Mengen und Schreibweise

Symoble:
X,Y,Z bezeichnen in der Regel Zufallsvariablen
Ω bezeichen den Grundraum
P die Wahrscheinlichkeit
A, B, C die Ereignisse

Aufgaben

Aufgabe 1
Ein normaler 6-seitiger Würfel wird einmal geworfen. Geben Sie die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise an:

(a) A: Die Augenzahl ist gerade.

(b) B: Die Augenzahl ist ungerade.

(c) C: Die Augenzahl ist größer als 6.

(d) D: Die Augenzahl ist keine 5.

(e) E: Die Augenzahl ist eine Quadratzahl.

(f) F: Die Augenzahl ist eine Primzahl.

Aufgabe 2
Ein Würfel wird zweimal geworfen. Geben Sie die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise an:

(a) A: Die Augensumme ist 7.

(b) B: Die Augensumme ist eine Primzahl.

(c) C: Die Augensumme ist eine Quadratzahl und ungerade.

(d) D: Das Produkt der Augenzahlen ist eine Quadratzahl.

Aufgabe 3
Ein normaler 6-seitiger Würfel wird einmal geworfen. Geben Sie die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise an:

(a) A: Die Augenzahl ist durch zwei teilbar.

(b) B: Die Augenzahl ist durch drei teilbar.

(c) C: Die Augenzahl ist keine Primzahl.

(d) Bestimmen Sie $A \cap B, A \cap C$, und $B \cap C$.

(e) Bestimmen Sie $A \cup B, A \cup C$, und $B \cup C$.

(f) Bestimmen Sie $\bar{A}, \bar{B}, \Omega \backslash C, \overline{A \cap B}, \overline{B \cap C}$, sowie $\bar{A} \cap \bar{B}$.

Aufgabe 4

Gegeben sei ein Grundraum Ω , ein Wahrscheinlichkeitsmaß P : $\mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ und zufällige Ereignisse $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit P(A) = 0.7, P(B) = 0.6
und $P(A \cap B) = 0.5$.
Berechnen Sie :

(a) $P(A \cup B)$

(b) $P(\bar{A})$

(c) $P(\bar{B})$

(d) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

(e) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

(f) $P(A \cap \bar{B})$

(g) $P(\bar{A} \cap B)$

(h) $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$

Aufgabe 5

Gegeben sei ein Grundraum Ω , ein Wahrscheinlichkeitsmaß P : $\mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ und zufällige Ereignisse $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit P(A) = 0.6, P(B) = 0.4
und $P(A \cap B) = 0.2$.
Berechnen Sie :

(a) $P(A \cup B)$

(b) $P(\bar{A})$

(c) $P(\bar{B})$

(d) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

(e) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

(f) $P(A \cap \bar{B})$

(g) $P(\bar{A} \cap B)$

(h) $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$

Aufgabe 6
Gegeben sei ein Grundraum Ω , ein Wahrscheinlichkeitsmaß P : $\mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ und zufällige Ereignisse $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit P(A) = 0.8 , P(B) = 0.5 und $P(A \cap B) = 0.4$.
Berechnen Sie :

(a) $P(A \cup B)$

(b) $P(\bar{A})$

(c) $P(\bar{B})$

(d) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

(e) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

(f) $P(A \cap \bar{B})$

(g) $P(\bar{A} \cap B)$

(h) $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$

Aufgabe 7

Beweisen Sie das de Morgansche Gesetz.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1
Grundraum: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(a) $A = \{2, 4, 6\}$

(b) $B = A^c = \Omega \backslash A = \{1, 3, 5\}$.

(c) $C = \{\emptyset\}$ unmögliches Ereigniss.

(d) $D = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

(e) $E = \{1, 4\}$

(f) $F = \{2, 3, 5\}$

Lösung zu Aufgabe 2
Grundraum:

$$\begin{aligned}\Omega \;=\; \{&(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);\\ &(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);\\ &(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);\\ &(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6);\\ &(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);\\ &(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6);\}\end{aligned}$$

(a) $A = \{(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)\}$

(b) Primzahlen $= \{2, 3, 5, 7, 11\}$

$$\begin{aligned}B \;=\; \{&(1,1);(1,2);(2,1);(1,4);(2,3);(3,2);\\ &(4,1);(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);\\ &(6,2);(5,6);(6,5)\}\end{aligned}$$

(c) $C = \{(3,6); (6,3); (4,5); (5,4)\}$

(d) $D = \{(2,2); (1,4); (4,1); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6)\}$

Lösung zu Aufgabe 3

(a) $A = \{2, 4, 6\}$

(b) $B = \{3, 6\}$

(c) $C = \{1, 4, 6\}$

(d) $A \cap B = \{6\}, A \cap C = \{4, 6\}, B \cap C\{6\}$.

(e) $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}, A \cup C = \{1, 2, 4, 6\}, B \cup C = \{1, 3, 4, 6\}$.

(f) $\bar{A} = \Omega \backslash A = \{1, 3, 5\}, \bar{B} = \Omega \backslash B = \{1, 2, 4, 5\}, \Omega \backslash C = \{2, 3, 5\}$,
$\overline{A \cap B} = \Omega \backslash A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \overline{B \cap C} = \Omega \backslash B \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$\bar{A} \cap \bar{B}$ mit $\bar{A} = \{1, 3, 5\}; \bar{B} = \{1, 2, 4, 5\} \quad \bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 5\}$.

Lösung zu Aufgabe 4
P(A) = 0.7 P(B) = 0.6 $P(A \cap B) = 0.5$

(a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad P(A \cup B) = 0.7 + 0.6 - 0.5 = 0.8$

(b) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3$

(c) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.6 = 0.4$

(d) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) =^{\text{De'Morg.}} = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0.5$

(e) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) =^{\text{D'M}} P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 = 0.2$

(f) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.5 = 0.2$

(g) $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.5 = 0.1$

(h) $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B)$
$= 0.7 + 0.6 - 2 \cdot 0.5 = 1.3 - 1.0 = 0.3$

Lösung zu Aufgabe 5
P(A) = 0.6 P(B) = 0.4 $P(A \cap B) = 0.2$

(a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = 0.6 + 0.4 - 0.2 = 0.8$

(b) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$

(c) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$

(d) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8$

(e) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 = 0.2$

(f) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.2 = 0.4$

(g) $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.2 = 0.2$

(h) $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B)$
$= 0.6 + 0.4 - 2 \cdot 0.2 = 1 - 0.4 = 0.6$

Lösung zu Aufgabe 6
P(A) = 0.8 P(B) = 0.5 $P(A \cap B) = 0.4$

(a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = 0.8 + 0.5 - 0.4 = 0.9$

(b) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.8 = 0.2$

(c) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.5 = 0.5$

(d) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.4 = 0.6$

(e) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.9 = 0.1$

(f) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.8 - 0.4 = 0.4$

(g) $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.4 = 0.1$

(h) $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B)$
$= 0.8 + 0.5 - 2 \cdot 0.4 = 1.3 - 0.8 = 0.5$

Lösung zu Aufgabe 7

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin A \cup B \\ &\iff x \notin A \text{ und } x \notin B \\ &\iff x \in A^c \text{ und } x \in B^c \\ &\iff x \in A^c \cap B^c \end{aligned}$$

Quelle: Stochastik
Mit freundlicher Unterstützung von: und http://www.gogirlglow.de