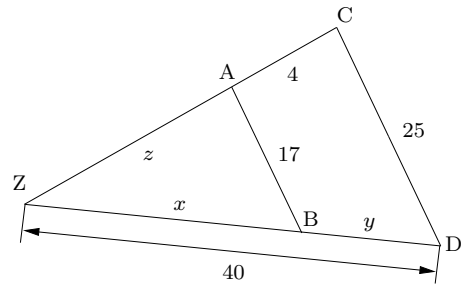


Strahlensatz allgemein

1. In nebenstehender Abbildung (nicht maßstabsgetreu) gilt $AB \parallel CD$.

(a) Berechne x , y und z .

(b) Eine zentrische Streckung mit dem Zentrum Z , die A in C überführt, bildet ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $A = 578 \text{ cm}^2$ in ein Dreieck mit dem Flächeninhalt A' ab. Berechne A' .



Lösung: (a) $\frac{x}{40} = \frac{17}{25} \implies x = \frac{17 \cdot 40}{25} = 27,2, \quad y = 40 - x = 12,8$

$$\frac{z+4}{z} = 1 + \frac{4}{z} = \frac{25}{17} \implies \frac{4}{z} = \frac{8}{17} \implies z = \frac{4 \cdot 17}{8} = 8,5$$

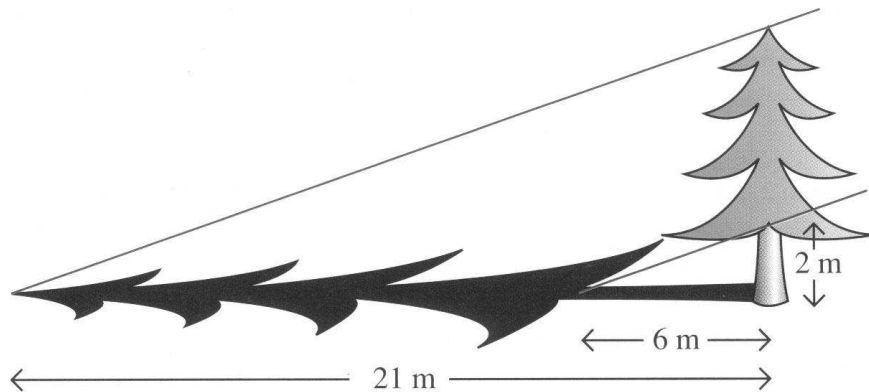
(b) $k = \frac{25}{17} \implies A' = k^2 A = \frac{25^2 \cdot 578 \text{ cm}^2}{17^2} = 1250 \text{ cm}^2$

2. Ein Baum und sein Schatten

Greta Grübel hat an einem Baum und an seinem Schatten Längen gemessen.

Wie kann Greta die Höhe des Baumes berechnen?

Funktioniert die Methode auch, wenn der Baum an einem (geraden) Hang steht? Begründe!

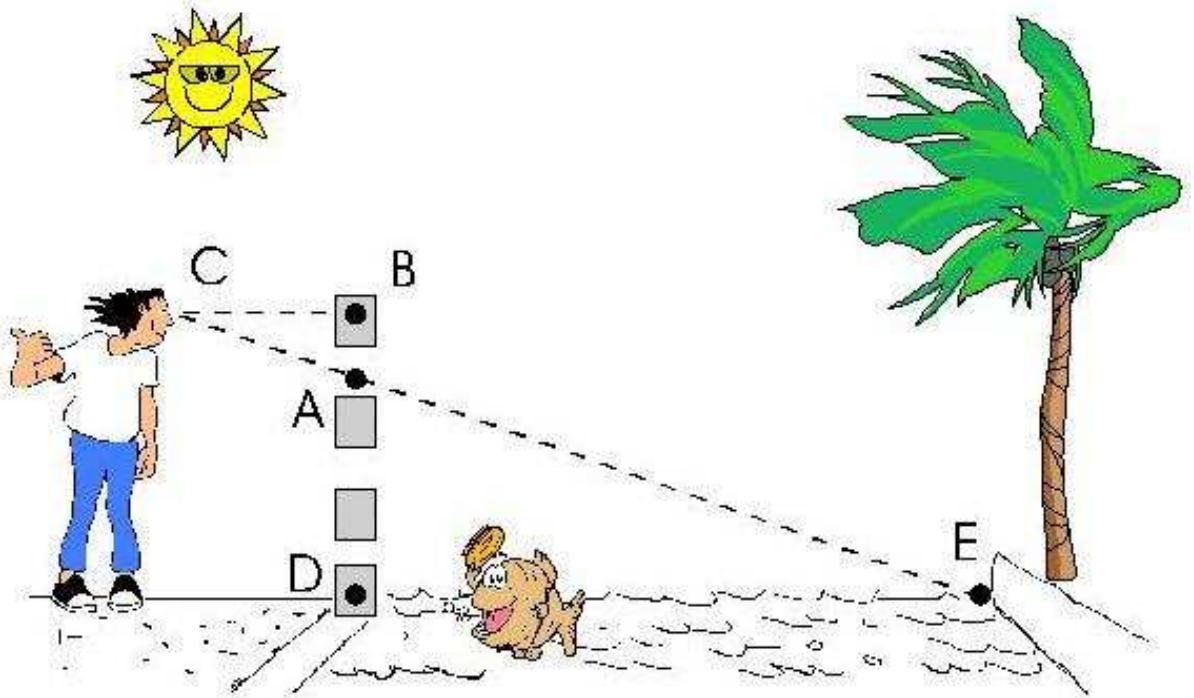


Quelle: Abakus 9, S.99

Lösung: $\frac{h}{2} = \frac{21}{6}$
 $h = 7 \text{ m}$

3. Wie Leonardo da Vinci die Breite eines Flusses bestimmte

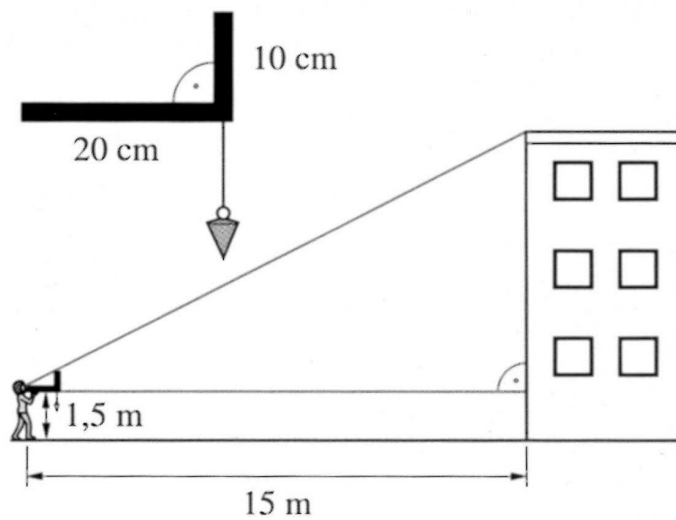
Der italienische Maler und Bildhauer Leonardo da Vinci (1452 – 1519) schlug vor, die Breite eines Flusses wie in der Abbildung dargestellt zu bestimmen.



Quelle: Bigalke: Einführung in die Mathematik; Diesterweg

Lösung: Zahlenvorschlag: $|BC| = 1 \text{ m}$; $|AB| = 20 \text{ cm}$; $|AD| = 1,5 \text{ m}$
 $\frac{0,2}{1} = \frac{1,5}{x}$ wobei $x = 7,5$

4. Das Försterdreieck



Martina findet in einem Bastelheft eine Anleitung zum Bau eines Peilgerätes, mit dem man Höhen messen kann. Die Anwendung des Peilgerätes wird dort durch die nebenstehende Zeichnung erklärt.

Martina erfährt von ihrem Vater, dass Förster mit einem ähnlichen Gerät die Höhe von Bäumen bestimmen. Ein solches „Försterdreieck“ ist ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck.

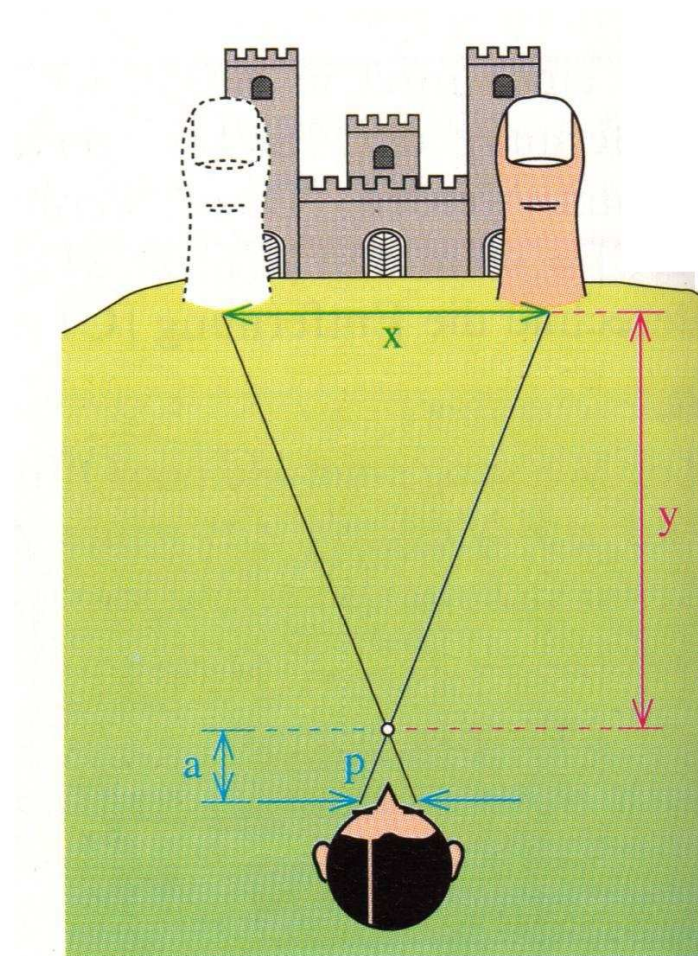
- Warum ist das Försterdreieck praktischer als das Peildreieck aus dem Bastelheft?
- Wie hoch ist ein 18 m entfernter Baum, den ein Förster aus 1,8 m Augenhöhe anpeilt?

Quelle: Mathematik 9, Cornelsen (1995)

Lösung:

- $\frac{1500}{20} = \frac{x}{10}$
- $\frac{1500}{20} = \frac{x}{20}$

5. Der Daumensprung



Strecke einen Arm aus und visiere den Daumen zunächst mit dem linken Auge, dann mit dem rechten Auge an.

Du bemerkst, dass der Daumen einen „Sprung“ im Gelände macht. Diese Tatsache benutzt man, um Entfernungen in der Landschaft zu schätzen (Daumensprungmethode).

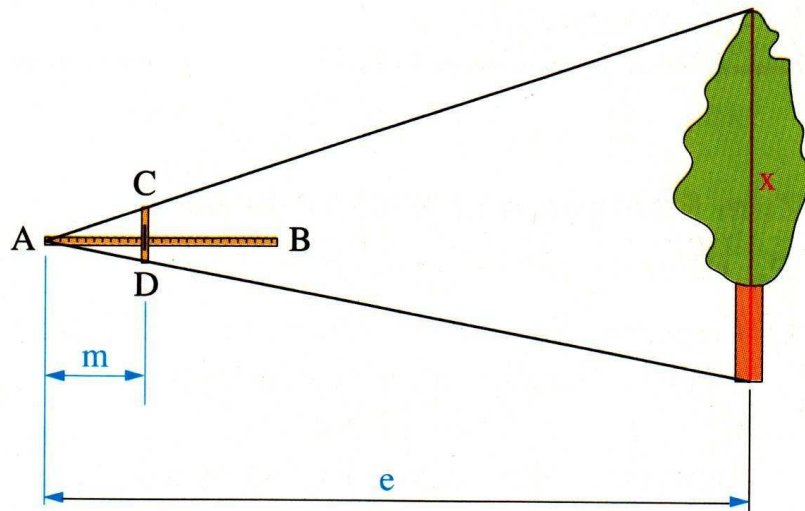
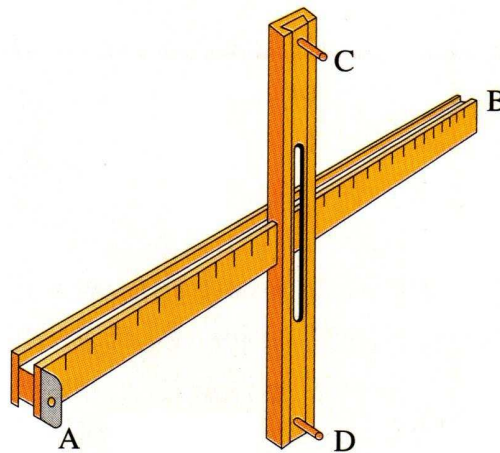
Wie ist es möglich, die Entfernung zu dem Schloss zu „schätzen“??

Quelle: Mathematik heute 9 (1996)

Lösung: $\frac{e}{l} = \frac{s}{a}$

6. Der Jakobsstab





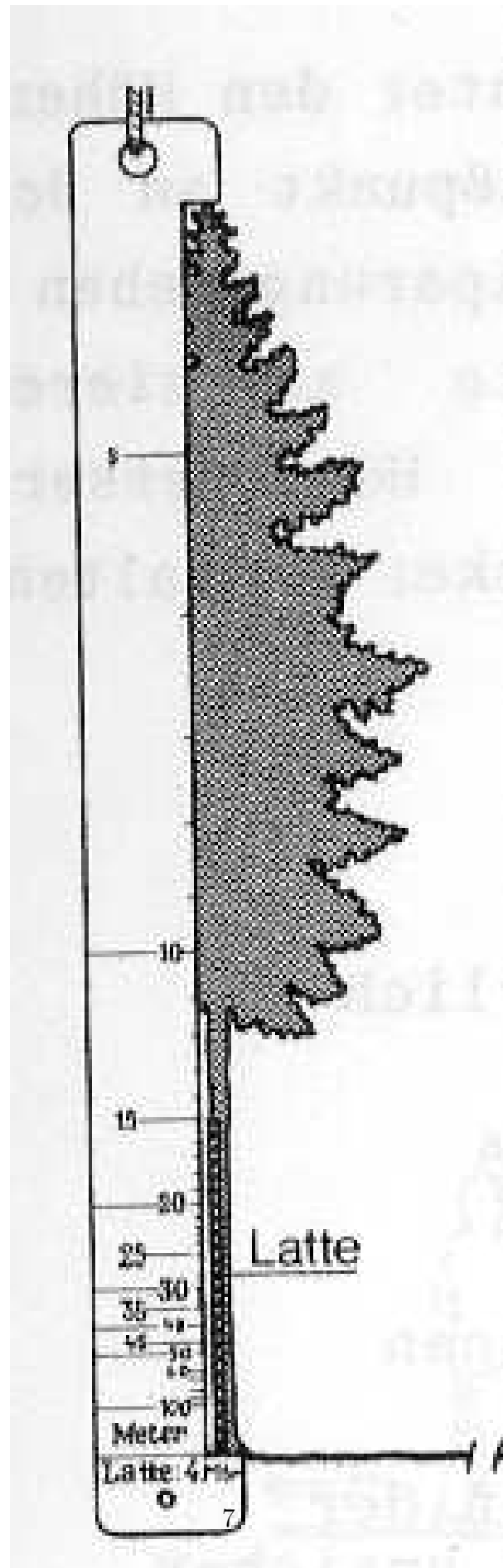
Die obigen Bilder zeigen in zeitgenössischen Darstellungen aus dem 16. Jahrhundert den Gebrauch des Jakobsstabs. Dieser ist ein kreuzförmiges Holz mit verschiebbarer Vertikalen. Beispielsweise wurde die Entfernung zwischen zwei Punkten (Stern und Mond) mit diesem Gerät angenähert ermittelt.

Wie kann dies geschehen? Welche Größen braucht man gegebenenfalls?

Quellen: Mathematik heute 9 (1996) Bigalke (1986), Diesterweg

Lösung: $\frac{x}{e} = \frac{|CD|}{m}$

7. Der Baumhöhenmesser von Christen



In einem Leitfaden für Förster wird der Höhenmesser von CHRISTEN beschrieben. Er besteht aus einem einfachen Metall-Lineal mit einer 30 cm ($= |bc|$) langen Aussparung. Von einem geeigneten Standpunkt aus muss der Beobachter den Höhenmesser so halten, dass er gleichzeitig den Baumfußpunkt an der unteren und die Baumspitze an der oberen Linealaussparung sehen kann. Gleichzeitig muss er die Spitze der 4 m-Latte anvisieren und die entsprechende Höhe aus der Einteilung des Höhenmessers ablesen. Bei der Messung ist der Höhenmesser so locker zu halten, dass er senkrecht hängt.

Als Vorteil wird gepriesen, dass keine Entfernungsmessung notwendig und nur eine Ablesung am Instrument erforderlich ist. (Als Nachteil gilt der Transport einer 4 m-Latte durch das Dickicht, wobei schon so manches Wildschwein aufgeschreckt worden sein soll!)

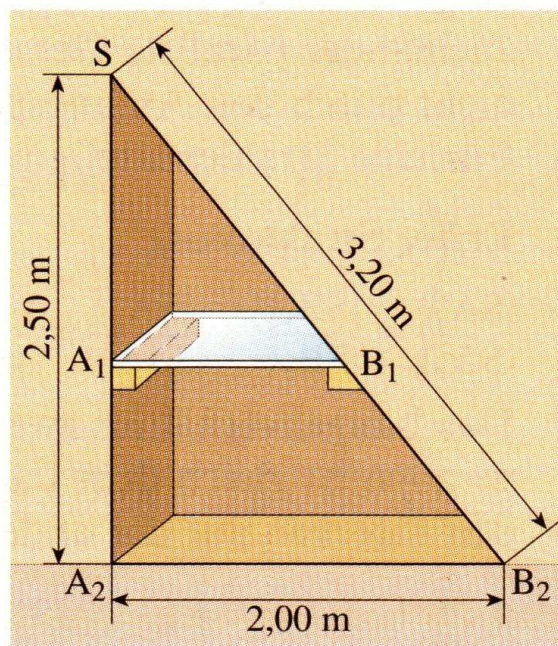
Überprüfe diese Behauptung und kläre das Messverfahren auf!

Lösung: $\frac{0,3}{h} = \frac{x}{4}$; $h = \frac{1,2}{x}$; $x = \frac{1,2}{h}$

Für verschiedene Baumhöhen lassen sich folgende x -Werte berechnen:

Höhe in m	4	5	6	8	10	12	15	20	30	35	40
X in cm	30	24	20	15	12	10	8	6	4	3,4	3

8. Das Regal im Dachgiebel



In der Nische einer Dachschräge soll in 1,00 m Höhe ein Boden aus Glas angebracht werden.

- An welcher Stelle des schrägen Brettes muss ein Träger für den Boden angebracht werden?
- Wie lang muss der Glasboden sein? Löse diese Aufgaben rechnerisch; begründe.

Quelle: Schroedel, Elemente 9

- Lösung:* (a) $\frac{1,5}{2,5} = \frac{x}{3,2}$, also $x = 1,92$
(b) $\frac{1,5}{2,5} = \frac{x}{2}$, also $x = 1,2$

9. Anwendungen der Strahlensätze

Eine Kleinbildkamera macht Negativbilder der Größe $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$.

- (a) Geben die üblichen Vergrößerungsmaße das ganze Bild wieder? ($7 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$; $9 \text{ cm} \times 13 \text{ cm}$; $10 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$; $13 \text{ cm} \times 18 \text{ cm}$)
(b) Gib, falls möglich, den Vergrößerungsfaktor an.

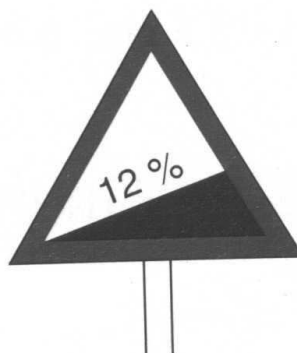


- Lösung:* (a) gemeint: nur 10×15 tut's
(b) 2,4

10. Anwendungen der Strahlensätze

Im Gebirge sieht man häufig Straßenschilder, die die Steigung bzw. das Gefälle einer Straße in Prozent angeben. 12% bedeutet z.B., dass die Straße auf 100 m horizontal gemessen um 12 m ansteigt.

- (a) Welchen Höhenunterschied überwindet die Straße auf 2,3 km?
(b) Was bedeutet 100% Steigung?
(c) Was steht auf dem Schild, wenn eine Straße auf 3,8 km einen Höhenunterschied von 285 m überwindet.

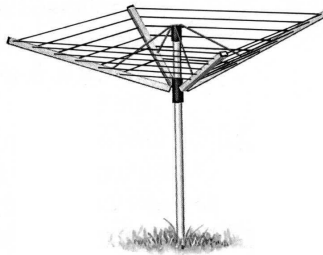


Lösung: $a = 276 \text{ m}$; $c = 7,5\%$

11. Anwendungen der Strahlensätze

Eine Wäschespinne hat sechs Leinen. Sie sind im Abstand von $12,5 \text{ cm}$ gespannt. Die innerste Leine ist $30,5 \text{ cm}$ vom Mittelpunkt entfernt und ist vier mal 40 cm lang.

- (a) Wie lang ist die äußerste Leine?
- (b) Wie viel Meter Leine steht auf der Wäschespinne insgesamt zur Verfügung?

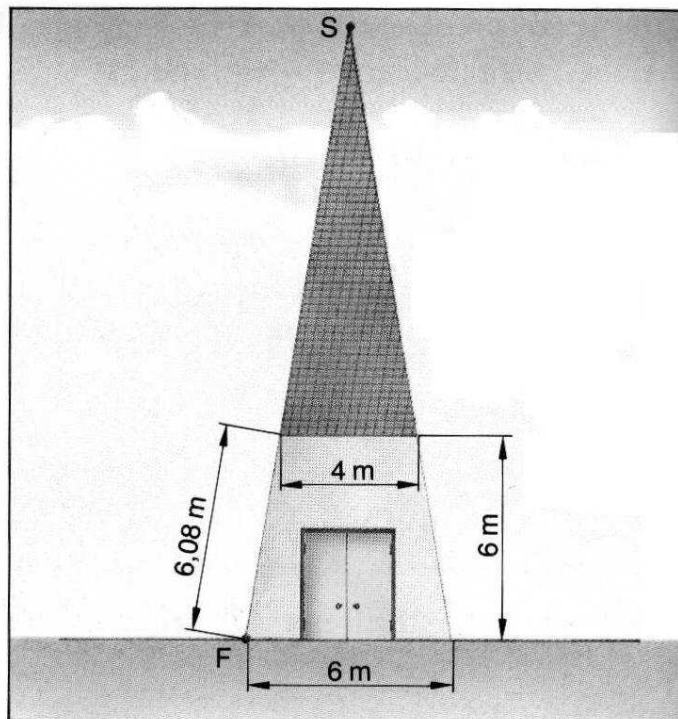


Lösung: ca. 1950 m

12. Anwendungen der Strahlensätze

Ein Kirchturm wird wie in der Zeichnung dargestellt vermessen.

- (a) Wie hoch ist der Turm?
- (b) Wie lang ist eine Kante?



Lösung: (a) 18 m
(b) 20,4 m

13. Anwendungen der Strahlensätze

Ein Försterdreieck ist ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck. Du willst die Höhe eines Turmes mit Hilfe eines Försterdreiecks bestimmen. Beschreibe dein Vorgehen.

Begründe, warum diese Methode funktioniert.

Benutze in deiner Erklärung den Begriff „ähnlich“.

Lösung:

14. Anwendungen der Strahlensätze

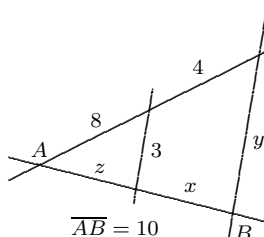
- (a) Eine Kreisscheibe mit 8 cm Durchmesser bedeckt genau den Vollmond, wenn sie 8 m 84 cm 7 mm vom Auge entfernt ist. Zur gleichen Zeit wird die Entfernung Erde-Mond mit einem Radarstrahl zu 384400 km bestimmt. Berechne den Durchmesser des Mondes!
- (b) Bei einer totalen Sonnenfinsternis bedeckt der Mond genau die Sonne, die zu dieser Zeit 149600000 km von der Erde entfernt ist. Welchen Durchmesser hat die Sonne, wenn die Entfernung Erde-Mond zum Zeitpunkt der Sonnenfinsternis 373600 km beträgt?



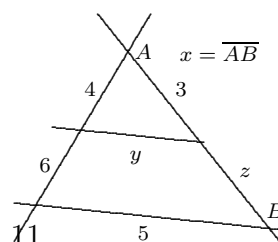
Lösung: (a) 3476 km
(b) 1392000 km

15. Berechne jeweils x , y und z :

(a)

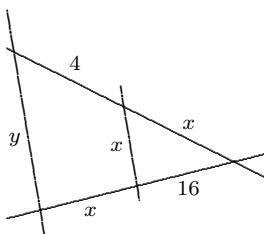


(b)



Lösung: (a) $x = \frac{10}{3}$, $y = 4,5$, $z = \frac{20}{3}$ (b) $x = 7,5$, $y = 2$, $z = 4,5$

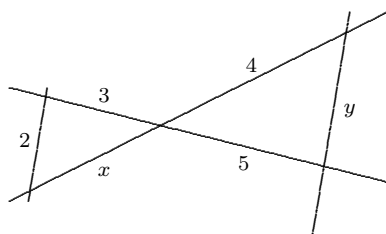
16. Berechne x und y :



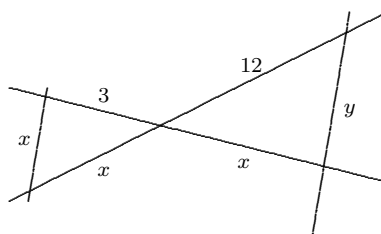
Lösung: $x = 8$, $y = 12$

17. Berechne jeweils x und y :

(a)



(b)



Lösung: (a) $x = 2,4$, $y = \frac{10}{3}$ (b) $x = 6$, $y = 12$

18. $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$ und $\overline{CD} < \overline{AB}$, S ist der Schnittpunkt der Geraden AD und BC . Drücke $x = \overline{DS}$ und $y = \overline{BS}$ durch die Trapezseiten $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ und $d = \overline{DA}$ aus!

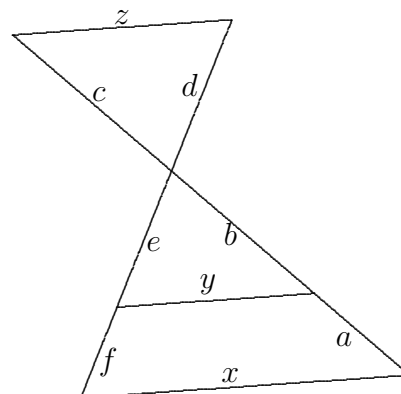
Lösung: $x = \frac{bc}{a-c}$ $y = \frac{dc}{a-c}$

19. Ergänze so oft, wie angegeben, zu Verhältnissgleichungen, die in der nebenstehenden (nicht maßstäblichen) Strahlensatzfigur gültig sind.

(a) $\frac{c}{b} = \dots = \dots = \dots$

(b) $\frac{x}{y} = \dots = \dots$

(c) $\frac{f+e}{f} = \dots$



Lösung: (a) $\frac{e}{b} = \frac{d}{c} = \frac{f}{a} = \frac{e+f}{b+a}$

(b) $\frac{x}{y} = \frac{f+e}{e} = \frac{a+b}{b}$

(c) $\frac{f+e}{f} = \frac{b+a}{a}$

20. Ein Trapez $ABCD$ hat die Seitenlängen $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ und $\overline{CD} = 2,5 \text{ cm}$. Es ist $AB \parallel CD$. S sei der Schnittpunkt der Geraden AD und BC , wobei $\overline{AS} = 4,8 \text{ cm}$ und $\overline{BS} = 7,2 \text{ cm}$.

- (a) Berechne die Seitenlängen $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$! Fertige dazu eine Skizze an!
 (b) Berechne das Verhältnis der Trapezfläche zur Fläche des Dreiecks DCS !

Lösung: (a): $\overline{BC} = 4,2 \text{ cm}$, $\overline{AD} = 2,8 \text{ cm}$ (b): $A_{ABCD} : A_{DCS} = 119 : 25$

21. Das Trapez $ABCD$ hat die Maße $\overline{AD} = 3 \text{ cm}$, $\overline{CD} = 3 \text{ cm}$ und $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$. Die Seiten AD und BC schneiden sich in T , die Diagonalen in S . Ferner ist $\overline{AS} = 2,5 \text{ cm}$.

- (a) Berechne $\overline{DT}$.
 (b) In welchem Verhältnis teilen sich die Diagonalen? Berechne $\overline{AC}$.
 (c) Die Parallele zu AB durch S schneidet AD in E . Berechne $\overline{AE}$.

Lösung: $\overline{DT} = 4,5 \text{ cm}$. Die Diagonalen teilen sich im Verhältnis $5 : 3$, daraus ergibt sich $\overline{AC} = 4 \text{ cm}$.
 $\overline{AE} = \frac{5}{8} \cdot 3 \text{ cm}$.

22. $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$, $a = \overline{AB} = 7 \text{ cm}$ und $c = \overline{CD} = 4 \text{ cm}$. AB und CD haben den Abstand $d = 3 \text{ cm}$. S ist der Schnittpunkt der Geraden AD und BC . Berechne die Fläche des Dreiecks DCS zunächst in allgemeinen Größen und dann speziell für die angegebenen Zahlenwerte.

Lösung: $A = \frac{c^2 d}{2(a-c)} = 8 \text{ cm}^2$

23. In der folgenden (nicht maßstabsgetreuen) Figur gilt $g \parallel h$.

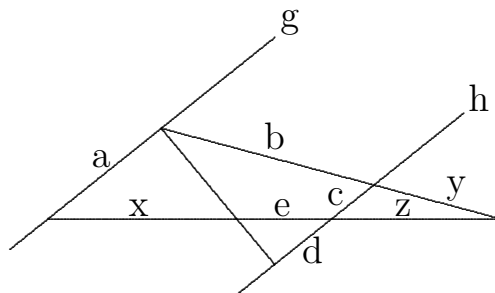
Gegeben sind die Streckenlängen:

$$a = 3,5 \text{ cm}$$

$$b = 5,2 \text{ cm}$$

$$c = d = 1,5 \text{ cm}$$

$$e = 2,1 \text{ cm}$$



(a) Berechne die Streckenlänge x !

(b) Berechne die Streckenlänge y !

(Falls Du (a) nicht lösen konntest, rechne mit dem Ersatzwert $x = 5,9 \text{ cm}$ weiter!)

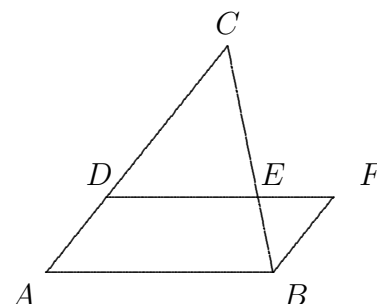
(c) Berechne die Streckenlänge z !

Lösung: (a) $x = 4,9 \text{ cm}$ (b) $y = 3,9 \text{ cm}$ (c) $z = 5,25 \text{ cm}$

24. Das Parallelogramm $ABCD$ hat die Seitenlängen $\overline{DF} = 10,5 \text{ cm}$ und $\overline{BF} = 2 \text{ cm}$.

(a) Berechne $\overline{DE}$ aus $\overline{DC} = 5 \text{ cm}$.

(b) Gib das Verhältnis $\overline{CE} : \overline{CB}$ an. Zeige, daß man dieses Verhältnis auf zwei verschiedene Weisen berechnen kann.



Lösung: $\overline{DE} = 7,5 \text{ cm}$, $\overline{CE} : \overline{CB} = \overline{DE} : \overline{AB} = \overline{DC} : \overline{AC} = \frac{5}{7}$

25. In der folgenden (nicht maßstabsgetreuen) Figur gilt $ED \parallel AB$.

Gegeben sind die Streckenlängen:

$$\overline{AB} = 6,0 \text{ cm}$$

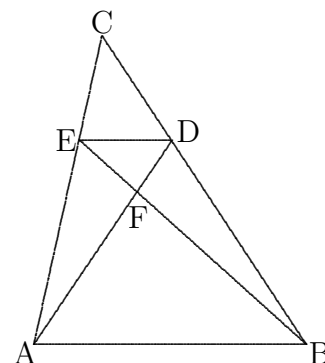
$$\overline{ED} = 2,0 \text{ cm}$$

$$\overline{EB} = 6,7 \text{ cm}$$

$$\overline{FD} = 1,4 \text{ cm}$$

$$\overline{AE} = 4,7 \text{ cm}$$

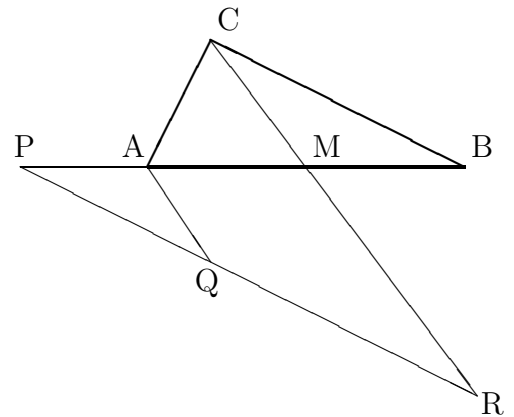
$$\overline{BC} = 8,2 \text{ cm}$$



Berechne die Streckenlängen $\overline{AF}$, $\overline{BF}$, $\overline{CD}$ und $\overline{AC}$!

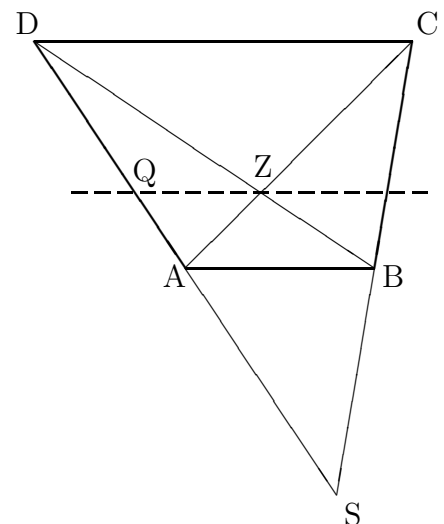
Lösung: $\overline{AF} = 4,2 \text{ cm}$; $\overline{BF} \approx 5,0 \text{ cm}$; $\overline{CD} \approx 2,7 \text{ cm}$; $\overline{AC} \approx 7,0 \text{ cm}$

26. In nebenstehender Figur ist M der Mittelpunkt der Seite $[AB]$ im Dreieck ABC . Ferner ist bekannt:
 $PR \parallel BC$, $AQ \parallel MR$.
 Gegeben sind außerdem die Streckenlängen:
 $\overline{BC} = 6,0 \text{ cm}$; $\overline{CM} = 4,0 \text{ cm}$;
 $\overline{AB} = 7,0 \text{ cm}$; $\overline{MR} = 6,0 \text{ cm}$.
 Man berechne:
 $\overline{PR}$, $\overline{AP}$ (Erg.: $1,75 \text{ cm}$), $\overline{AQ}$.



Lösung: $\overline{PR} = 9 \text{ cm}$; $\overline{AQ} = 2 \text{ cm}$

27. Die Parallele zu den Grundseiten eines Trapezes $ABCD$ durch den Diagonalschnittpunkt Z schneidet die Seite $[AD]$ im Punkt Q . Die Geraden AD und BC schneiden sich im Punkt S . Für das Trapez ist gegeben:
 $\overline{AB} = 14 \text{ cm}$; $\overline{DZ} : \overline{BZ} = 5 : 2$.



- Berechne $\overline{DC}$!
- In welchem Teilverhältnis teilt S die Strecke $[DA]$?
- Berechne $\overline{QZ}$!

Lösung: (a): 35 cm (b): $-2,5$ (c): 10 cm

28. In einem Dreieck ABC wird durch einen Punkt D auf $[AB]$ eine Parallele zu BC gezogen. Sie schneidet AC im Punkt E . Es sei gegeben:
 $\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 4$; $\overline{DE} = 3 \text{ cm}$; $\overline{CE} - \overline{AE} = 3 \text{ cm}$.

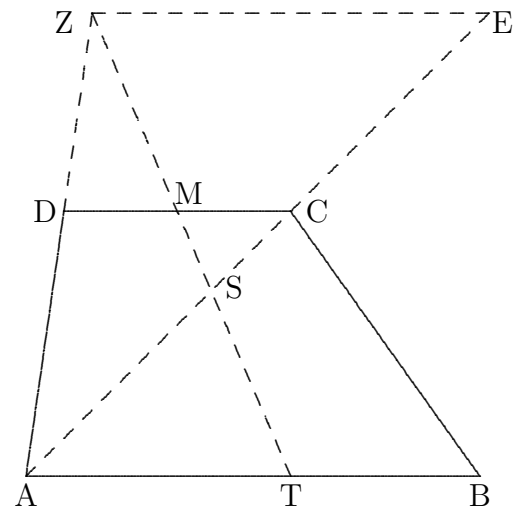
- Erstelle zunächst eine große und saubere Überlegungsskizze!
- Berechne $\overline{BC}$!
- Berechne $\overline{CE}$!
- Die Geraden BE und CD schneiden sich im Punkt F . Es gelte $\overline{CF} = 7 \text{ cm}$. Berechne $\overline{CD}$! (Ergebnis: $\overline{CD} = 10 \text{ cm}$)

- (e) Die Parallele zu BC durch F schneidet AC im Punkt H .
Gib das Verhältnis $\overline{HC} : \overline{HE}$ an und begründe genau deine Antwort!

Lösung: (b): 7 cm (c): $\overline{CE} = 12\text{ cm}$ (e): $\overline{HC} : \overline{HE} = 7 : 3$

29. In der nebenstehenden, nicht maßstabsgetreuen Skizze ist $ABCD$ ein Trapez. Bekannt sind:
 $\overline{AB} = 8\text{ cm}$; $\overline{AD} = 5,5\text{ cm}$; $\overline{DC} = 3\text{ cm}$.
 M ist der Mittelpunkt von $[DC]$, Punkt T teilt die Strecke $[AB]$ innen im Verhältnis $3:2$. Ferner ist $[ZE] \parallel [AB]$.

- (a) Berechne $\overline{ZD}$! (Ergebnis: $2,5\text{ cm}$)
(b) Berechne $\overline{ZE}$! (Ergebnis: $\frac{48}{11}\text{ cm}$)
(c) In welchem Verhältnis teilt S die Strecke $[AE]$?
(d) In welchem Verhältnis teilt C die Strecke $[SE]$?



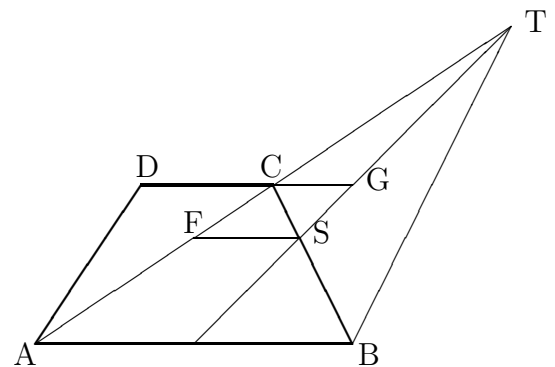
Lösung: (c): $\overline{AS} : \overline{SE} = 11 : 10$
(d): $\overline{SC} : \overline{CE} = 11 : 21$

30. In nebenstehender Skizze ist $ABCD$ ein Trapez mit $\overline{AB} = 7,0\text{ cm}$, $\overline{BC} = 4,0\text{ cm}$, $\overline{DC} = 2,5\text{ cm}$ und $AB \parallel DC$. Der Punkt S ist der Schwerpunkt des Dreiecks ABT . Ferner gilt $FS \parallel CG \parallel AB$.

- (a) Berechne ausführlich die Streckenlängen $\overline{CG}$ und $\overline{FS}$! (Teilergebnis: $\overline{FS} = \frac{7}{3}\text{ cm}$)

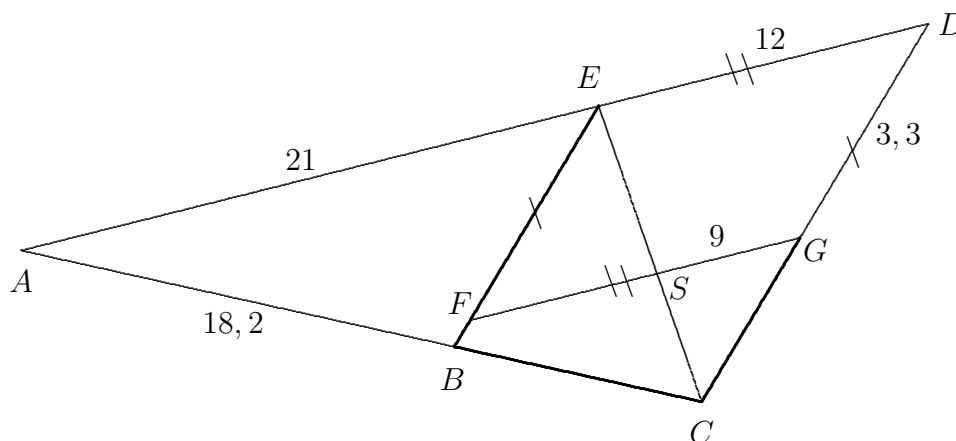
K sei der Schnittpunkt der verlängerten Trapezschenkel, H der Schnittpunkt der Geraden BF und DC . Trage K und H in die Skizze ein!

- (b) Berechne $\overline{KC}$! (Erg.: $\overline{KC} = \frac{20}{9}\text{ cm}$)
(c) Berechne $\overline{HD}$!
(d) Prüfe durch Rechnung, ob $AK \parallel BT$ ist!



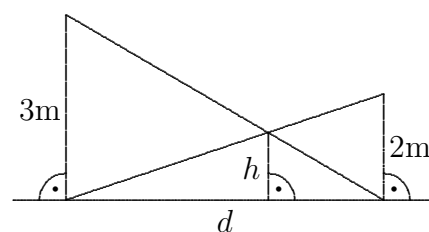
Lösung: (a): $\overline{CG} = 1,75\text{ cm}$
(c): $\overline{HD} = 1\text{ cm}$
(d): nein, da $\frac{\overline{KC}}{\overline{BC}} = \frac{5}{4} \neq \frac{1}{1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CT}}$!

31. In der (nicht maßstabsgerechten) Figur ist $DEFG$ ein Parallelogramm. Berechne $x = \overline{BC}$, $y = \overline{CG}$ und $z = \overline{BE}$ mit den angegebenen Maßen ($\overline{AB} = 18,2$ cm, $\overline{AE} = 21$ cm, $\overline{ED} = 12$ cm, $\overline{DG} = 3,3$ cm, $\overline{GS} = 9$ cm).



Lösung: $x = 10,4$ cm, $y = 9,9$ cm, $z = 8,4$ cm

32. In einem Garten stehen im Abstand d zwei Pfähle mit den Höhen 3m und 2m. Jede Pfahlspitze ist mit dem Fuß des anderen Pfahls mit einer Schnur verbunden. In welcher Höhe h treffen sich die Schnüre? Wie hängt die Höhe h vom Abstand d der Pfähle ab?



Lösung: $h = 1,20$ m, der Abstand d beeinflusst h nicht.

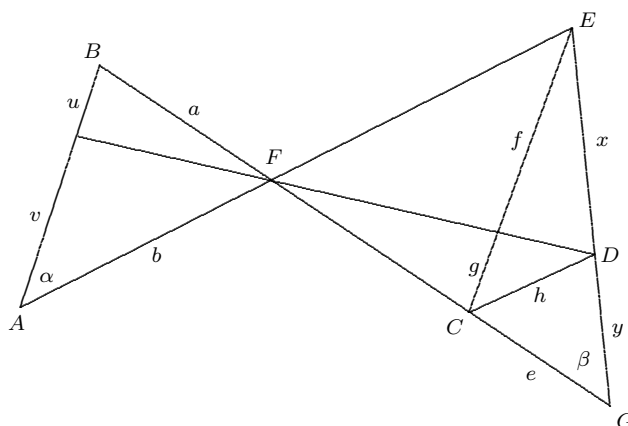
33. In nebenstehender (nicht maßstabsgetreuer) Abbildung ist folgendes bekannt:

$$\alpha = \beta$$

$$AB \parallel CE, \quad CD \parallel FE$$

$$a = 6 \text{ cm}, \quad b = 7,5 \text{ cm}$$

$$c = 10 \text{ cm}, \quad x + y = 9,375 \text{ cm}$$



- (a) Berechne $d + e$ und konstruiere die Figur! Verwende dazu ein ganzes Blatt im Querformat!

(b) Berechne in dieser Reihenfolge: d , e , x , y , h , $u + v$, $f + g$, g , f , u und v !

Lösung: (a) $\sphericalangle AFB = \sphericalangle EFG \implies \triangle AFB \sim \triangle EFG$, $d + e = 12,5 \text{ cm}$

(b) Alle Angaben in cm: $d = 8$; $e = 4,5$; $x = 6$; $y = 3,375$; $h = 3,6$; $u + v = 5,625$;
 $f + g = 7,5$; $g = 1\frac{67}{68}$; $f = 5\frac{35}{68}$; $u = 1\frac{133}{272}$ und $v = 4\frac{37}{272}$