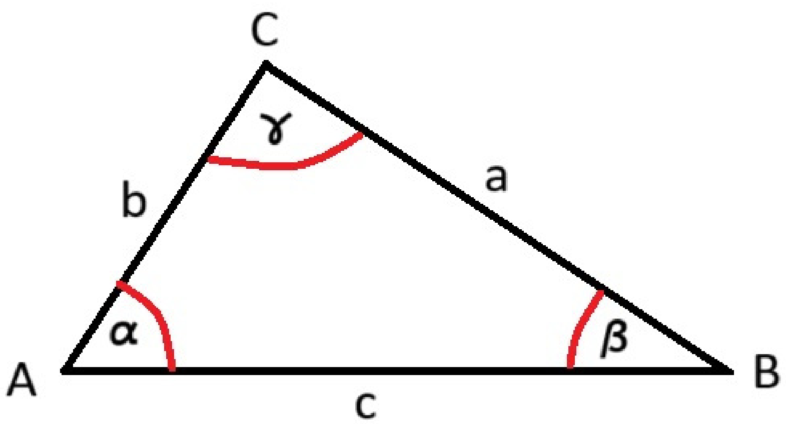
12.5 Sinussatz

Den Sinussatz kann allgemein in Dreiecken auch ohne rechte Winkel angewendet werden, wenn ein Winkel, eine gegenüberliegende Seite und ein weiterer Winkel oder eine weitere Seite bekannt ist. Der Sinussatz „besagt", dass das Verhältnis von Seite zu ihrem gegenüberliegenden Winkel in einem Dreieck konstant ist, d.h. es gilt:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$



Somit gilt

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \quad ,$$

aber auch

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \quad ,$$

wenn wir die Gleichung umstellen.

Beispiele:
Es ist a = 4cm, $\alpha = 60°$ und $\beta = 50°$, gesucht ist b.

$$\frac{4\text{cm}}{\sin(60°)} = \frac{b}{\sin(50°)} \qquad | \cdot\sin(50°)$$

$$b = \frac{4\text{cm}}{\sin(60°)} \cdot \sin(50°) \approx 3{,}54\text{cm}$$

Es ist $\gamma = 180° - 60° - 50° = 70°$. Somit könnten wir auch c berechnen.

Als nächstes sei a = 8cm, c = 5cm, $\alpha = 100°$ gegeben, gesucht ist γ.

Es gilt:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \qquad (*)$$

Durch Umstellung der Gleichung kann gezeigt werden, dass auch

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

gilt. Wir verwenden diese Gleichung, da nur eine Umformung benötigt wird, wenn die Unbekannte im Zähler steht. Bei der Gleichung (*) müsste man erst mit sin(α) und sin(γ) multiplizieren und dann durch a teilen.

$$\frac{\sin(100°)}{8\text{cm}} = \frac{\sin(\gamma)}{5\text{cm}} \qquad | \cdot 5\text{cm}$$

$$\frac{\sin(100°)}{8\text{cm}} \cdot 5\text{cm} = \sin(\gamma)$$

$$0{,}61550\ldots = \sin(\gamma) \qquad | \sin^{-1}$$

$$\gamma \approx 37{,}99°$$

Bemerkung:
Die Sinusfunktion ist für Winkel von 0° bis 90° eindeutig, aber nicht für Winkel von 0° bis 180°. Dadurch wird bei der Berechnung eines Winkels mit dem Sinussatz der Taschenrechner einen falschen Winkel ausgeben, wenn der gesuchte Winkel größer als 90° ist, denn es gilt z.B.:

$$\sin(80°) = \sin(100°) = 0{,}98480775\ldots$$

Für $\sin^{-1}(0{,}98480775\ldots)$ gibt dann der Taschenrechner 80° aus. Diese Problem kann nicht auftreten, wenn ein gegebener Winkel bereits größer oder gleich 90° ist oder wenn beispielsweise a, b und α gegeben ist und $b \leq a$ gilt, denn dann muss auch $\beta \leq \alpha$ sein. Wenn eine Seite mit dem Sinussatz berechnet wird, ist dies kein Problem.

Aufgaben:
a) a = 8cm, b = 5cm, α = 80°, β = ?
b) b = 5cm, α = 50°, β = 60°, a = ?
c) c = 12m, b = 8m, γ = 100°, α = ?, β = ?, a = ?
d) a = 8m, β = 75°, γ = 30°, α = ?, b = ?, c = ?

Lösungen:
a) β ≈ 37,99°
b) a ≈ 4,42cm
c) a ≈ 7,66m, α ≈ 38,96°, β ≈ 41,04°
d) b = 8m, c ≈ 4,14, α = 75° (1. Schritt: α = 180° – 75° – 30°)