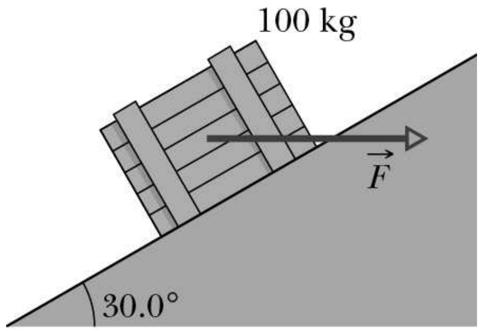
## Aufgabe 1: (10 Punkte)

**Schiefe Ebene**

Auf einer reibungsfreien, schiefen Ebene mit dem Winkel 30° befindet sich eine Kiste der Masse $m = 100\,\text{kg}$ zunächst in Ruhe. Die Kiste wird dann mit einer konstanten, horizontal wirkenden Kraft $\vec{F}$ die Ebene hinaufgezogen.

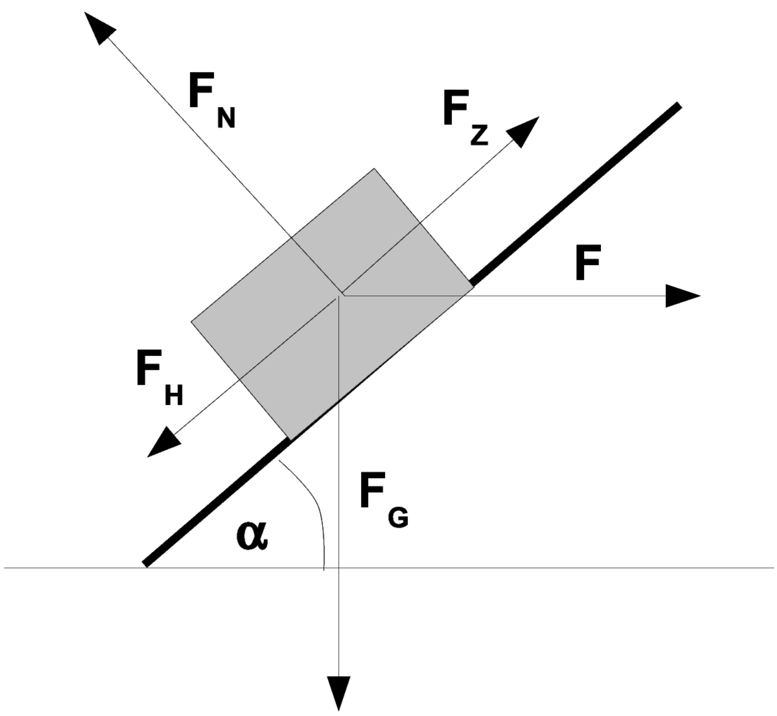



a) Zeichnen Sie das Kräftediagramm für die Kiste. Wie groß sind die Hangabtriebs- und die Normalkraft für $\vec{F} = 300 \cdot \vec{e}_x\,\text{N}$? Beachten Sie, dass die Hangabtriebskraft nur von der Gravitationskraft hervorgerufen wird.

b) Für welchen Betrag von $\vec{F}$ bleibt die Kiste gerade noch auf der Rampe liegen, ohne wieder herabzurutschen?

**Lösung:**

a)



Hangabtriebskraft: Nur Gravitationskraft

$$F_G = m \cdot g = 100\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 981\,\mathrm{N}$$
$$F_H = F_G \cdot \sin\alpha = 981\,\mathrm{N} \cdot \sin\,30^\circ = 981\,\mathrm{N} \cdot 0{,}5 = 490{,}5\,\mathrm{N}$$

Normalkraft: Gravitationskraft + Zugkraft

Gesamtkraft: $\vec{F}_{ges} = \vec{F} + \vec{F}_G$

Projektion in Richtung Normale auf Ebene ($\vec{F}_N$): $\vec{e}_N = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$

$$F_N = \vec{F}_{ges} \cdot \vec{e}_N = \begin{pmatrix} 300\,\mathrm{N} \\ -981\,\mathrm{N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$= 300\,\mathrm{N} \cdot \sin\alpha + 981\,\mathrm{N} \cdot \cos\alpha = 150\,\mathrm{N} + 849{,}6\,\mathrm{N} = 1000\,\mathrm{N}$$

b)

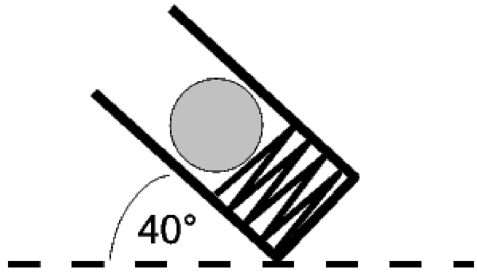
Bedingung: $F_H = F_Z$. Mit $F_H = F_G \cdot \sin\alpha$ und $F_Z = F \cdot \cos\alpha$ folgt dann:

$$F_G \cdot \sin\alpha = F \cdot \cos\alpha \Rightarrow F = \frac{F_G \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = F_G \tan\alpha = 981\,\mathrm{N} \cdot \tan 30^\circ = 566{,}4\,\mathrm{N}$$

## **Aufgabe 2**: (10 Punkte)

**Feder-Katapult**

Ein Maschinenbaustudent baut ein einfaches Katapult, das aus einer starken, masselosen Feder besteht, die in einem Winkel von 40° zur Horizontalen geneigt ist (Federkonstante: $k = 150\,\mathrm{N/m}$). Die Feder wird gestaucht und dann bis zum Abschuss fixiert. Danach wird ein Projektil der Masse $m = 50\,\mathrm{g}$ auf die Feder gelegt.




a) Die Feder wird um 50 cm zurückgezogen. Welche Kraft ist dazu erforderlich? Wie groß ist die mechanische Arbeit, die dabei verrichtet werden muss? Vernachlässigen Sie für diesen Aufgabenteil den Einfluss der Gravitationskraft.

b) In dieser Stellung wird das Projektil eingeführt und abgeschossen. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit verlässt das Geschoss das Katapult? Vernachläsigen Sie die Gravitationskraft bis zu dem Augenblick, in dem die Kugel das Katapult verlässt.

c) Wie weit fliegt das Geschoss, nachdem es das Katapult verlassen hat? Vernachlässigen Sie die Luftreibung und nehmen Sie an, dass das Projektil aus der Höhe $h = 0\,\mathrm{m}$ abgefeuert wurde.

**Lösung:**

a)

Kraft:

$$F = k \cdot \Delta x = 150\,\mathrm{N/m} \cdot 50\,\mathrm{cm} = 75\,\mathrm{N}$$

Mech. Arbeit:

$$W = \int_0^{\Delta x} F \cdot dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{50\,\mathrm{cm}} = 18{,}75\,\mathrm{J}$$

b)

Energieerhaltung:

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 18{,}75\,\mathrm{J}}{50\,\mathrm{g}}} = 27{,}4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

c)

Zurückgelegte Strecke in $y$-Richtung ($v_y = v_0 \cdot \sin\alpha$):

$$h(t) = v_y t - \frac{1}{2}gt^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow t(v_y - \frac{1}{2}gt) = 0$$
$$\Rightarrow v_y - \frac{1}{2}gt = 0 \Rightarrow t_F = \frac{2v_y}{g} = \frac{2 \cdot 27{,}4\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \sin 40^\circ}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 3{,}59\,\mathrm{s}$$

($t_F = 0$ auch Lösung, aber für Moment des Abschusses, hier nicht gebraucht)

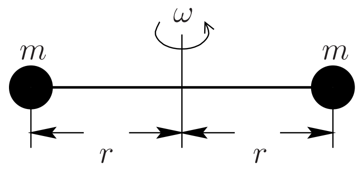
Zurückgelegte Strecke in $x$-Richtung ($v_x = v_0 \cdot \cos\alpha$):

$$s_x(t_F) = v_x \cdot t_F = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t_F = 27{,}4\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \cos 40^\circ \cdot 3{,}59\,\mathrm{s} = 75{,}4\,\mathrm{m}$$

## Aufgabe 3: (10 Punkte)

**Eiskunstläuferin**

Die Abbildung stellt das vereinfachte Modell einer Eiskunstläuferin dar, die eine Pirouette ausführt. Zwei einander gegenüberliegende Massenpunkte (Masse $m$) drehen sich dabei mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_1$ auf einem Kreis mit dem Radius $r = R_1$.




a) Wie groß ist der Betrag des Drehimpulsvektors bezüglich der Drehachse, in welche Richtung zeigt der Drehimpulsvektor und wie groß ist die kinetische Energie?

b) Die Eisläuferin verringert $r$ von $R_1$ auf $R_2 < R_1$. Wie groß sind jetzt die Winkelgeschwindigkeit $\omega$, der Drehimpuls und die kinetische Energie?

c) Stellen Sie die Energiebilanz auf. Berechnen Sie dazu die Arbeit, die die Eisläuferin beim Verringern des Massenabstandes geleistet hat.

**Lösung:**

a)

Trägheitsmoment: $I_1 = 2mr^2 = 2mR_1^2 \rightarrow$ Drehimpulsbetrag: $L_1 = I_1\omega_1 = 2mR_1^2\omega_1$
Drehimpulsvektor zeigt senkrecht zur Bewegungsebene nach oben
Rotationsenergie:

$$E_{\text{rot},1} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = mR_1^2\omega_1^2$$

b)

kein äußeres Drehmoment $\rightarrow$ Drehimpuls bleibt erhalten
neues Trägheitsmoment: $I_2 = 2mR_2^2 \rightarrow$ Winkelgeschwindigkeit

$$L_2 = I_2\omega = L_1 = I_1\omega_1 \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{2mR_1^2}{2mR_2^2}\omega_1 = \frac{R_1^2}{R_2^2}\omega_1$$

neue kinetische Energie:

$$E_{\text{rot},2} = \frac{1}{2}I_2\omega^2 = \frac{1}{2}2mR_2^2\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\omega_1\right)^2 = m\frac{R_1^4}{R_2^2}\omega_1^2$$

c)

geleistete Arbeit: $\Delta W$, Energiebilanz: $E_{\text{rot},2} = E_{\text{rot},1} + \Delta W \rightarrow$

$$\Delta W = E_{\mathrm{rot},2} - E_{\mathrm{rot},1} = m\frac{R_1^4}{R_2^2}\omega_1^2 - mR_1^2\omega_1^2 = mR_1^2\left(\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1\right)\omega_1^2$$

## Aufgabe 4: (10 Punkte)

### Harmonische Schwingung

Auf einem senkrecht auf- und abschwingenden Kolben liege ein Gewicht.

a) Angenommen, die harmonische Schwingung dieser Bewegung habe eine Periode von 1,0 s. Bei welcher Amplitude der Bewegung trennen sich das Gewicht und der Kolben kurzzeitig?

b) Angenommen, die Schwingung habe eine Amplitude von 5 cm. Bis zu welcher Frequenz sind der Kolben und das Gewicht in ständigem Kontakt?

**Lösung:**

a)

Allg. Lösung für harm. Schwingung: $A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

Ansatz: Beschleunigung der Schwingung höchstens so groß wie Erdbeschleunigung:

$$\begin{aligned} & \ddot{A}(t) = A_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi') \\ \Rightarrow\quad & a_{\max} = A_0 \omega^2 \overset{\omega = 2\pi\nu}{=} 4\pi^2 A_0 \nu^2 \overset{!}{=} g \\ \Rightarrow\quad & A_0 = \frac{g}{4\pi^2\nu^2} = \frac{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{4 \cdot (3{,}14159)^2 \cdot 1{,}0\,\mathrm{s^{-2}}} \\ & = 24{,}85\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

b)

Aus a):

$$\begin{aligned} & a_{\max} = 4\pi^2 A_0 \nu^2 \overset{!}{=} g \\ \Rightarrow\quad & \nu_{\max} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A_0}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{5\,\mathrm{cm}}} \\ & = 2{,}23\,\mathrm{s^{-1}} \end{aligned}$$

## Aufgabe 5: (10 Punkte)

**Seilwelle**

Eine sinusförmige Welle breite sich entlang eines Seils aus. Die Auslenkung eines Seilelements bei $x = 10\,\text{cm}$ verhält sich als Funktion der Zeit wie $y = 5{,}0\,\text{cm}\cdot\sin\left(1{,}0 - 4{,}0\,\text{s}^{-1}\cdot t\right)$. Die lineare Massendichte des Seils sei $\mu = 4{,}0\,\text{g/cm}$.

a) Wie groß sind die Frequenz und die Wellenlänge der Welle?

b) Wie lautet die allgemeine Gleichung der transversalen Auslenkung als Funktion von Ort und Zeit?

c) Berechnen Sie die Spannung $\tau$ in dem Seil.

**Lösung:**

a)

Wellengleichung: $y(x{,}t) = y_0 \cdot \sin(kx - \omega t)$

Für $x = 10\,\text{cm}$: $y(10\,\text{cm}{,}t) = 5{,}0\,\text{cm}\cdot\sin\left(1{,}0 - 4{,}0\,\text{s}^{-1}\cdot t\right)$

also: $\omega = 4{,}0\,\text{s}^{-1}$ und $k \cdot 10\,\text{cm} = 1{,}0 \Rightarrow k = 0{,}1\,\text{cm}^{-1}$.

Frequenz: $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4{,}0\,\text{s}^{-1}}{2\pi} = 0{,}64\,\text{s}^{-1}$

Wellenlänge: $k \cdot \lambda = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0{,}1\,\text{cm}^{-1}} = 62{,}8\,\text{cm}$.

b)

$$y(x{,}t) = 5{,}0\,\text{cm}\cdot\sin\left(0{,}1\,\text{cm}^{-1}\cdot x - 4{,}0\,\text{s}^{-1}\cdot t\right)$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{k} &= \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \\ \Rightarrow \quad \tau &= \frac{\omega^2\mu}{k^2} = \frac{(4{,}0\text{s}^{-1})^2\cdot 4{,}0\,\text{g/cm}}{(0{,}1\,\text{cm}^{-1})^2} \\ &= 6400\,\frac{\text{g cm}}{\text{s}^2} = 0{,}064\,\text{N} \end{aligned}$$

## Aufgabe 6: (10 Punkte)

### Gravitationskraft

Am Punkt $\vec{r}_1 = (2;3)\,\mathrm{m}$ befindet sich eine Kugel der Masse $m_1 = 5\,\mathrm{kg}$. An den Punkten $\vec{r}_2 = (7;3)\,\mathrm{m}$ und $\vec{r}_3 = (-1;-1)\,\mathrm{m}$ sind die Kugeln mit den Massen $m_2 = 10\,\mathrm{kg}$ bzw. $m_3 = 8\,\mathrm{kg}$ angebracht.

a) Berechnen Sie die Gravitationskräfte, die die Massen $m_2$ und $m_3$ jeweils auf $m_1$ ausüben. Geben Sie die Kräfte in vektorieller Schreibeweise an!

b) Welche gesamte Gravitationskraft $\vec{F}_{\mathrm{ges}}$ üben die Massen $m_2$ und $m_3$ auf $m_1$ aus?

c) Geben Sie den Betrag von $\vec{F}_{\mathrm{ges}}$ an.

(Gravitationskonstante: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$).

**Lösung:**

a)

Differenzvektoren und deren Beträge:

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{m}\ ,\ \vec{r}_{31} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}\mathrm{m}$$

$$|\vec{r}_{21}| = \sqrt{5^2+0^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{25}\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}\ ,\ |\vec{r}_{31}| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{25}\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}$$

Einzelkräfte:

$$\vec{F}_{2\to1} = G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\hat{\vec{r}}_{21} = G \cdot \frac{5\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{kg}}{(5\,\mathrm{m})^2}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = G \cdot \frac{10\,\mathrm{kg}^2}{25\,\mathrm{m}^2}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{3\to1} = G\frac{m_1 m_3}{r_{31}^2}\hat{\vec{r}}_{31} = G \cdot \frac{5\,\mathrm{kg}\cdot 8\,\mathrm{kg}}{(5\,\mathrm{m})^2}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = G \cdot \frac{8\,\mathrm{kg}^2}{25\,\mathrm{m}^2}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b)

Gesamtkraft (Kraftsumme):

$$\vec{F}_{\mathrm{ges}} = \vec{F}_{2\to1} + \vec{F}_{3\to1} = G \cdot \frac{1}{25}\frac{\mathrm{kg}^2}{\mathrm{m}^2}\begin{pmatrix} 50-24 \\ 0-32 \end{pmatrix} = G \cdot \frac{2}{25}\frac{\mathrm{kg}^2}{\mathrm{m}^2}\begin{pmatrix} 13 \\ -16 \end{pmatrix}$$

c)

Betrag: $|\vec{F}_{\mathrm{ges}}| = G \cdot \frac{2}{25}\frac{\mathrm{kg}^2}{\mathrm{m}^2} \cdot \sqrt{13^2+(-16)^2} = 1{,}10 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{N}$