_t$.

1. Skizzieren Sie $K_2$ in einem geeigneten Koordinatensystem.
2. Bestimmen Sie die Perioden von $K_t$.
3. Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $K_2$ mit den Koordinatenachsen.
4. Bestimmen Sie $t$, so dass $K_t$ an der Stelle $x=2\pi$ die Steigung $m=-\frac{1}{2}$ hat.

## Aufgabe 18

Die Abbildung zeigt den Graphen $K$ einer Funktion $f$.



1. Bestimmen Sie grafisch: $f'(3\pi)$
2. Folgende Aussagen sind falsch und wahr:

   $$f'(-3\pi) = 0, \quad f'(0) = -1, \quad f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$$

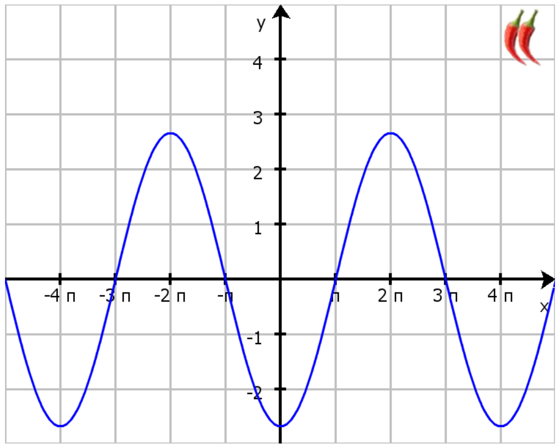
   Entscheiden Sie und Begründen Sie ihre Entscheidung.

## Aufgabe 19

Die Abbildung zeigt den Graphen $K$ einer Funktion $f$.

1. Bestimmen Sie grafisch: $f'(-\pi)$
2. Folgende Aussagen sind falsch und wahr:
   $f'(-2\pi) = 0$ , $f'(0) = 0$ , $f'(\pi) = 3$
   Entscheiden Sie und Begründen Sie Ihre Entscheidung.




## Lösungen

zu Aufgabe 3: $N_1(0 \mid 0)$ , $N_2\left(\frac{4}{3}\pi \mid 0\right)$ , $N_3\left(\frac{8}{3}\pi \mid 0\right)$ , $N_4(4\pi \mid 0)$

zu Aufgabe 4: A und C, $f(x) = -\frac{3}{2}\sin(2x)+1$

zu Aufgabe 5: $a=3$ , $b=-1$

zu Aufgabe 6: $N_1(-\pi \mid 0)$ , $N_2(0 \mid 0)$ , $N_3(\pi \mid 0)$ , $N_4(2\pi \mid 0)$

zu Aufgabe 7: A und B, $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{2}$

zu Aufgabe 8; $a=4$ , $b=1$

zu Aufgabe 9: $x = \frac{7}{9}$

zu Aufgabe 10: $x = \frac{1}{3}$

zu Aufgabe 11: A und C, $f(x) = \frac{3}{2}\sin(x)-1$

zu Aufgabe 13: $x = \frac{16}{9}$

zu Aufgabe 14: $x = \frac{7}{6}$

zu Aufgabe 15: B und C, $f(x) = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)-\frac{1}{2}$

zu Aufgabe 17: $p=4\pi$ , $S_y\left(0\middle|\frac{1}{2}\right)$ , $N_1(\pi \mid 0)$ und $N_2(5\pi \mid 0)$ , $t=4$

zu Aufgabe 18: $f'(3\pi) = -\frac{2}{3}$ , $f'(-3\pi) = 0$ ist falsch, $f'(0) = -1$ ist falsch, $f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$ ist wahr.

Zu Aufgabe 19: $f'(-\pi) = -\frac{4}{3}$ , $f'(-2\pi) = 0$ ist wahr, $f'(0) = 0$ ist wahr, $f'(\pi) = -3$ ist falsch

# Lösungen

## Lösung zu Aufgabe 1

Es ist zu Zeigen, dass die Funktionswerte von $f(x)$ und $h(x)$ an der Stelle $x_0$ gleich sind und beide Funktionen an der Stelle $x_0$ die gleiche Steigung besitzen:

1. $f(0) = 3 \cdot 0 + \sin(0) - 1 = -1$

   $f(0) = -e^{-4 \cdot 0} = -1$

2. $f(x) = 3x + \sin(x) - 1 \Rightarrow f'(x) = \cos(x) + 3 \Rightarrow f'(0) = 1 + 3 = 4$

   $f(x) = -e^{-4x} \Rightarrow f'(x) = 4e^{-4x} \Rightarrow f'(0) = 4e^{-4 \cdot 0} = 4$

Aus 1. und 2. folgt, dass sich $K_f$ und $K_h$ an der Stelle $x_0 = 0$ berühren.

## Lösung zu Aufgabe 2

Es ist zu Zeigen, dass die Funktionswerte von $f(x)$ und $h(x)$ an der Stelle $x_0$ gleich sind und beide Funktionen an der Stelle $x_0$ die gleiche Steigung besitzen:

1. $f(0) = \cos(0) + 2 \cdot 0 = 1$

   $f(0) = e^{2 \cdot 0} = 1$

2. $f(x) = \cos(x) + 2x \Rightarrow f'(x) = -\sin(x) + 2 \Rightarrow f'(0) = 0 + 2 = 2$

   $f(x) = e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow f'(0) = 2e^{2 \cdot 0} = 2$

Aus 1. und 2. folgt, dass sich $K_f$ und $K_h$ an der Stelle $x_0 = 0$ berühren.

## Lösung zu Aufgabe 3

Setze $f(x) = 0$:

$$\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - 1 = 0 \quad |+1$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}x\right) = 1 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 2n\pi \qquad \text{für ein beliebiges } n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{3}n\pi$$

$$\Rightarrow x \in \left\{0, \frac{4}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, 4\pi\right\}$$

Nullstellen: $N_1(0 \mid 0)$, $N_2\left(\frac{4}{3}\pi \mid 0\right)$, $N_3\left(\frac{8}{3}\pi \mid 0\right)$, $N_4(4\pi \mid 0)$

## Lösung zu Aufgabe 4

1. A kann nicht das Schaubild von $f$ sein, da durch das negative Vorzeichen die Kurve im Schnittpunkt mit der y-Achse eine negative Steigung haben muss.

   C kann nicht das Schaubild von $f$ sein, da die Kurve in C um eine Einheit nach unten verschoben ist. Das Schaubild von $f$ ist jedoch nach oben verschoben.

2. $f(x) = -\frac{3}{2}\sin(2x) + 1$

## Lösung zu Aufgabe 5

$a = 3$, $b = -1$

## Lösung zu Aufgabe 6

Setze $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{2} &= 0 && \Big| +\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\cos(2x) &= \frac{1}{2} && \Big| \div\frac{1}{2} \\ \cos(2x) &= 1 && \Rightarrow \quad 2x = 2n\pi \\ & && \Rightarrow \quad x = n\pi \\ & && \Rightarrow \quad x \in \{-\pi\,,\ 0\,,\ \pi\,,\ 2\pi\} \end{aligned}$$

für ein beliebiges $n \in \mathbb{Z}$

Nullstellen: $N_1(-\pi \mid 0)$, $N_2(0 \mid 0)$, $N_3(\pi \mid 0)$, $N_4(2\pi \mid 0)$

## Lösung zu Aufgabe 7

1. A kann nicht das Schaubild von $f$ sein, da durch das positive Vorzeichen die Kurve rechts von der y-Achse eine fallen muss.

   B kann nicht das Schaubild von $f$ sein, da die Kurve in B um eine halbe Einheit nach oben verschoben ist. Das Schaubild von $f$ ist jedoch nach unten verschoben ist.

2. $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{2}$

## Lösung zu Aufgabe 8

$a=4$, $b=1$

## Lösung zu Aufgabe 9

$x = \frac{7}{9}$

## Lösung zu Aufgabe 10

$x = \frac{1}{3}$

## Lösung zu Aufgabe 11

1. Schaubild A gehört nicht zu $K_f$, da die Amplitude des Graphen in Schaubild A $a = \frac{3}{2}$ ist.

   Schaubild C gehört ebenfalls nicht zu $K_f$, da die Periode des in C dargestellten Graphen die Länge $\pi$ hat. $K_f$ Hat jedoch eine Periode von $4\pi$ .

2. $f(x) = \frac{3}{2}\sin(x)-1$

## Lösung zu Aufgabe 12

1. $$\begin{aligned} 0{,}5\cos(x)+1 &= 1{,}5 && \mid -1 \\ 0{,}5\cos(x) &= 0{,}5 && \mid \div 0{,}5 \\ \cos(x) &= 1 \end{aligned}$$
   $\Rightarrow \ x_1 = 0,\ \ x_2 = 2\pi$
2. Setze $f(x) = 0$:
   $$\begin{aligned} 0{,}5\cos(x)+1 &= 0 && \mid -1 \\ 0{,}5\cos(x) &= -1 && \mid \div 0{,}5 \\ \cos(x) &= -2 \end{aligned}$$
   Es ist aber $-1 \leqslant \cos(x)$ für alle $x$.

## Lösung zu Aufgabe 13

$x = \frac{16}{9}$

## Lösung zu Aufgabe 14

$x = \frac{7}{6}$

## Lösung zu Aufgabe 15

1. Schaubild B gehört nicht zu $K_f$, da die Amplitude des Graphen in Schaubild B $a = \frac{3}{2}$ ist.

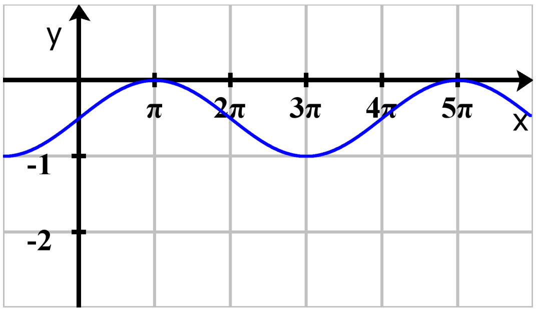
   Schaubild C gehört ebenfalls nicht zu $K_f$, da die Periode des in C dargestellten Graphen die Länge $2\pi$ hat. $K_f$ Hat jedoch eine Periode von $3\pi$.
2. $f(x) = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{2}$

## Lösung zu Aufgabe 16

1. $$\begin{aligned} 1{,}5\cos(x)+2 &= 3{,}5 && \mid -2 \\ 1{,}5\cos(x) &= 1{,}5 && \mid \div 1{,}5 \\ \cos(x) &= 1 \end{aligned}$$
   $\Rightarrow \ x_1 = 0,\ \ x_2 = 2\pi$
2. Setze $f(x) = 0$:
   $$\begin{aligned} 1{,}5\cos(x)+2 &= 0 && \mid -2 \\ 1{,}5\cos(x) &= -2 && \mid \div 1{,}5 \\ \cos(x) &= -1{,}\overline{3} \end{aligned}$$
   Es ist aber $-1 \leqslant \cos(x)$ für alle $x$ und somit besitzt $K_f$ keine Nullstellen. Da $K_f$ nach oben verschoben ist, muss sie oberhalb der $x$-Achse verlaufen.

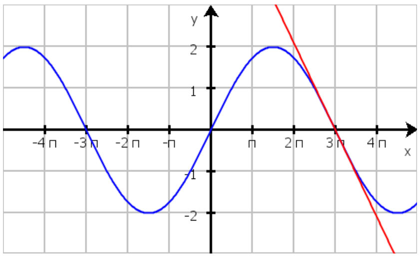
## Lösung zu Aufgabe 17

1. 


2. Die Periode ist $p=4\pi$ (sie ist unabhängig von $t$).
3. Schnittpunkt mit der y-Achse:
   $f_2(0)=\frac{1}{2}(\sin(0)-1)=\frac{1}{2}(-1)=-\frac{1}{2}$
   Schnittpunkte mit der x-Achse:
   $$\begin{aligned} f_2(x) &= 0 \\ \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-1\right) &= 0 \quad |\cdot 2 \\ \sin\left(\frac{1}{2}x\right)-1 &= 0 \quad |+1 \\ \sin\left(\frac{1}{2}x\right) &= 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}x &= \frac{1}{2}\pi \quad |\cdot 2 \\ x &= \pi \end{aligned}$$
   Mit der Periode und dem Definitionsbereich ergibt sich:
   $N_1(\pi \mid 0)$ und $N_2(5\pi \mid 0)$ sind einzige Nullstelle von $K_2$.
4. Bilde die 1. Ableitung: $f_t'(x)=\frac{t}{8}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$
   Setze $f_t'(x)=-\frac{1}{2}$:
   $$\begin{aligned} \frac{t}{8}\cos(\pi) &= -\frac{1}{2} \\ -\frac{t}{8} &= -\frac{1}{2} \quad |\cdot(-8) \\ t &= 4 \quad \left|\div\frac{t}{8}\right. \end{aligned}$$
   Für $t=4$ hat $K_t$ an der Stelle $x=2\pi$ die Steigung $m=-\frac{1}{2}$.

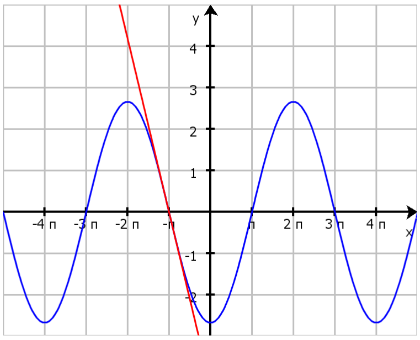
## Lösung zu Aufgabe 18

1. 

$\Rightarrow \ f'(3\pi) = -\frac{2}{3}$

2. $f'(-3\pi) = 0$ ist falsch, da $K_f$ an der Stelle $x = -3\pi$ fällt.
   $f'(0) = -1$ ist falsch, da $K_f$ an der Stelle $x = 0$ steigt.
   $f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$ ist wahr, da $K_f$ an der Stelle $x = \frac{3}{2}\pi$ einen Hochpunkt besitzt.

## Lösung zu Aufgabe 19

1. 

$\Rightarrow \ f'(-\pi) = -\frac{4}{3}$

2. $f'(-2\pi) = 0$ ist wahr, denn an der Stelle $x = -2\pi$ hat $K$ eine waagerechte Tangente.
   $f'(0) = 0$ ist wahr, denn an der Stelle $x = 0\pi$ hat $K$ eine waagerechte Tangente.
   $f'(\pi) = -3$ ist ist falsch, denn an der Stelle $x = \pi$ hat $K$ eine positive Steigung.