Arbeitsbuch Mathematik

Stochastik

Lösungen

Oberstufe

Klett

LÖSUNGEN

GRUNDLAGEN

RUNDEN

1 „Du bist dran“ aus dem „So geht’s“-Kasten

a) 0,4983 ≈ 0,5 **b)** 0,4983 ≈ 0,50 **c)** 0,4983 ≈ 0,498

2 Aufgabe

a) i) 0,4082 ≈ 0,4
ii) 0,4082 ≈ 0,41
iii) 0,4082 ≈ 0,408

b) i) 0,9817 ≈ 1,0
ii) 0,9817 ≈ 0,98
iii) 0,9817 ≈ 0,982

c) i) 0,0453 ≈ 0,0 = 0
ii) 0,0453 ≈ 0,05
iii) 0,0453 ≈ 0,045

3 Aufgabe

a) 0,41782 ≈ 0,4178 **b)** 0,37295 ≈ 0,3730 = 0,373
c) 0,00007 ≈ 0,0001 **d)** 0,99999 ≈ 1,0000 = 1

UMRECHNEN IN PROZENTSCHREIBWEISE

1 „Du bist dran“ aus dem „So geht’s“-Kasten

a) *Erweitere den Bruch auf den Nenner 100 und schreibe ihn in Prozentschreibweise:*
$\frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{35}{100} = 35\,\%$

b) *Berechne mit dem Taschenrechner:*
$7 : 13 \approx 0{,}5385 = 53{,}85\,\%$

2 Aufgabe

a) $\frac{4}{20} = \frac{20}{100} = 20\,\%$ **b)** $\frac{3}{10} = 30\,\%$ **c)** $\frac{2}{25} = \frac{8}{100} = 8\,\%$

d) $\frac{3}{4} = 75\,\%$ **e)** $\frac{7}{50} = \frac{14}{100} = 14\,\%$ **f)** $\frac{12}{200} = \frac{6}{100} = 6\,\%$

3 Aufgabe

a) $3 : 7 \approx 0{,}4286 = 42{,}86\,\%$
b) $2 : 13 \approx 0{,}1538 = 15{,}38\,\%$
c) $5 : 6 \approx 0{,}8\overline{3} = 83{,}\overline{3}\,\%$
d) $23 : 14 \approx 1{,}6429 = 164{,}29\,\%$
e) $7 : 16 \approx 0{,}4375 = 43{,}75\,\%$
f) $5 : 17 \approx 0{,}2941 = 29{,}41\,\%$

4 Aufgabe

a) $\frac{2}{4} = 50\,\%$ **b)** $\frac{3}{5} = 60\,\%$ **c)** $\frac{3}{8} = 37{,}5\,\%$

d) $\frac{7}{10} = 70\,\%$ **e)** $\frac{2}{3} = 66{,}\overline{6}\,\%$ **f)** $\frac{2}{2} = 100\,\%$

MULTIPLIZIEREN VON BRÜCHEN

1 „Du bist dran“ aus dem „So geht’s“-Kasten

a) *Multipliziere die beiden Zähler und Nenner miteinander:*
$\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{9} = \frac{1 \cdot 7}{3 \cdot 9} = \frac{7}{27}$

b) *Kürze vor dem Multiplizieren die Brüche über Kreuz:*
$\frac{\cancel{30}^{6}}{\cancel{7}_{1}} \cdot \frac{\cancel{21}^{3}}{\cancel{5}_{1}} = \frac{6 \cdot 3}{1 \cdot 1} = \frac{18}{1} = 18$

2 Aufgabe

a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$ **b)** $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 9} = \frac{20}{27}$

c) $4 \cdot \frac{5}{9} = \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{9} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 9} = \frac{20}{9}$ **d)** $\frac{7}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{21}{8}$

3 Aufgabe

a) $\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{5}_{1}} \cdot \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{2}_{1}} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 1} = \frac{12}{1} = 12$ **b)** $\frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{4}_{1}} \cdot \frac{\cancel{16}^{4}}{\cancel{5}_{1}} = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 1} = \frac{8}{1} = 8$

c) $\frac{\cancel{12}^{1}}{\cancel{13}_{1}} \cdot \frac{\cancel{39}^{3}}{\cancel{48}_{4}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ **d)** $\frac{\cancel{132}^{2}}{\cancel{7}_{1}} \cdot \frac{\cancel{35}^{5}}{\cancel{66}_{1}} = \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 1} = \frac{10}{1} = 10$

DIVIDIEREN VON BRÜCHEN

1 „Du bist dran“ aus dem „So geht’s“-Kasten

a) *Multipliziere mit dem Kehrbruch:*
$\frac{3}{4} : \frac{2}{9} = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 2} = \frac{27}{8}$

b) *Multipliziere mit dem Kehrbruch und kürze die Brüche über Kreuz:*
$\frac{5}{8} : \frac{15}{12} = \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{8}_{2}} \cdot \frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{15}_{3}} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2 Aufgabe

a) $\frac{1}{7} : \frac{1}{9} = \frac{1}{7} \cdot \frac{9}{1} = \frac{1 \cdot 9}{7 \cdot 1} = \frac{9}{7}$

b) $\frac{2}{3} : \frac{5}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$

c) $\frac{3}{8} : 2 = \frac{3}{8} : \frac{2}{1} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{8 \cdot 2} = \frac{3}{16}$

d) $5 : \frac{3}{4} = \frac{5}{1} : \frac{3}{4} = \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 3} = \frac{20}{3}$

3 Aufgabe

a) $\frac{2}{9} : \frac{4}{3} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{9}_{3}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{2}} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$

b) $\frac{14}{5} : \frac{7}{20} = \frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{5}_{1}} \cdot \frac{\cancel{20}^{4}}{\cancel{7}_{1}} = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 1} = \frac{8}{1} = 8$

c) $\frac{144}{35} : \frac{12}{7} = \frac{\cancel{144}^{12}}{\cancel{35}_{5}} \cdot \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{12}_{1}} = \frac{12 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{12}{5}$

d) $\frac{16}{5} : 4 = \frac{16}{5} : \frac{4}{1} = \frac{\cancel{16}^{4}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_{1}} = \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{4}{5}$

e) $\frac{96}{75} : \frac{8}{5} = \frac{\cancel{96}^{12}}{\cancel{75}_{15}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{8}_{1}} = \frac{12 \cdot 1}{15 \cdot 1} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

ADDIEREN UND SUBTRAHIEREN VON BRÜCHEN

1 „Du bist dran“ aus dem „So geht’s“-Kasten

a) *Ermittle einen gemeinsamen Nenner:*
$3 \cdot 8 = 24$
Erweitere beide Brüche auf den gemeinsamen Nenner und addiere bzw. subtrahiere die Zähler:
$\frac{5}{3} + \frac{1}{8} = \frac{40}{24} + \frac{3}{24} = \frac{40 + 3}{24} = \frac{43}{24}$

b) *Ermittle einen gemeinsamen Nenner:*
Die Zahl 4 ist in der Zahl 12 enthalten. Deswegen ist 12 ein gemeinsamer Nenner.
Erweitere beide Brüche auf den gemeinsamen Nenner und addiere bzw. subtrahiere die Zähler:
$\frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5 - 3}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

2 Aufgabe

a) $\frac{3}{4} + \frac{2}{9} = \frac{27}{36} + \frac{8}{36} = \frac{27+8}{36} = \frac{35}{36}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{18}{24} + \frac{20}{24} = \frac{18+20}{24} = \frac{38}{24} = \frac{19}{12}$

c) $\frac{5}{3} - \frac{5}{6} = \frac{10}{6} - \frac{5}{6} = \frac{10-5}{6} = \frac{5}{6}$

d) $\frac{5}{7} - \frac{10}{14} = \frac{5}{7} - \frac{5}{7} = 0$

e) $\frac{3}{5} + \frac{5}{8} = \frac{24}{40} + \frac{25}{40} = \frac{24+25}{40} = \frac{49}{40}$

3 Aufgabe

a) $\frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3+4-2}{8} = \frac{5}{8}$

b) $\frac{4}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3+4-1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

c) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} - \frac{5}{12} = \frac{8+3-5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

LÖSEN VON EXPONENTIALGLEICHUNGEN MIT DEM LOGARITHMUS

1 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten

a) *Löse die Aufgabe direkt mit dem Logarithmusbefehl deines Taschenrechners:*

$x = \log_{1,8}(3,4) \approx 2,082$

oder

$x = \frac{\log(3,4)}{\log(1,8)} \approx 2,082$

2 Aufgabe

a) $\log_7(2) \approx 0,3562$ b) $\log_3(5) \approx 1,4650$

c) $\log_3(0,36) \approx -0,9299$ d) $\log_{0,7}(0,24) \approx 4,0012$

3 Aufgabe

a) $x = \log_3(5) \approx 1,4650$ b) $x = \log_{2,3}(8) \approx 2,4966$

c) $x = \log_{2,45}(5,478) \approx 1,898$ d) $x = \log(2,345) \approx 0,3701$

ABSOLUTE UND RELATIVE HÄUFIGKEIT

1 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten

a) *Berechne die relative Häufigkeit:*

$12 : 90 = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$

b) *Berechne die absolute Häufigkeit:*

$105 \cdot \frac{2}{15} = \frac{\cancel{105}^{7} \cdot 2}{\cancel{15}_{1}} = \frac{14}{1} = 14$

2 Aufgabe

a) $40 : 860 = \frac{40}{860} = \frac{2}{43}$ b) $\frac{1}{4} \cdot 860 = \frac{860}{4} = 215$

ZUFALLSEXPERIMENT, WAHRSCHEINLICHKEIT UND ERGEBNIS

1 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten

a) *Stelle die Tabelle mit den Ergebnissen und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten auf:*

Ergebnis	gelb	grün	blau
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

b) *Multipliziere die Anzahl der Durchführungen mit der Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis:*

$400 \cdot \frac{1}{4} = \frac{400 \cdot 1}{4} = \frac{400}{4} = 100$

Bei 400 Drehungen kann man das gelbe Feld 100-mal erwarten.

2 Würfel

a)

Ergebnis	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b) $600 \cdot \frac{1}{6} = \frac{600 \cdot 1}{6} = \frac{600}{6} = 100$

Bei 600 Würfen kann man die Zahl „5“ 100-mal erwarten.

3 Glücksrad

a)

Ergebnis	rosa	blau	grün
Wahrscheinlichkeit	$\frac{7}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$

b) $1200 \cdot \frac{4}{16} = \frac{1200 \cdot \cancel{4}^{1}}{\cancel{16}_{4}} = \frac{1200}{4} = 300$

Bei 1200 Drehungen kann man das blaue Feld 300-mal erwarten.

EREIGNIS UND GEGENEREIGNIS

1 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten

a) *Notiere die zum Ereignis gehörenden Ergebnisse:*

$E = \{2;3;4\}$

Berechne die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses, indem du die Anzahl der im Ereignis enthaltenen Ergebnisse durch die Gesamtzahl der Ergebnisse teilst:

$P(E) = \frac{3}{4}$

b) *Notiere das Gegenereignis und gib seine Ereignismenge an:*

$\overline{E}$: „Die Augenzahl ist 1.“

$\overline{E}: = \{1\}$

c) *Gib die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis an:*

$P(\overline{E}) = \frac{1}{4}$

2 Glücksrad

a) $E = \{5;6;7;9;15\}$

$P(E) = \frac{5}{16}$

b) $\overline{E} = \{0;1;2;3;4;6;8;10;11;12;13;14\}$

$P(\overline{E}) = \frac{11}{16}$

3 Urne

a) $E = \{2;3;5;7\}$

$P(E) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

b) $\overline{E}$: „Die gezogene Zahl ist keine Primzahl.“

$\overline{E} = \{0;1;4;6;8;9\}$

$P(\overline{E}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

SCHNITT- UND VEREINIGUNGSMENGE

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten

a) *Notiere die zum Ereignis E gehörenden Ergebnisse:*
E = {0;2;4;6;8;10;12;14}
b) *Notiere die zum Ereignis F gehörenden Ergebnisse:*
F = {1;2;4;6;7;9;10;11;13;14}
c) *Bilde die Schnittmenge beider Ereignisse:*
$E \cap F$ = {2;4;6;10;14}
d) *Bilde die Vereinigungsmenge beider Ereignisse:*
$E \cup F$ = {0;1;2;4;6;7;8;9;10;11;12;13;14}

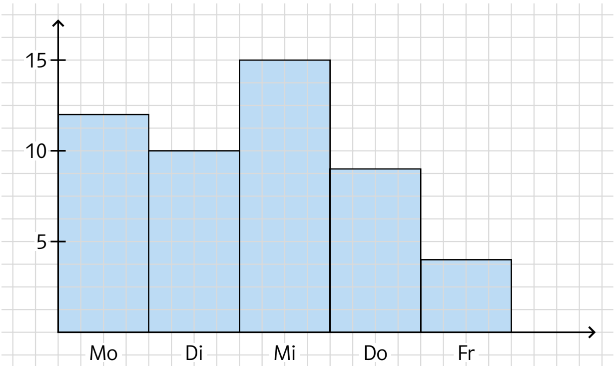
2 Beutel

a) A={2;3;5;7}
B = {0;2;4;6;8}
C = {0;5}
b) $A \cap B$ = {2} $B \cap C$ = {0} $B \cup C$ = {0;2;4;5;6;8}
$A \cup C$ = {0;2;3;5;7}

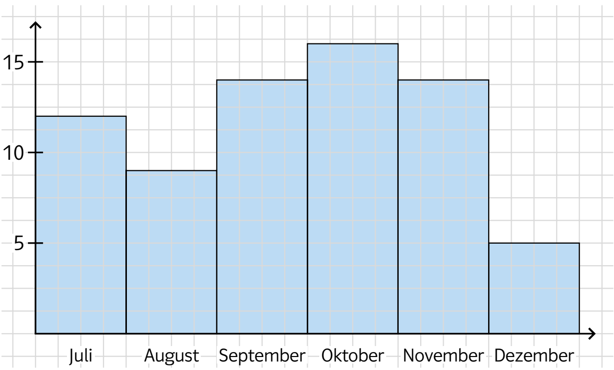
SÄULENDIAGRAMM

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten

Zeichne ein Koordinatensystem mit einer passenden Skalierung:



2 Regentage



MITTELWERT

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten

Berechne die Gesamtzahl der Schülerinnen und Schüler:
12 + 20 + 32 + 18 + 8 = 90
Berechne den Mittelwert der Schülerzahlen:
90 : 5 = 18

2 Mittelwert

a) (4 + 6 + 5 + 0 + 5 + 12 + 3) : 7 = 5
b) (12 + 8 + 15 + 10 + 30) : 5 = 15
c) (0,0478 + 0,0372 + 0,1072 + 0,5572 + 0,0006) : 5 = 0,15

3 Regentage

(18 + 15 + 12 + 14 + 4 + 6) : 6 = 11,5

SCHRITT 1

Das brauchst du wieder

0,2 = 20 %;   0,084 = 8,4 %
$\frac{3}{10}$ = 0,3 = 30 % $\frac{1}{4}$ = 0,25 = 25 %

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten

Lege das Ereignis fest:
Ereignis E: „1" oder „6" würfeln
Notiere die möglichen und günstigen Ergebnisse sowie deren Anzahl:
Mögliche Ergebnisse des Würfels: 1,2,3,4,5,6
Anzahl = 6
Günstige Ergebnisse des Würfels: 1,6 Anzahl = 2
Berechne die Wahrscheinlichkeit:

$P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = 33{,}\overline{3}\,\%$

2 Rosen-Strauß

a) Ereignis E: Eine rote Blume ziehen.
Anzahl der möglichen Ergebnisse = 7
Anzahl der günstigen Ergebnisse = 3
$P(E) = \frac{3}{7} \approx 0{,}4286 = 42{,}86\,\%$
b) Ereignis F: Eine rote oder rosarote Blume ziehen.
Anzahl der möglichen Ergebnisse = 7
Anzahl der günstigen Ergebnisse = 5
$P(F) = \frac{5}{7} \approx 0{,}7143 = 71{,}43\,\%$

3 Pokerkarten-Spiel

a) Ereignis E: Eine Herz-Karte ziehen.
Anzahl der möglichen Ergebnisse = 52
Anzahl der günstigen Ergebnisse = 13
$P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\,\%$
b) Ereignis F: Eine rote Karte ziehen.
Anzahl der möglichen Ergebnisse = 52
Anzahl der günstigen Ergebnisse = 26
$P(F) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\,\%$
c) Ereignis G: Eine Ass-Karte ziehen.
Anzahl der möglichen Ergebnisse = 52
Anzahl der günstigen Ergebnisse = 4
$P(G) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \approx 0{,}0769 = 7{,}7\,\%$

4 Dodekaeder

a) Ereignis E = {10,11,12}
Anzahl der möglichen Ergebnisse = 12
Anzahl der günstigen Ergebnisse = 3
$P(E) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\,\%$

b) Ereignis F = {3,6,9,12}
Anzahl der möglichen Ergebnisse = 12
Anzahl der günstigen Ergebnisse = 4
$P(F) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = 33{,}\overline{3}\,\%$

c) Ereignis G = {9,10,11,12}
Anzahl der möglichen Ergebnisse = 12
Anzahl der günstigen Ergebnisse = 4
$P(G) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = 33{,}\overline{3}\,\%$

5 Werfen von 2 Würfeln

a) Mögliche Ergebnisse mit einer „1“: (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1) Anzahl: 11

b) Ereignis E: Kein Würfel zeigt eine 1.
Gegenereignis : Mindestens ein Würfel zeigt eine 1.
Anzahl der möglichen Ergebnisse = 36
Anzahl der günstigen Ergebnisse = 11
$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36} = 0{,}69\overline{4} = 69{,}\overline{4}\,\%$

c) Ereignis A (Pasch) = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)}
Anzahl der möglichen Ergebnisse = 36
Anzahl der günstigen Ergebnisse = 6
$P(A) = \frac{6}{36}$ Dies entspricht I.
Ereignis B (Beide Würfel zeigen eine gerade Zahl.) = {(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)}
Anzahl der möglichen Ergebnisse = 36
Anzahl der günstigen Ergebnisse = 9
$P(B) = \frac{9}{36}$ Dies entspricht III.
Ereignis C (Differenz der beiden Zahlen ist gleich 2.) = {(1,3),(2,4),(3,1),(3,5),(4,2),(4,6),(5,3),(6,4)}
Anzahl der möglichen Ergebnisse = 36
Anzahl der günstigen Ergebnisse = 8
$P(C) = \frac{8}{36}$ Dies entspricht II.

6 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten

Stelle alle möglichen Ergebnisse beider Ereignisse auf:
Ereignis E (durch 5 teilbar) = {5,10,15,20}
Ereignis F (ungerade) = {1,3,5,7,9,11,13,15,17,19}
Schreibe die Schnittmenge auf:
$E \cap F = \{5, 15\}$ Anzahl = 2
Berechne die Wahrscheinlichkeit:
$P(E \cap F) = \frac{2}{20} = 0{,}1 = 10\,\%$

7 Mengen

a) $P(E) = \frac{26}{40} = \frac{13}{20} = 65\,\%$

b) $P(E \cap F) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 25\,\%$

8 Poker-Spiel

a) Ereignis A: Karte ist rot und ein Ass.
Anzahl der möglichen Ergebnisse = 52
Anzahl der günstigen Ergebnisse = 2
$P(A) = \frac{2}{52} \approx 0{,}0385 = 3{,}85\,\%$

b) Ereignis B: Karte ist rot und eine Herz-Karte.
Anzahl der möglichen Ergebnisse = 52
Anzahl der günstigen Ergebnisse = 13
$P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\,\%$

c) Ereignis C: Karte ist rot und hat eine Zahl.
Anzahl der möglichen Ergebnisse = 52
Anzahl der günstigen Ergebnisse = 18
$P(C) = \frac{18}{52} = \frac{9}{26} \approx 0{,}3461 = 34{,}61\,\%$

9 Beutel mit Kugeln

a) Ereignis A: Kugel ist rot.
Ereignis B (ungerade Zahl) = {1,3,5}
$A \cap B$ = {rote 1, rote 3, rote 5} Anzahl = 3
Anzahl aller möglichen Ergebnisse = $3 \cdot 5 = 15$
$P(A \cap B) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\,\%$

b) Ereignis A: Kugel ist gelb oder blau.
Ereignis B (Primzahl) = {2,3,5}
$A \cap B$ = {gelbe 2, gelbe 3, gelbe 5, blaue 2, blaue 3, blaue 5}
Anzahl = 6
Anzahl aller möglichen Ergebnisse = $3 \cdot 5 = 15$
$P(A \cap B) = \frac{6}{15} = 0{,}4 = 40\,\%$

10 Würfel

A = {(1,3), (1,1), (3,1), (1,5), (5,1)}
$\rightarrow P(A) = \frac{5}{36} = 0{,}13\overline{8} = 13{,}\overline{8}\,\%$

11 Tischtennis

w: weiblich   m: männlich   J: Jugendlicher
T: spielt Tischtennis $\overline{T}$: spielt kein Tischtennis
$P(A) = P(w \cap \overline{T}) = \frac{2}{10} = 20\,\%$

$P(B) = P(m \cap T) = \frac{4}{10} = 40\,\%$

$P(C) = P(m \cap \overline{J}) = \frac{4}{10} = 40\,\%$

12 Würfel

$P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} = 0{,}41\overline{6} = 41{,}\overline{6}\,\%$

$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6} = 16{,}\overline{6}\,\%$

$P(C) = \frac{5}{36} = 0{,}13\overline{8} = 13{,}\overline{8}\,\%$

13 Theater- und Musikstück

a) Ereignis A: Ein Schüler nimmt am Theaterstück teil.   Anzahl = 30
Ereignis B: Ein Schüler nimmt an einem Musikstück teil.   Anzahl = 36
Anzahl von A + Anzahl von B − Anzahl $A \cap B$ = Anzahl $A \cup B$

$30 + 36 - \text{Anzahl } A \cap B = 48$
$66 - \text{Anzahl } A \cap B = 48 \quad | -66$
$-\text{Anzahl } A \cap B = -18$
$\text{Anzahl } A \cap B = 18$

18 Schülerinnen und Schüler nehmen an beiden Vorführungen teil.

b) Ereignis C: Pia ist in beiden Gruppen.
$\rightarrow P(C) = \frac{18}{48} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\,\%$

SCHRITT 2

Das brauchst du wieder

$E \cap F = \{6;30\}$
$E \cup F = \{6;12;15;18;24;30\}$

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten

Notiere alle möglichen Ergebnisse der Ereignisse sowie deren Anzahl:
Ereignis E: Die Zahl ist durch 5 teilbar.
$E = \{5,10,15,20\}$. Anzahl = 4
Ereignis F: Die Zahl ist keine Primzahl.
$F = \{1,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20\}$. Anzahl = 12
1. Strategie: Berechne die Wahrscheinlichkeit durch Abzählen. Stelle die Vereinigungsmenge auf.
$E \cup F = \{1,4,5,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20\}$. Anzahl = 13
Berechne die Wahrscheinlichkeit:
$P(E \cup F) = \frac{13}{20} = 0{,}65 = 65\,\%$
2. Strategie: Berechne die Wahrscheinlichkeit mit dem Additionssatz. Stelle die Schnittmenge auf:
$E \cap F = \{10;15;20\}$; Anzahl = 3
Verwende den Additionssatz:
$P(E \cup F) = \frac{4}{20} + \frac{12}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20} = 0{,}65 = 65\,\%$

2 Urne

a) Ereignis A: Die Kugel ist weiß oder hat die Nummer 3.
$A = \{w1; w2; w3; w4; w5; r3\}$ $P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\,\%$
b) Ereignis B: Die Kugel ist rot oder hat die Nummer 4.
$B = \{r1; r2; r3; w4\}$ $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\,\%$
c) Ereignis C: Die Kugel ist rot oder hat eine Nummer kleiner als 3.
$C = \{r1; r2; r3; w1; w2\}$ $P(C) = \frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\,\%$

3 Buchstaben ziehen

a) Ereignis A: Der Buchstabe ist ein Vokal oder ein „k".
$A = \{a; e; e; k\}$ $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\,\%$
b) Ereignis B: Der Buchstabe ist ein Vokal oder ein „e".
$B = \{a; e; e\}$ $P(B) = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\,\%$
c) Ereignis C: Der Buchstabe ist ein Vokal oder ein Konsonant.
$C = \{a; e; e; k; m; r; r; z\}$ $P(C) = \frac{8}{8} = 1 = 100\,\%$

4 Poker-Spiel

a) Ereignis A: Karte ist rot oder ein Ass.
$P(A) = \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13} \approx 0{,}5385 = 53{,}85\,\%$.
b) Ereignis B: Karte ist rot oder eine Herz-Karte.
$P(B) = \frac{26}{52} + \frac{13}{52} - \frac{13}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\,\%$
c) Ereignis C: Karte ist rot oder hat eine Zahl.
$P(C) = \frac{26}{52} + \frac{36}{52} - \frac{18}{52} = \frac{44}{52} = \frac{11}{13} \approx 0{,}8462 = 84{,}62\,\%$

5 Zwei Würfel werden geworfen

a) Ereignis A: Ein Würfel zeigt eine „6" oder die Summe beider Würfel ist größer als 9.
Anzahl aller möglichen Ergebnisse = 36
Günstige Ergebnisse = {(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1),(5,5)} Anzahl = 12
$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}\overline{3} = 33{,}\overline{3}\,\%$
b) Ereignis B: Ein Würfel zeigt eine „1" oder die Differenz beider Würfel ist 1.
Anzahl aller möglichen Ergebnisse = 36
Günstige Ergebnisse = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(6,1),(5,1),(4,1),(3,1),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)} Anzahl = 19
$P(B) = \frac{19}{36} \approx 0{,}52\overline{7} = 52{,}\overline{7}\,\%$
c) Ereignis C: Beide Würfel zeigen die gleiche Zahl oder beide Zahlen sind ungerade.
Anzahl aller möglichen Ergebnisse = 36
Günstige Ergebnisse = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,3),(1,5),(3,1),(5,1),(3,5),(5,3)} Anzahl = 12
$P(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \approx 0{,}\overline{3} = 33{,}\overline{3}\,\%$

6 Wahl eines Zusatz-Kurs

a) Ereignis A: Eine Schülerin hat einen Zusatz-Kurs gewählt.
$P(A) = \frac{13}{30} + \frac{9}{30} - \frac{2}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \approx 0{,}\overline{6} = 66{,}\overline{6}\,\%$
b) Ereignis B: Eine Schülerin hat weder den Musik- noch den Theater-Kurs gewählt.
Anzahl aller möglichen Ergebnisse: 30
Anzahl aller Schüler, die den Theater- oder den Musikkurs besuchen: 20
Anzahl aller Schüler, die weder den Theater- noch den Musikkurs besuchen = 30 − 20 = 10
$P(B) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \approx 0{,}\overline{3} = 33{,}\overline{3}\,\%$

7 Reisegruppe

Ereignis A: Ein Teilnehmer war weder im Museum noch in der Kirche.

$P(A) = \frac{100-(80+65-50)}{100} = \frac{5}{100} = 0{,}05 = 5\,\%$

oder $P(A) = 100\,\% - (80\,\% + 65\,\% - 50\,\%) = 5\,\%$

SCHRITT 3

Das brauchst du wieder

$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$ $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{4} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{4}$ $\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten

Lege das Ereignis fest:
Ereignis E: Dreimal eine Zahl werfen, die größer als „3" ist.

Notiere die möglichen und günstigen Ergebnisse sowie ihre Anzahl für 1-mal würfeln:
Mögliche Ergebnisse des Würfelns:
1, 2, 3, 4, 5, 6 Anzahl = 6
Günstige Ergebnisse des Würfelns:
4, 5, 6 Anzahl = 3
Berechne die Wahrscheinlichkeit für einen Wurf:
$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
Berechne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses: Multipliziere die (gleichen) Wahrscheinlichkeiten der drei Würfe:
$P(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\,\%$

2 Dreimaliges Werfen einer Münze

a) Ereignis A: Es erscheint dreimal Zahl.
$p = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\,\%$
Ereignis B: Es erscheint Zahl, Kopf, Zahl.
$p = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\,\%$
Ereignis C: Es erscheint Zahl, Zahl, Kopf.
$p = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $P(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\,\%$
b) Jedes Ereignis entspricht genau einem Pfad. Und jeder Pfad ist gleich wahrscheinlich.

3 Pokerspiel

a) Ereignis A: Die Karte ist jedes Mal eine Herz-Karte.
$p = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0{,}25$
$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256} = 0{,}0039 = 0{,}39\,\%$
b) Ereignis B: Die Karte ist jedes Mal rot.
$p = \frac{26}{52} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 = 6{,}25\,\%$
c) Ereignis C: Die Karte ist beim ersten Mal rot, dann schwarz, dann wieder rot, dann wieder schwarz.
$p = \frac{26}{52} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
$P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 = 6{,}25\,\%$

4 Pfannkuchen

P („Beide Pfannkuchen sind mit Apfelmus gefüllt.“) $= \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = 0{,}4 = 40\,\%$

5 Armreifen

Die Wahrscheinlichkeit einen goldenen Armreif zu ziehen ist $\frac{3}{7}$.
Die Wahrscheinlichkeit einen silbernen Armreif zu ziehen ist $\frac{4}{7}$.
Die Wahrscheinlichkeit erst zwei goldene und dann einen silbernen Armreif zu ziehen ist deswegen $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7}$. Also ist Antwortmöglichkeit b die Richtige.

6 Beutel mit Bällen

a) Ereignis E: Alle drei Bälle sind schwarz.
$p = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
$P(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\,\%$
b) Ereignis F: Die ersten beiden Bälle sind schwarz und der dritte blau.
Wahrscheinlichkeit für schwarzen Ball: $p = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
Wahrscheinlichkeit für blauen Ball: $p = \frac{3}{10}$
$P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{40} = 0{,}075 = 7{,}5\,\%$
c) Ereignis G: Der erste Ball ist schwarz, der zweite blau und der dritte rot.
Wahrscheinlichkeit für schwarzen Ball: $p = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
Wahrscheinlichkeit für blauen Ball: $p = \frac{3}{10}$
Wahrscheinlichkeit für roten Ball: $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
$P(G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{100} = 0{,}03 = 3\,\%$

7 Dreimaliges Werfen eines Würfels

Die richtige Antwort ist a.
b beschreibt die Wahrscheinlichkeit beim dreimaligen Würfel jeweils eine Sechs zu würfeln. Da aber schon zwei Mal eine Sechs gefallen ist, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein drittes Mal eine Sechs gewürfelt wird, genauso hoch wie dass beim einmaligen Würfeln eine Sechs gewürfelt wird.

8 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten

Lege das Ereignis fest:
Ereignis E: Die Kugel ist dreimal weiß.
Notiere die Anzahl der möglichen und günstigen Ergebnisse für den 1. Zug:
Anzahl der möglichen Ergebnisse: 10
Anzahl der günstigen Ergebnisse: 3
Berechne die Wahrscheinlichkeit für den 1. Zug:
$p_1 = \frac{3}{10}$
Notiere die Anzahl der möglichen und günstigen Ergebnisse für den 2. Zug:
In der Urne sind noch 7 rote und 2 weiße Kugeln.
Anzahl der möglichen Ergebnisse: 9
Anzahl der günstigen Ergebnisse: 2
Berechne die Wahrscheinlichkeit für den 2. Zug:
$p_2 = \frac{2}{9}$
Notiere die Anzahl der möglichen und günstigen Ergebnisse für den 3. Zug:
In der Urne sind noch 7 rote und 1 weiße Kugeln.
Anzahl der möglichen Ergebnisse: 8
Anzahl der günstigen Ergebnisse: 1
Berechne die Wahrscheinlichkeit für den 3. Zug:
$p_3 = \frac{1}{8}$
Berechne mit der Pfadregel die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses:

$P(E) = P(www) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{120} = 0{,}008\overline{3} = 0{,}8\overline{3}\,\%$

9 Königskarte

P („Er zieht die Königskarte.“) = 1 − P (3x „Nicht-Königskarte“) $= 1 - (\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}) = 1 - \frac{2}{5} = 0{,}6 = 60\,\%$

10 Fremdsprachen

P („Keine Schülerin lernt russisch.“) $= \frac{19}{25} \cdot \frac{18}{24} \cdot \frac{17}{23} \cdot \frac{16}{22} \cdot \frac{15}{21} \approx 0{,}219 = 21{,}9\,\%$

11 Pokerspiel

a) Ereignis A: Die Karte ist jedes Mal eine Herz-Karte.
$P(A) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} = \frac{429}{33150} = 0{,}0129 = 1{,}29\,\%$
b) Ereignis B: Die Karte ist jedes Mal rot.
$P(B) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} = \frac{15600}{132600} = \frac{2}{17} \approx 0{,}1176 = 11{,}76\,\%$

c) Ereignis C: Die Karte ist beim ersten Mal rot, dann schwarz und dann wieder rot.
$P(C) = \frac{26}{52} \cdot \frac{26}{51} \cdot \frac{25}{50} = \frac{16900}{132600} = \frac{13}{102} \approx 0{,}1275 = 12{,}75\,\%$

12 Beutel mit Bällen

a) Ereignis A: Alle drei Bälle sind schwarz.
$P(A) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{60}{720} = 0{,}08\overline{3} = 8{,}\overline{3}\,\%$
b) Ereignis B: Die ersten beiden Bälle sind schwarz, der dritte ist blau.
$P(B) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{60}{720} = 0{,}08\overline{3} = 8{,}\overline{3}\,\%$
c) Ereignis C: Der erste Ball ist schwarz, der zweite blau und der dritte rot.
$P(C) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{30}{720} = 0{,}041\overline{6} = 4{,}1\overline{6}\,\%$

13 Fotos von Sportlern

a) Du ziehst zuerst das Foto eines Leichtathleten, dann das eines Schwimmers und zuletzt das eines Fußballers.
b) Du ziehst zuerst das Foto eines Leichtathleten, dann nochmal das eines Leichtathleten und zuletzt das eines Schwimmers.
c) i) Du ziehst zuerst das Foto eines Fußballers, dann das eines Schwimmers und zuletzt das eines Leichtathleten.
ii) Du ziehst zuerst das Foto eines Fußballers, dann nochmal das eines Fußballers und zuletzt das eines Leichtathleten.
iii) Du ziehst dreimal hintereinander das Foto eines Fußballers.
d) i) Du ziehst zuerst das Foto eines Fußballers, dann das eines Leichtathleten und zuletzt das eines Schwimmers.
ii) Du ziehst zuerst das Foto eines Fußballers, dann das eines Leichtathleten und zuletzt nochmal das eines Fußballers.

14 Streichhölzer

Ereignis S1: Spieler 1 verliert.
$P(S1) = \frac{1}{4}$
Ereignis S2: Spieler 2 verliert.
$P(S2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
Ereignis S3: Spieler 3 verliert.
$P(S3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
Ereignis S4: Spieler 4 verliert.
$P(S4) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
Es ist also egal, an welcher Position du ein Streichholz ziehst. Die Wahrscheinlichkeit zu verlieren ist immer genau 25 %.

SCHRITT 4

Das brauchst du wieder

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$\frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{1+4}{6} = \frac{5}{6}$

$\frac{2}{3} + \frac{1}{8} = \frac{16}{24} + \frac{3}{24} = \frac{19}{24}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

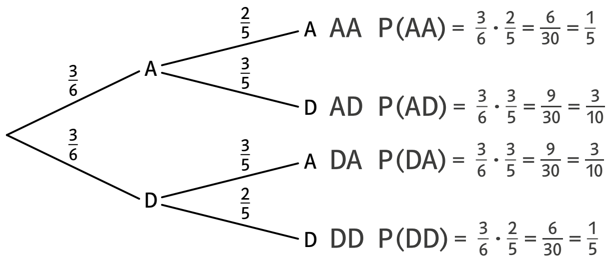
1 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten

Schreibe die möglichen Ergebnisse auf:
A, D
Bestimme die Wahrscheinlichkeit für den ersten Zug:
1. Ergebnis: Ass. $P(A) = \frac{3}{6}$

2. Ergebnis: Dame. $P(B) = \frac{3}{6}$

Da die Karten nicht wieder umgedreht werden, handelt es sich hier um ein Ziehen ohne Zurücklegen.
Notiere den Stand vor dem zweiten Zug:
Für den 2. Zug sind noch 5 Karten verdeckt.
beim 1. Ergebnis: 2 Ass und 3 Damen
beim 2. Ergebnis: 3 Ass und 2 Damen
Für jedes Ergebnis gibt es wieder zwei mögliche Ergebnisse. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für den zweiten Zug.
nach dem 1. Ergebnis: $P(A) = \frac{2}{5}$; $P(D) = \frac{3}{5}$

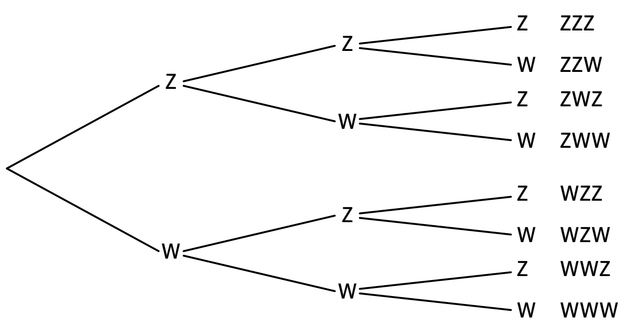
nach dem 2. Ergebnis: $P(A) = \frac{3}{5}$; $P(D) = \frac{2}{5}$
Zeichne das Baumdiagramm und schreibe ans Ende jedes Pfades das Ergebnis und die Wahrscheinlichkeiten:



Schreibe alle Ergebnisse für das Ereignis E auf:
DD
Lies die Wahrscheinlichkeiten der günstigen Ergebnisse am Baumdiagramm ab und addiere sie:
$P(E) = P(DD) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 20\,\%$

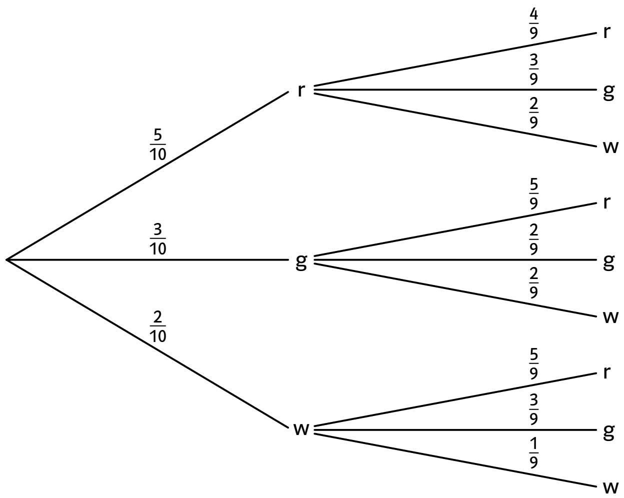
2 Dreimaliges Werfen einer Münze

a)



b) ZZW; ZWZ; WZZ
c) $P(\text{Genau 2-mal Zahl}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

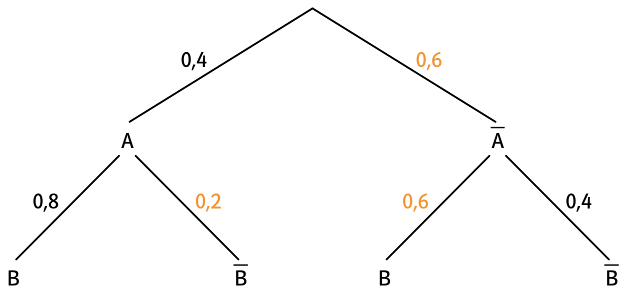
3 Vase mit 10 Blumen



P (zwei Blumen haben unterschiedliche Farbe) =
P ((r;g);(r;w);(g;r);(g;w);(w;r);(w;g)) =

$\frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{15}{90} + \frac{10}{90} + \frac{15}{90} + \frac{6}{90} +$
$\frac{10}{90} + \frac{6}{90} = \frac{62}{90} = 0{,}6\overline{8} = 68{,}\overline{8}\,\%$

4 Fehlende Wahrscheinlichkeiten bestimmen



$P(AB) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$; $P(A\overline{B}) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$;
$P(\overline{A}B) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$; $P(\overline{AB}) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$

5 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten

Hier interessiert nur das Ergebnis „König“ (K) und „Nicht König“ ($\overline{K}$). Bestimme die Wahrscheinlichkeit für den 1. Zug:
$P(K) = \frac{3}{7}$; $P(\overline{K}) = \frac{4}{7}$
Für den 2. Zug liegen noch 6 Karten auf dem Tisch.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit für den 2. Zug:
K aufgedeckt: $P(K) = \frac{2}{6}$; $P(\overline{K}) = \frac{4}{6}$

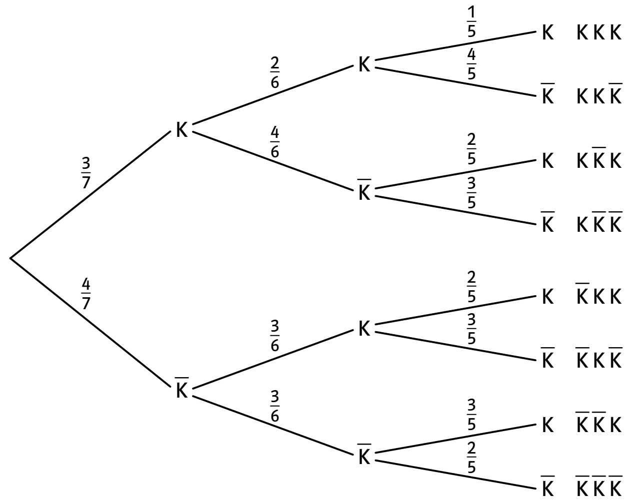
$\overline{K}$ aufgedeckt: $P(K) = \frac{3}{6}$; $P(\overline{K}) = \frac{3}{6}$
Für den 3. Zug liegen noch 5 Karten auf dem Tisch.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit für den 3. Zug:
KK aufgedeckt: $P(K) = \frac{1}{5}$; $P(\overline{K}) = \frac{4}{5}$

$K\overline{K}$ aufgedeckt: $P(K) = \frac{2}{5}$; $P(\overline{K}) = \frac{3}{5}$

$\overline{K}K$ aufgedeckt: $P(K) = \frac{2}{5}$; $P(\overline{K}) = \frac{3}{5}$

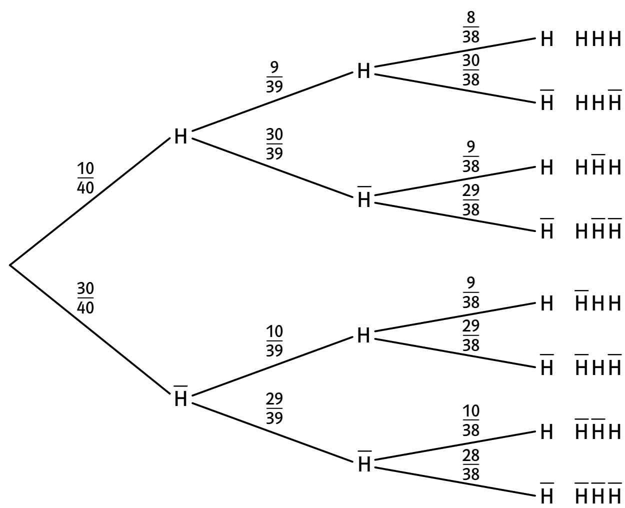
$\overline{KK}$ aufgedeckt: $P(K) = \frac{3}{5}$; $P(\overline{K}) = \frac{2}{5}$

Zeichne das dazugehörige Baumdiagramm:



Schreibe alle Ergebnisse für das Ereignis E auf:
$KK\overline{K}$, $K\overline{K}K$, $\overline{K}KK$
Bestimme die Wahrscheinlichkeit mit der Summenregel und der Pfadregel:
$P(E) = P(KK\overline{K}) + P(K\overline{K}K) + P(\overline{K}KK)$
$= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{35} \approx 0{,}3429 = 34{,}29\,\%$

6 Drei Karten aus einem Stapel



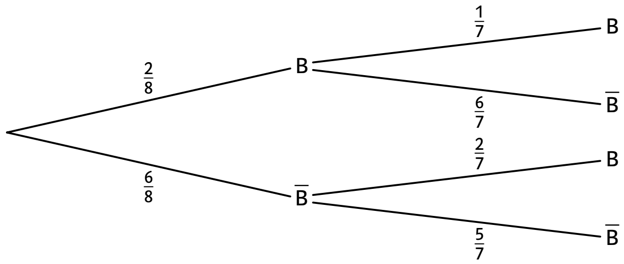
E: Man zieht genau eine Herz-Karte.
$P(E) = P(H\overline{HH}) + P(\overline{H}H\overline{H}) + P(\overline{HH}H)$
$= \frac{10}{40} \cdot \frac{30}{39} \cdot \frac{29}{38} + \frac{30}{40} \cdot \frac{10}{39} \cdot \frac{29}{38} + \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} \cdot \frac{10}{38} = \frac{435}{988}$
$\approx 0{,}4403 = 44{,}03\,\%$

7 Glücksrad

a) Man landet genau dreimal auf dem blauen Feld.
b) Man landet einmal auf dem roten Feld und zweimal auf einem anderen Feld.
c) Man landet einmal auf dem roten Feld und zweimal auf dem weißen Feld.

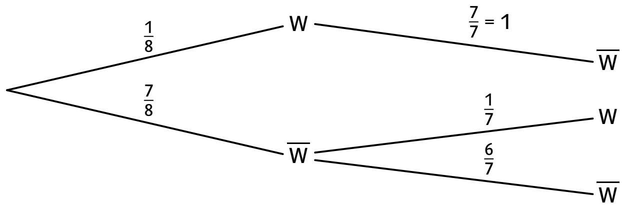
8 Urne

a) A: Man zieht genau einmal eine blaue Kugel.



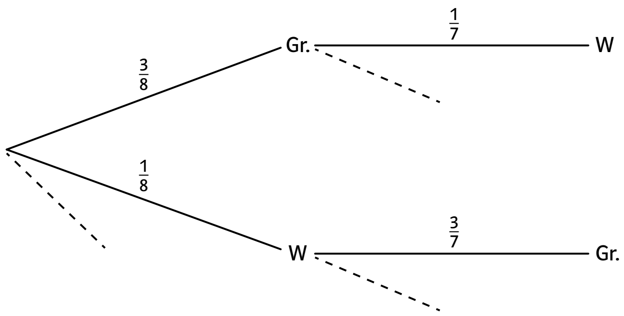
$P(A) = \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} + \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7} \approx 0{,}4286 = 42{,}86\,\%$

b) B: Man zieht die weiße Kugel.



$P(B) = \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\,\%$

c) C: Man zieht genau eine grüne und eine weiße Kugel.



$P(C) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{56} = 10{,}71\,\%$

9 Spielwürfel

P („Es tritt erst beim 5. Mal eine Sechs auf.“)
$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{625}{7776} \approx 0{,}0804 = 8{,}04\,\%$

10 Lotterie

P („Er zieht erst im 4. Versuch einen Gewinn.“)
$= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{256} \approx 0{,}1055 = 10{,}55\,\%$

11 Tetraeder

a) $P(4 \cdot \text{gleiche Ziffer}) = \frac{4}{4^4} = \frac{1}{4^3} \approx 0{,}0156 = 1{,}56\,\%$

b) $P(\text{Eine Zahl größer als } 1) = 1 - P(\text{„1111“}) = 1 - \frac{1}{4^4}$
$\approx 0{,}9961 = 99{,}61\,\%$

12 Nicht gemachte Hausaufgaben

$P(A) = \frac{6}{21} \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{2}{133} \approx 0{,}0150 = 1{,}5\,\%$

$P(B) = \frac{6}{21} \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot 3 = \frac{9}{19} \approx 0{,}4737 = 47{,}37\,\%$

$P(C) = \frac{15}{21} \cdot \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} + P(B) = \frac{31}{38} \approx 0{,}8158 = 81{,}58\,\%$

SCHRITT 5

Das brauchst du wieder

Durchschnitt von 1,3,5,7 und 9:
$m = \frac{1}{5} \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = \frac{25}{5} = 5$

Durchschnitt von 2,2,2,3,4 und 5:
$m = \frac{1}{6} \cdot (2 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5) = \frac{18}{6} = 3$

1 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten

Notiere die Zufallsgröße und die Wahrscheinlichkeit:

$X = \{1;2;3;4\}$

P(Eine beliebige Seite des Würfels) $= \frac{1}{6}$

$P(X = 1) = \frac{2}{6}$ $P(X = 2) = \frac{2}{6}$

$P(X = 3) = \frac{1}{6}$ $P(X = 4) = \frac{1}{6}$

Stelle eine Tabelle auf. Schreibe in die
1. Zeile: die Werte x_i der Zufallsvariablen
2. Zeile: die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ dieser Werte.
3. Zeile: die Produkte $x_i \cdot P(X = x_i)$:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$

Bestimme den Erwartungswert als Summe der 3. Zeile:

$E(X) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{13}{6} = 2{,}1\overline{6}$

2 Münze

$X = \{0;1;2;3;4;5\}$

3 Kartenstapel

a) $X = \{3;4;5;6;7;8;9;10\}$ **b)** $Y = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$

4 Lostopf

a) $X = \{0;1;2;3;4;5;6\}$ **b)** $Y = \{4;5;6;7;8;9;10\}$

5 Pokerspiel

a) $X = \{2;1;-0{,}1\}$

b) $E(X) = 2 \cdot \frac{4}{52} + 1 \cdot \frac{4}{52} - 0{,}1 \cdot \frac{44}{52} \approx 0{,}1462$

6 Glücksrad

a) $X = \{1;3;5\}$

b) $E(X) = 1 \cdot \frac{6}{12} + 3 \cdot \frac{4}{12} + 5 \cdot \frac{2}{12} = \frac{7}{3} \approx 2{,}\overline{3}$

x_i	1	3	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$	$\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$	$\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$

7 Schulfest

$X = \{9;6;4;3;1;0;-5\}$

8 Mountainbike Strecken

$X = \{[30;50];]50;70];]70;90];]90;110];]110;130];$
$]130;150]\}$

9 Spiel mit Karten

a) $X = \{10;6;3;1\}$

b) $E(X) = 10 \cdot \frac{5}{50} + 6 \cdot \frac{10}{50} + 3 \cdot \frac{15}{50} + 1 \cdot \frac{20}{50} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

Du kannst nach einer Runde die Punktzahl von 3,5 erwarten.

c) $3{,}5 \cdot 20 = 70$. Du kannst nach 20 Runden die Punktzahl von 70 erwarten.

10 **Lehrer**

a) $E(X) = 1 \cdot 0{,}12 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}26 + 4 \cdot 0{,}21 + 5 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}01 = 2{,}9$

b) $\frac{1}{20} \cdot (4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5) = 2{,}55$

Das Ergebnis entspricht dieses Mal nicht dem Erwartungswert.

11 **Spielbox**

X: Zahl, die die Spielbox anzeigt.

p: Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl „1" angezeigt wird.

$E(X) = 1{,}5$

$E(X) = 1 \cdot p + 3 \cdot (1 - p)$

$1{,}5 = p + 3 \cdot (1 - p)$

$1{,}5 = p + 3 - 3p \mid -3$

$-1{,}5 = -2p \mid :(-2)$

$p = 0{,}75$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl „1" angezeigt wird, ist 0,75.

12 **Glücksrad**

p: Wahrscheinlichkeit für die Zahl „1"

$2{,}25 = 1 \cdot p + 2 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot (0{,}6 - p) + 5 \cdot 0{,}15$

$2{,}25 = p + 0{,}5 + 1{,}8 - 3p + 0{,}75$

$2{,}25 = -2p + 3{,}05$

$-0{,}8 = -2p$

$p = 0{,}4$

Die Wahrscheinlichkeit für die Zahl „1" ist 0,4.

SCHRITT 6

Das brauchst du wieder

8 Karten: $E(X) = 11 \cdot \frac{3}{8} + 10 \cdot \frac{2}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} = \frac{31}{4} = 7{,}75$

7 Karten: $E(X) = 11 \cdot \frac{1}{7} + 10 \cdot \frac{3}{7} + 4 \cdot \frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{51}{7} \approx 7{,}29$

1 **„Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten**

Bestimme die möglichen Ergebnisse, deren Anzahl und Wahrscheinlichkeit:

Ergebnisse: (1;1);(1;2);(1;3);(1;0);(2;1);(;2;2);(2;3);(2;0);(3;1);(3;2);(3;3);(3;0);(0;1);(0;2);(0;3);(0;0)

Anzahl: $4 \cdot 4 = 16$

Alle Ergebnisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{16}$.

Notiere alle möglichen Werte x_i der Zufallsgröße X, die sich bei der Multiplikation bzw. Addition ergeben:

$X = \{0;1;2;3;4;5;6\}$

Schreibe in die 1. Spalte alle Ergebnisse, in die 2. Spalte die dazugehörigen Werte (Produkte) für x_1 und in die 3. Spalte die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$:

Ergebnisse	x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
(0;0)	0	$\frac{1}{16}$	0
(0;1),(1;0)	1	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
(1;1),(0;2),(2;0)	2	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$
(1;2),(2;1),(0;3),(3;0)	3	$\frac{4}{16}$	$\frac{12}{16}$
(1;3),(3;1),(2;2)	4	$\frac{3}{16}$	$\frac{12}{16}$
(2;3),(3;2)	5	$\frac{2}{16}$	$\frac{10}{16}$
(3;3)	6	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{16}$

Berechne die Summe der rechten Spalte:

$E(X) = 0 + \frac{2}{16} + \frac{6}{16} + \frac{12}{16} + \frac{12}{16} + \frac{10}{16} + \frac{6}{16} = \frac{48}{16} = 3$

2 **Spielwürfel**

a) $X = \{-2;2;1\}$

Ergebnisse	x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
rot	−2	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{6}$
blau	+2	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$
gelb	+1	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$

$E(X) = -\frac{2}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$

b) $n \cdot \frac{5}{6} = 24 \Rightarrow n \approx 28{,}8$; also 29 Runden.

3 **Zauberwörter**

a) $X = \{0;2;5\}$

b)

Ergebnisse	x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
HOKUSPOKUS	0	$\frac{1}{6}$	0
SIMSALABIM, SABBERBRABBEL, ALOHOMORA, BOMBARDA	2	$\frac{4}{6}$	$\frac{8}{6}$
ABRAKADABRA	5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

$E(X) = 0 + \frac{8}{6} + \frac{5}{6} = \frac{13}{6} = 2{,}1\overline{6}$

c) $X = \{0;1;2;5\}$

Ergebnisse	x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
HOKUSPOKUS, ALOHOMORA	0	$\frac{2}{6}$	0
SIMSALABIM,	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
ABRAKADABRA, BOMBARDA	2	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$
SABBERBRABBEL	5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

$E(X) = 0 + \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{10}{6} = 1{,}\overline{6}$

4 **Karten**

a) $X = \{1;2\}$

b) s: schwarze Karte   r: rote Karte

Ergebnisse	x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
(s;r), (r;s)	1	$\frac{6}{12}$	$\frac{6}{12}$
(s;s)	2	$\frac{6}{12}$	$\frac{12}{12}$

$E(X) = \frac{6}{12} + \frac{12}{12} = \frac{18}{12} = 1{,}5$

c) $X = \{0;1\}$

Ergebnisse	x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
(s;s)	0	$\frac{6}{12}$	0
(s;r), (r;s)	1	$\frac{6}{12}$	$\frac{6}{12}$

$E(X) = 0 + \frac{6}{12} = \frac{6}{12} = 0{,}5$

5 Omelett

a) $X = \{0;1;2;3\}$

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$1 \cdot 0{,}4^3$	$3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^2$	$3 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4$	$1 \cdot 0{,}6^3$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0	0,288	0,864	0,648

$E(X) = 0 + 0{,}288 + 0{,}864 + 0{,}648 = 1{,}8$
Du kannst im Schnitt mit ca. 1,8 Treffern rechnen.

6 Schlüsselbund

X: Anzahl der Versuche, die du brauchst, bis du den passenden Schlüssel gefunden hast.
$X = \{1;2;3;4\}$

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{12}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{24}$	$\frac{3}{4}$
4	$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{6}{24}$	$\frac{4}{4} = 1$

$E(X) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{10}{4} = 2{,}5$
Man bräuchte im Schnitt 2,5 Versuche, bis man den richtigen Schlüssel gezogen hat.

7 Karten ziehen

X: Anzahl der Karten, die du ziehen musst, bis du ein Ass gezogen hast.
$X = \{1;2;3\}$

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1{,}\overline{6}$

8 Tabelle

Die Summe der Werte p_1 und p_2 muss zusammen 0,3 betragen. Es ergeben sich also zwei Extremfälle:
1. Extremfall: $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0$
$E(X) = -1 + 0 + 0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}9 + 0 = 0{,}6$
2. Extremfall: $p_1 = 0$; $p_2 = 0{,}3$
$E(X) = -1 + 0 + 0{,}1 + 0{,}6 + 0 + 1{,}5 = 1{,}2$
Der Erwartungswert kann zwischen den Werten 0,6 und 1,2 liegen.

9 Felder zum Aufrubbeln

a) P (drei leere Felder) $= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\,\%$
b) X: Anzahl Felder, die ich freirubbeln muss, bis ein Feld mit einem Preis kommt:
$E(X) = 1 \cdot \frac{3}{6} + 2 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1$
$= \frac{3}{6} + \frac{3}{5} + \frac{9}{20} + \frac{3}{15} = 1{,}75$
Im Schnitt muss man 1,75 Felder freirubbeln, bis ein Feld mit einem Preis kommt.

10 Urne

a) $P = \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\,\%$
b) X: Gewinn in €

Ereignis	weiß	schwarz	rot
x_i	2	−1	0
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{8} - 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$
Man kann das Spiel im Schnitt acht Mal wiederholen, bis man 2 € verloren hat.

SCHRITT 7

Das brauchst du wieder
Voraussichtliche Punktzahl nach 200 Würfen:
$200 \cdot 2 = 400$
Voraussichtliche Punktzahl nach 500 Würfen:
$500 \cdot 2 = 1000$

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten

Definiere die Zufallsgröße X:
X: Gewinn x_i in Euro.
Berechne und notiere alle möglichen Werte x_i, indem du den Einsatz vom Gewinn abziehst:
keine Sechs: −1 €
eine Sechs: 0 €
zwei Sechsen: 3 €
drei Sechsen: 9 €
Stelle eine Tabelle auf und berechne den Erwartungswert:

Anzahl „6"	Gewinn x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
0	−1 €	$(\frac{5}{6})^3$	−0,579 €
1	0 €	$3 \cdot (\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6}$	0 €
2	3 €	$3 \cdot \frac{5}{6} \cdot (\frac{1}{6})^2$	0,208 €
3	9 €	$(\frac{1}{6})^3$	0,0417 €

$E(X) = -0{,}579\text{ €} + 0\text{ €} + 0{,}208\text{ €} + 0{,}0417\text{ €} = -0{,}3293\text{ €}$
Interpretiere den Erwartungswert:
Das Spiel ist nicht fair, du verlierst im Durchschnitt pro Spiel ca. 33 Cent.

2 Spielwürfel

X = {−1 Chip; + 3 Chips}

Ergebnisse	Gewinn x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
weiß	−1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
grün	3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$E(X) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$

Das Spiel ist fair.

3 Münzen gleichzeitig werfen

a) $X = \{0;1;2;3\}$

b)

Ergebnisse	Gewinn x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
(K;K;K)	0 €	$\frac{1}{8}$	0 €
(Z;K;K), (K;Z;K), (K;K;Z)	1 €	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$ €
(Z;Z;K), (K;Z;Z), (Z;K;Z)	2 €	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$ €
(Z;Z;Z)	3 €	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$ €

$E(X) = 0\,€ + \frac{3}{8}\,€ + \frac{6}{8}\,€ + \frac{3}{8}\,€ = \frac{12}{8}\,€ = 1{,}5\,€$

c) Erwartungswert nach 3-maligem Werfen:

$3 \cdot 1{,}5\,€ = 4{,}5\,€$

Das Spiel ist nicht fair, du verlierst im Durchschnitt 0,5 €.

4 Werfen von zwei Würfeln

a) X: Gewinne x_i in €

Ergebnisse	Gewinn x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
(4;6), (5;5), (5;6), (6;4), (6;5), (6;6) → Anzahl: 6	1,5 €	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$ €
Anzahl: 36 − 6 = 30	−0,5 €	$\frac{30}{36}$	$-\frac{15}{36}$ €

$E(X) = \frac{9}{36}\,€ - \frac{15}{36}\,€ = -\frac{6}{36}\,€ \approx -0{,}17\,€$

Das Spiel ist nicht fair, du verlierst im Durchschnitt ca. 17 Cent.

b) a: Auszahlungsbetrag

Ergebnisse	Gewinn x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
(4;6), (5;5), (5;6), (6;4), (6;5), (6;6) → Anzahl: 6	a − 0,5 €	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36} \cdot a - \frac{3}{36}$ €
Anzahl: 36 − 6 = 30	−0,5 €	$\frac{30}{36}$	$-\frac{15}{36}$ €

$E(X) = \frac{6}{36}a - \frac{3}{36}\,€ = \frac{6}{36}\,€ \cdot a - \frac{18}{36}\,€$

Damit das Spiel fair ist, muss der Erwartungswert Null sein.

$\frac{6}{36} \cdot a - \frac{18}{36}\,€ = 0 \quad |\cdot 36$

$6 \cdot a - 18\,€ = 0 \quad |+18$

$6 \cdot a = 18\,€ \quad |:6$

$a = 3\,€$

Der Auszahlungsbetrag müsste 3 € sein, damit das Spiel fair ist.

5 Lotterie

a) X: Kosten eines Loses in €

Gewinn x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
10 € − x	0,1	1 € − 0,1x
5 € − x	0,1	0,5 € − 0,1x
1 € − x	0,2	0,2 € − 0,2x
−x	0,6	−0,6x

$E(X) = 1\,€ - 0{,}1x + 0{,}5\,€ - 0{,}1x + 0{,}2\,€ - 0{,}2x - 0{,}6x = 1{,}7\,€ - x$

Da $E(X) = 0$ sein muss, muss $x = 1{,}7\,€$ sein. Die Lose müssten 1,7 € kosten, damit der Lotterie-Veranstalter keinen Verlust macht.

b) 50 € : 100 = 0,5 €

Der Erwartungswert muss also −0,5 € betragen. Dies ist bei einem Preis von 2,2 € pro Los der Fall.

6 Glücksrad beim Schulfest

e: Einsatz pro Runde

Gewinn x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
0 − e	0,4	−0,4e
1 − e	0,3	0,3 − 0,3e
2 − e	0,2	0,4 − 0,2e
4 − e	0,1	0,4 − 0,1e

$E(X) = -0{,}4e + 0{,}3 - 0{,}3e + 0{,}4 - 0{,}2e + 0{,}4 - 0{,}1e = 1{,}1 - e$

Da $E(X) = 0$ sein muss, muss $e = 1{,}1$ sein. Der Einsatz pro Runde muss also 1,1 betragen, damit das Spiel fair ist.

7 Urne

a)

Ergebnisse	Gewinn x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
(r;r)	−10 €	$\frac{2}{90}$	$-\frac{20}{90}$ €
(r;w), (w;r)	−4 €	$\frac{32}{90}$	$-\frac{128}{90}$ €
(w;w)	2 €	$\frac{56}{90}$	$\frac{112}{90}$ €

$E(X) = -\frac{20}{90}\,€ - \frac{128}{90}\,€ + \frac{112}{90}\,€ = -\frac{36}{90}\,€ = -0{,}4\,€$

Der erwartende Verlust pro Spiel beträgt im Schnitt 40 Cent.

b)

Ergebnisse	Gewinn x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
(r;r)	−8 €	$\frac{2}{90}$	$-\frac{16}{90}$ €
(r;w), (w;r)	−3 €	$\frac{32}{90}$	$-\frac{96}{90}$ €
(w;w)	2 €	$\frac{56}{90}$	$\frac{112}{90}$ €

$E(X) = -\frac{16}{90}\,€ - \frac{96}{90}\,€ + \frac{112}{90}\,€ = 0\,€$

8 Glücksspiel

a) $E(X) = -2 \cdot 0{,}3 + (-1) \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 =$
$-0{,}6 - 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 = -0{,}1$

b) Der Einsatz müsste 2 € – 0,1 €, also 1,90 € sein, damit das Spiel fair ist.

c) $E(X) = 0$
$-2 \cdot 0{,}3 + (-1) \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}3 + x \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 = 0$
$-0{,}3 + 0{,}2x = 0$
$0{,}2x = 0{,}3$
$x = 1{,}5$
Der Gewinn von 1 € müsste 1,5 € betragen, damit das Spiel fair ist.

9 Glücksrad

a)

Ergebnisse	Gewinn x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
(blau, blau)	3 €	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$ €
(blau, weiß); (weiß, blau)	0 €	$\frac{4}{9}$	0 €
(weiß, weiß)	–2 €	$\frac{4}{9}$	$-\frac{8}{9}$ €

$E(X) = \frac{3}{9}\,€ + 0\,€ - \frac{8}{9}\,€ = -\frac{5}{9}\,€ = 0{,}\overline{5}\,€$

b) b: Betrag für „2-mal blau“

Ergebnisse	Gewinn x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
(blau, blau)	b – 2 €	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}b - \frac{2}{9}$€
(blau, weiß); (weiß, blau)	0 €	$\frac{4}{9}$	0 €
(weiß, weiß)	–2 €	$\frac{4}{9}$	$-\frac{8}{9}$ €

$E(X) = \frac{1}{9}b - \frac{2}{9}\,€ + 0\,€ - \frac{8}{9}\,€ = \frac{1}{9}b - \frac{10}{9}\,€$
Da $E(X) = 0$ sein muss, muss b = 10 € sein. Der Betrag für „2-mal blau“ muss 10 € sein, damit das Spiel fair ist.

10 Schmuggler

a) $P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 10\,\%$

$P(\overline{B}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$\rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{7}{10} = 70\,\%$

b) Die Wahrscheinlichkeit, einmal unerkannt durchzukommen, ist $p = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$.
Die Wahrscheinlichkeit, 10-mal unerkannt durchzukommen, ist $0{,}3^{10} \approx 0{,}000006 = 0{,}0006\,\%$.

11 Schulklasse

a) $P(5\,€) = \frac{1}{36} \approx 0{,}02\overline{7} = 2{,}\overline{7}\,\%$

$P(1\,€) = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36} \approx 0{,}361\overline{7} = 36{,}1\overline{7}$

$P(0\,€) = 1 - P(5\,€) - P(1\,€) = 1 - \frac{1}{36} - \frac{13}{36} = \frac{11}{18} \approx 0{,}6\overline{1}$
$= 61{,}\overline{1}\,\%$

b) $E(X) = 5 \cdot \frac{1}{36} + \frac{13}{36} = \frac{18}{36} = 0{,}5$
Bei 100 Spielen kann man mit einem Gewinn von ca. $0{,}5 \cdot 100 = 50$ € rechnen.

TRAINING 1

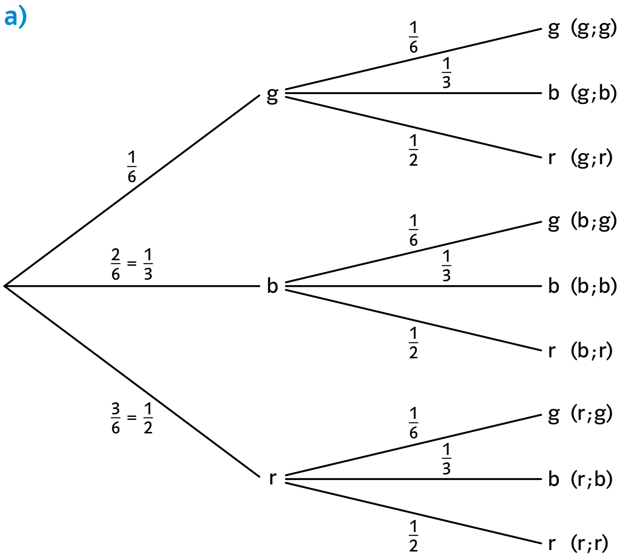
1 Spielwürfel

a) Ereignis A: Die Summe beider Augenzahlen ist größer als 10.
Anzahl möglicher Ereignisse: 36
günstige Ereignisse: (5;6); (6;5); (6;6)
$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0{,}08\overline{3} = 8{,}\overline{3}\,\%$

b) Ereignis B: Die Augenzahl ist kleiner als 5 und die Augenzahl des zweiten Würfels ist gerade.
Anzahl möglicher Ereignisse: 36
günstige Ereignisse: (1;2); (1;4); (1;6); (2;2); (2;4); (2;6); (3;2); (3;4); (3;6); (4;2); (4;4); (4;6)
Anzahl günstiger Ereignisse: 12
$P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = 33{,}\overline{3}\,\%$

2 Brettspiel mit Würfeln

a)



b) E_1: (g;g); (g;b); (b;g); (b;b)
$P(E_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{1}{36} + \frac{2}{36}$
$+ \frac{2}{36} + \frac{4}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\,\%$
E_2: (g;r); (b;r); (r;g); (r;b)
$P(E_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{2}{12} + \frac{2}{6} = \frac{6}{12}$
$= \frac{1}{2} = 0{,}50 = 50\,\%$
E_3: (g;g); (b;b); (r;r)
$P(E_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{9}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$
$= 0{,}3\overline{8} = 38{,}\overline{8}\,\%$

3 Glücksrad

X: Gewinn in €

Ereignis	„2 €“	„3 €“	„4 €“
x_i	–1	0	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) = -1 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
Man verliert langfristig im Schnitt $\frac{1}{8}$ €, also ca. 12,5 Cent pro Spiel.

4 Schaltbrett

$P(E_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

$P(E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{8}$

$P(E_3) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$

$P(E_4) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$

5 Schmuggelgut

a) S = Schmuggelgut
K = kein Schmuggelgut
$P(S) = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$

$P(K) = \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

$P(KKK) = \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} = 38{,}18\,\%$

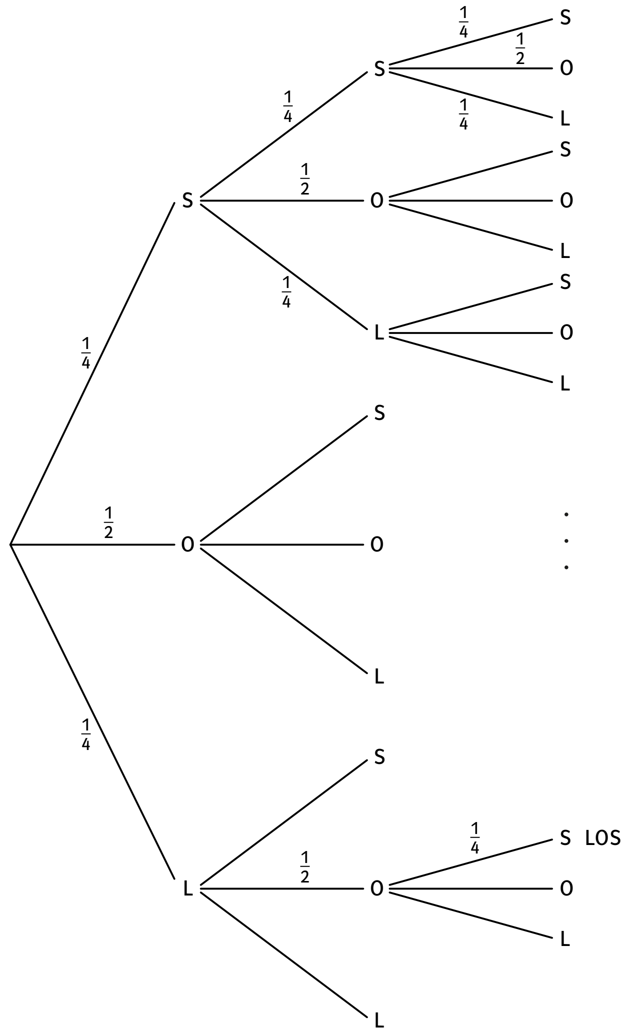
b) E = {(KSK), (SKK), (KKS)}
$P(E) = \frac{9}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{8}{10} + \frac{3}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} + \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{3}{10} = 49{,}09\,\%$

6 Elektrogeschäft

a) E: Alle Glühbirnen sind in Ordnung
P(„eine Glühbirne ist defekt") = 0,005
P(„eine Glühbirne ist in Ordnung") = 1 – 0,005 = 0,995
$P(E) = (0{,}995)^5 \approx 0{,}9752 = 97{,}52\,\%$
b) F: Mindestens eine Glühbirne ist defekt.
$\overline{F}$: Alle Glühbirnen sind in Ordnung.
$P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - P(E) \approx 1 - 0{,}9851 = 0{,}0149 = 1{,}49\,\%$

7 Buchstabenkarten

a)



b) $P(LOS) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = 0{,}0313 = 3{,}13\,\%$

8 Würfel mit 30 Seiten

a) A: gewürfelte Zahl ist durch 4 teilbar oder eine Primzahl
Anzahl möglicher Ereignisse: 30
günstige Ereignisse: 2; 3; 4; 5; 7; 8; 11; 12; 13; 16; 17; 19; 20; 23; 24; 28; 29
$P(A) = \frac{17}{30} \approx 0{,}5667 = 56{,}67\,\%$
b) B: erste Zahl ist gerade oder die zweite Zahl ist kleiner als 11
E: erste Zahl ist gerade $\qquad P(B) = \frac{15}{30} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

F: zweite Zahl ist kleiner als 11 $\qquad P(C) = 1 \cdot \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$
$B \cup C: \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
Additionssatz:
$P(B) = (E \cup F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6} = 66{,}\overline{6}\,\%$

SCHRITT 8

Das brauchst du wieder

Zwei schwarze Karten: $P(X = ss) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} \approx 0{,}1071 = 10{,}71\,\%$

Zuerst eine rote, dann eine schwarze Karte:
$P(X = rs) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56} \approx 0{,}2679 = 26{,}79\,\%$

Zuerst eine schwarze, dann eine rote Karte:
$P(X = sr) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56} \approx 0{,}2679 = 26{,}79\,\%$

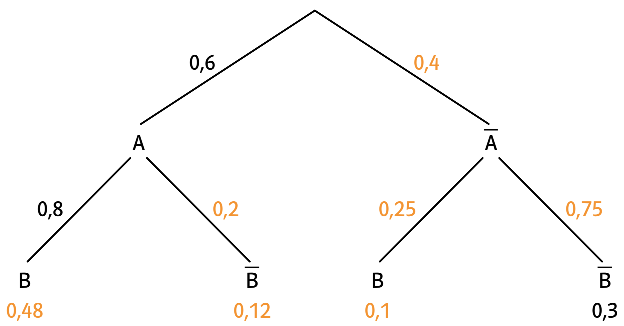
1 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten

Schreibe das Ergebnis und die Bedingung auf:
Ergebnis: „ungerade Zahl und 1“
Bedingung: ungerade Zahl
Lies aus der Tabelle die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse ab und addiere:
$P(u \cap 1) = 0{,}3$
$P(u) = 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}8$
Berechne mithilfe der Formel die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_u(1)$:

$Pu(1) = \frac{P(u \cap 1)}{P(u)} = \frac{0{,}3}{0{,}8} = 0{,}375 = 37{,}5\,\%$

2 Baumdiagramm

a)



b) $P_A(B) = 0{,}8$ $P_{\bar{A}}(B) = 0{,}25$ $P_A(\bar{B}) = 0{,}2$ $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0{,}75$

3 Jugendgruppe

R: rothaarig M: Mädchen

$P_M(R) = \frac{P(R \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}15}{0{,}6} = 0{,}25 = 25\,\%$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 25 %.

4 Hochsprung-Wettbewerb

1,90: über 1,90 Meter gesprungen
2,00: über 2 Meter gesprungen

$P_{1,90}(2{,}00) = \frac{P(1{,}90 \cap 2{,}00)}{P(1{,}90)} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = 0{,}25 = 25\,\%$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 25 %.

5 Rauchmelder

a) $P_R(S)$: Wahrscheinlichkeit, dass das Signal ertönt, nachdem sich Rauch gebildet hat.
$P_R(\bar{S})$: Wahrscheinlichkeit, dass das Signal nicht ertönt, nachdem sich Rauch gebildet hat.
$P_{\bar{R}}(S)$: Wahrscheinlichkeit, dass das Signal ertönt, ohne das sich vorher Rauch gebildet hat.
b) $P_R(S)$ ist eher groß; $P_R(\bar{S})$ ist eher klein; $P_{\bar{R}}(S)$ ist eher klein.

6 Würfelbecher

G: Beide Zahlen sind gerade.
$P(G) = \frac{9}{36}$
6: Genau eine Zahl ist eine 6.
$P(G \cap 6) = \frac{4}{36}$

$P_G(6) = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{4}{9} = 0{,}\overline{5} = 44{,}\overline{4}\,\%$

7 Smartphones

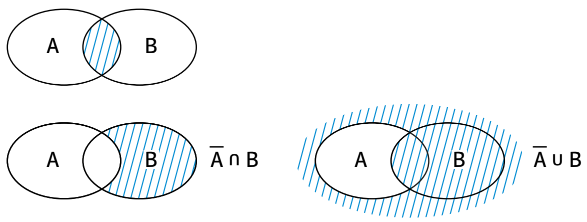
a) P („Das Smartphone funktioniert auch noch nach 2 Jahren einwandfrei.“) $= \frac{375}{500} = 0{,}75 = 75\,\%$;

b) $P_{2J}(4J) = \frac{P(2J \cap 4J)}{P(2J)} = \frac{P(4J)}{P(2J)} = \frac{255}{375} = 0{,}68 = 68\,\%$;

Anmerkung: Bei diesem Beispiel gilt:
$P(4J) = P(2J \cap 4J)$

SCHRITT 9

Das brauchst du wieder



1 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten

Schreibe die Merkmale und ihre Anzahlen auf:
männlich (m) = 225; weiblich (w) = 275
männlich ohne Wirkung $(m \cap \bar{W}) = 120$
weiblich ohne Wirkung $(w \cap \bar{W}) = 80$
Trage die Werte in die Vierfeldertafel ein und ergänze sie:

	W	$\bar{W}$	
m	105	120	225
w	195	80	275
	300	200	500

2 Kursstufe/Instrument

a) 35 Schüler sind Mädchen und spielen ein Blasinstrument.
24 Schüler sind Jungen und spielen ein Streichinstrument.
52 Schüler spielen ein Streichinstrument. Insgesamt sind es 120 Schüler.

b)

	S-I	B-I	
M	28	35	63
J	24	33	57
	52	68	120

c) M: 63 J: 57 B-I:68 $J \cap$ B-I:33

3 Schreibfehler

	S-I	B-I	
A	~~10~~ 6	18	24
$\overline{A}$	12	4	16
	18	22	40

4 Daten eintragen

	A	$\overline{A}$	
B	7	12	19
$\overline{B}$	3	3	6
	10	15	25

5 Obstplantage

a) M: Mehltau; K: Kirchbäume; P: Pfirsichbäume

	K	P	
M	28	12	40
$\overline{M}$	62	58	120
	90	70	160

b) 62 Kirschbäume sind nicht vom Mehltau befallen.

6 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten

Trage die Prozentzahlen als Dezimalzahlen in die Vierfeldertafel ein und ergänze sie:
(M = Mädchen; J = Junge, Th = Theatergruppe, Mu = Musikgruppe)

	Th	Mu	
M	0,4	0,15	0,55
J	0,2	0,25	0,45
	0,6	0,4	1

Lies aus der Vierfeldertafel ab:

a) $P(Mu) = 0{,}4 = 40\,\%$

b) $P(J \cap Mu) = 0{,}25 = 25\,\%$

7 Vierfeldertafel vervollständigen

	B	$\overline{B}$	
A	0,24	0,1	0,34
$\overline{A}$	0,36	0,3	0,66
	0,6	0,4	1

b) $P(A) = 0{,}34 = 34\,\%$
$P(A \cap B) = 0{,}24 = 24\,\%$
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3 = 30\,\%$

8 Rauchen

a)

	R	$\overline{R}$	
w	58	86	144
m	53	43	96
	111	129	240

b)

	R	$\overline{R}$	
w	0,2417	0,3583	0,6
m	0,2208	0,1792	0,4
	0,4625	0,5375	1

c) (1) $P(m) = 0{,}4 = 40\,\%$
(2) $P(m \cap R) \approx 0{,}2208 = 22{,}08\,\%$
(3) $P(w \cap \overline{R}) \approx 0{,}3583 = 35{,}83\,\%$

9 Dorffest

a) F: Fußball; H: Handball; Ho: Hobby-Gruppen; V: Vereine

	F	H	
Ho	10	2	12
V	22	6	28
	32	8	40

b) $P(Ho \cap H) = \frac{2}{40} = 0{,}05 = 5\,\%$

10 Erhebung über Berufstätigkeit

w: weiblich   m: männlich   b: berufstätig
$P(w) = 0{,}513$ $P(m) = 0{,}487$ $P_w(b) = 0{,}534$
$P_m(b) = 0{,}672$

a) $P(w \cap b) = P(w) \cdot P_w(b) = 0{,}513 \cdot 0{,}534 \approx 0{,}2739 = 27{,}39\,\%$
$P(m \cap b) = P(m) \cdot P_m(b) = 0{,}487 \cdot 0{,}672 \approx 0{,}3273 = 32{,}73\,\%$

b)

	m	w	
b	0,3273	0,2739	0,6012
$\overline{b}$	0,1597	0,2391	0,3988
	0,487	0,513	1

11 Bürgermeisterwahl

$P(A) = 0{,}425 \qquad P(Ü50) = 0{,}556 \qquad P_{Ü50}(A) = 0{,}53$

$P(Ü50 \cap A) = P(Ü50) \cdot P_{Ü50}(A) = 0{,}556 \cdot 0{,}53 \approx 0{,}2947 = 29{,}47\,\%$

	A	$\overline{A}$	
Ü50	0,2947	0,2613	0,556
U50	0,1303	0,3137	0,444
	0,425	0,575	1

$P(U50) = 0{,}444 = 44{,}4\,\%$

$P_{U50}(\overline{A}) = \frac{P(U50 \cap \overline{A})}{P(U50)} = \frac{0{,}3137}{0{,}444} \approx 0{,}7065 = 70{,}65\,\%$

SCHRITT 10

Das brauchst du wieder

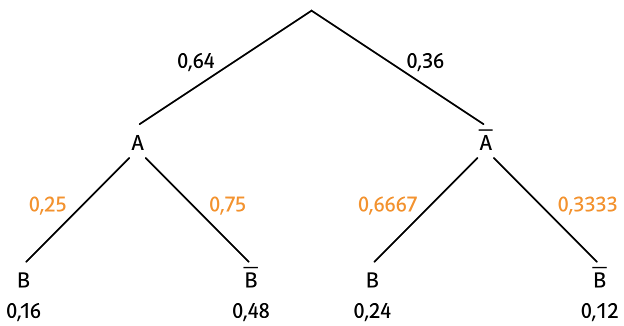
	B	$\overline{B}$	
A	0,35	0,25	0,6
$\overline{A}$	0,25	0,15	0,4
	0,6	0,4	1

$P(A) = 0{,}6; \quad P(\overline{A} \cap B) = 0{,}25 \quad P(A \cap \overline{B}) = 0{,}25$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}15$

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten

a) Zeichne das Baumdiagramm mit den Wahrscheinlichkeiten, die du aus der Vierfeldertafel ablesen kannst:



b) Berechne die fehlenden bedingten Wahrscheinlichkeiten und trage sie in das Baumdiagramm ein:

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}16}{0{,}64} = 0{,}25$

$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}24}{0{,}36} = 0{,}\overline{6} \approx 0{,}6667$

$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - P_{\overline{A}}(B) = 1 - 0{,}\overline{6} = 0{,}\overline{3} \approx 0{,}3333$

2 Vierfeldertafel ergänzen

a)

	B	$\overline{B}$	
A	0,2	0,24	0,44
$\overline{A}$	0,15	0,41	0,56
	0,35	0,65	1

b) $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}24 \quad P(\overline{A} \cap B) = 0{,}15 \quad P(\overline{B}) = 0{,}65$

c) $P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}15}{0{,}56} \approx 0{,}2679$

$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}24}{0{,}65} \approx 0{,}3692 = 36{,}92\,\%$

3 Baumdiagramm aus entsprechendem Vierfeldertafel erstellen

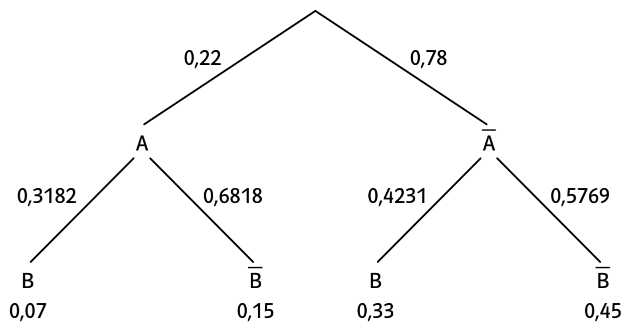
a)

	B	$\overline{B}$	
A	0,07	0,15	0,22
$\overline{A}$	0,33	0,45	0,78
	0,4	0,6	1

b) $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}07}{0{,}22} \approx 0{,}3182$

$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}33}{0{,}78} \approx 0{,}4231$

c)



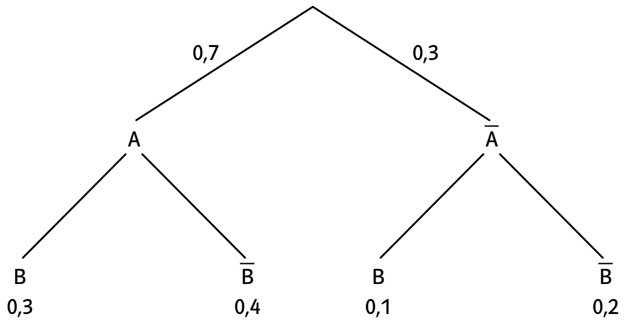
4 Vierfeldertafel aus entsprechendem Baumdiagramm erstellen

a)

	B	$\overline{B}$	
A	0,3	0,4	0,7
$\overline{A}$	0,1	0,2	0,3
	0,4	0,6	1

$P(A) = 0{,}7 \qquad P(\overline{A}) = 0{,}3 \qquad P(B) = 0{,}4 \qquad P(\overline{B}) = 0{,}6$

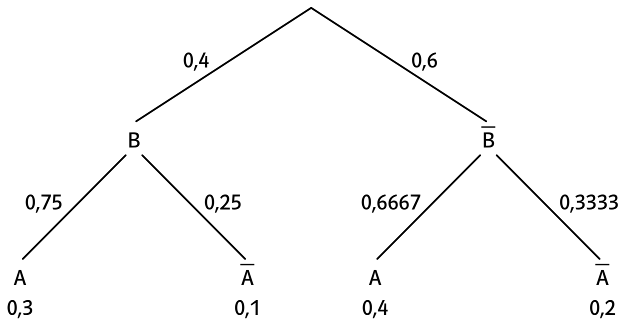
b)



$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,7} \approx 0,4286$

$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0,1}{0,3} \approx 0,3333$

c)



5 Netz mit Bällen

a)

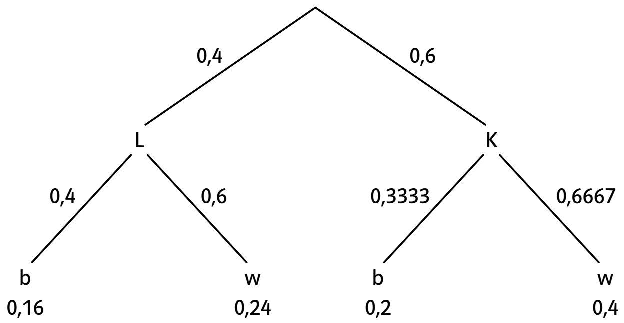
	L (Leder)	K (Kunststoff)	
w (weiß)	6	10	16
b (bunt)	4	5	9
	10	15	25

b) $P(L) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0,4$

c) $P(L \cap b) = \frac{4}{25} = 0,16$

d) $P_L(b) = \frac{P(L \cap b)}{P(L)} = \frac{0,16}{0,4} = 0,4$

e)



6 Spam

a)

	F – T	$\overline{F-T}$	
S (Spam)	16	20	36
$\overline{S}$ (kein Spam)	2	10	12
	18	30	48

b) $P_{\overline{S}}(F-T) = \frac{P(\overline{S} \cap F-T)}{P(\overline{S})} = \frac{2}{12} = 0,1667$

c) $P_{\overline{F-T}}(S) = \frac{P(\overline{F-T} \cap S)}{P(\overline{F-T})} = \frac{20}{30} = 0,6667$

7 Musikschule

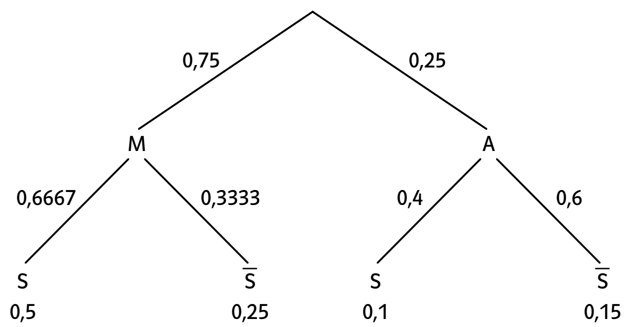
a)

	M (Musik-schule)	A (Außer-halb)	
S (Saxophon)	0,5	0,1	0,6
$\overline{S}$ (kein Saxophon)	0,25	0,15	0,4
	0,75	0,25	1

b) 24 Saxophon-Spieler entsprechen 60 % der Bandmitglieder.
→ 4 Spieler entsprechen 10 % der Bandmitglieder.
→ 40 Spieler entsprechen 100 % der Bandmitglieder.
→ 25 % davon, also 10 Spieler kommen von außerhalb.

c) $P_A(S) = \frac{P(A \cap S)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,25} = 0,4$

d)

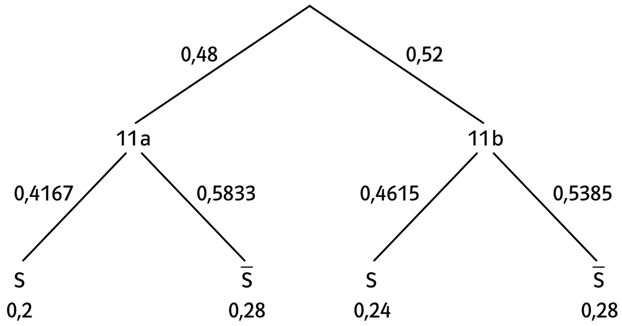


8 Kursstufe Stochastik

a)

	11a	11b	
S (Mögen Stochastik)	10	12	22
$\overline{S}$ (Mögen kein Stochastik)	14	14	28
	24	26	50

b)



c) In der 11b mögen ca. 46,15 % Stochastik und damit prozentual mehr als in der 11a.

9 Kleinstadt

	m (männlich)	w (weiblich)	
Ü (Über 65)	1800	2 000	3800
U (unter 65)	15 000	16 200	31 200
	16 800	18 200	35 000

a) $P(\text{Ü}) = \frac{3800}{35000} \approx 0{,}1086$

b) $P_{\text{Ü}}(m) = \frac{P(\text{Ü} \cap m)}{P(\text{Ü})} = \frac{1800}{3800} \approx 0{,}4737$

c) $P_m(\text{Ü}) = \frac{P(m \cap \text{Ü})}{P(m)} = \frac{1800}{16800} \approx 0{,}1071$

d) $P_w(\text{Ü}) = \frac{P(w \cap \text{Ü})}{P(w)} = \frac{2000}{18200} \approx 0{,}1099$

Damit ist der Anteil der über 65-Jährigen bei den Frauen mit ca. 10,99% größer als bei den Männern.

SCHRITT 11

Das brauchst du wieder

$P(A \cap B) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32$

$P(\overline{A}) = 0{,}2$; $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}1$; $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}1 : 0{,}2 = 0{,}5$

1 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten

Notiere die Wahrscheinlichkeiten:
Mädchen = A; Jungen = $\overline{A}$; Musikinstrument = B;
kein Musikinstrument = $\overline{B}$

$P(A) = 0{,}45$; $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$

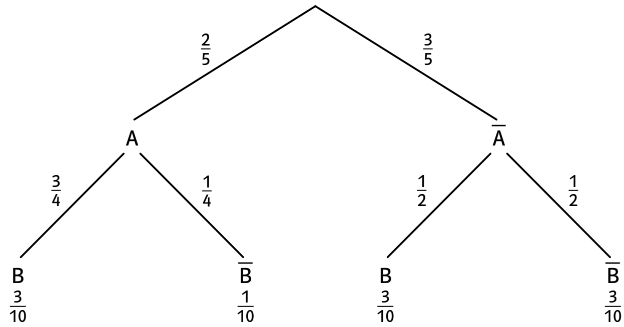
$P_A(B) = 0{,}6$; $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}5$

Berechne die totale Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) \\ &= 0{,}45 \cdot 0{,}6 + 0{,}55 \cdot 0{,}5 \\ &= 0{,}27 + 0{,}275 = 0{,}545 = 54{,}5\,\% \end{aligned}$$

54,5 % aller Kinder spielen ein Musikinstrument.

2 Fehlende Wahrscheinlichkeiten ergänzen



$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6$

$P(\overline{B}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

3 Kurssprecher

$P(K1) = 0{,}35 \qquad P(K2) = 0{,}7$

W: Wahlberechtigt $\qquad \overline{W}$: Nicht wahlberechtigt

$P_{K1}(W) = 0{,}54 \qquad P_{K2}(W) = 0{,}46$

$P(W) = P(K1) \cdot P_{K1}(W) + P(K2) \cdot P_{K2}(W) = 0{,}35 \cdot 0{,}54 + 0{,}7 \cdot 0{,}46 = 0{,}511$

Esther ist von 51,1 % aller Wahlberechtigten gewählt worden.

4 Gemeinde

KFZ: KFZ-Führerschein $\qquad \overline{KFZ}$: Keinen KFZ – Führerschein

M: Motorrad-Führerschein $\qquad \overline{M}$: Keinen Motorrad-Führerschein

$P(KFZ) = 0{,}9 \quad P(\overline{KFZ}) = 0{,}1 \qquad P_{KFZ}(M) = 0{,}15$

$P_{\overline{KFZ}}(M) = 0{,}25$

$P(M) = P(KFZ) \cdot P_{KFZ}(M) + P(\overline{KFZ}) \cdot P_{\overline{KFZ}}(M) =$
$0{,}9 \cdot 0{,}15 + 0{,}1 \cdot 0{,}25 = 0{,}16$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bewohner, den ich zufällig treffe, den Motorrad-Führerschein besitzt, beträgt 16 %.

5 Grippewelle

M: Männer $\quad$ F: Frauen $\quad$ K: Krank $\quad \overline{K}$: Nicht Krank

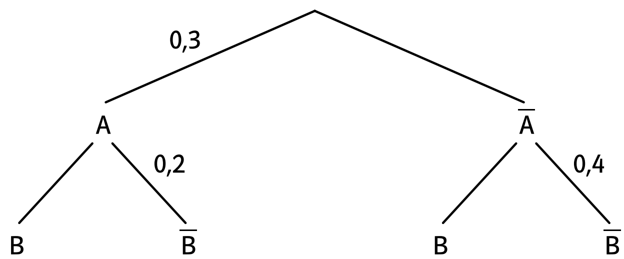
$P(M) = 0{,}52 \qquad P(F) = 1 - 0{,}52 = 0{,}48$

$P_M(K) = 0{,}034 \qquad P_F(K) = 0{,}009$

$P(K) = P(M) \cdot P_M(K) + P(F) \cdot P_F(K) =$
$0{,}52 \cdot 0{,}034 + 0{,}48 \cdot 0{,}009 = 0{,}022$

2,2 % aller Personen sind erkrankt.

6 Baumdiagramm



$P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}66 = 66\,\%$

7 Kartenstapel

R: Rot S: Schwarz A: Ass K: König

$P(R) = \frac{2}{3}$ $P_R(A) = \frac{3}{4}$ $P_S(A) = \frac{1}{2}$

a) $P(A) = P(R) \cdot P_R(A) + P(S) \cdot P_S(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

Die Wahrscheinlichkeit, ein Ass zu ziehen, ist $\frac{2}{3}$.

b) Es müssen immer doppelt so viele Asse wie Könige sein, also z. B. 4 Asse, 2 Könige.

8 Gymnasium

G: Gymnasium

EG: Elternteil hat das Gymnasium besucht

$P(G) = 0{,}52$ $P_G(EG) = 0{,}63$ $P_{\overline{G}}(EG) = 0{,}22$

$P_G(\overline{EG}) = 1 - P_G(EG) = 1 - 0{,}63 = 0{,}37$

$P_{\overline{G}}(\overline{EG}) = 1 - P_{\overline{G}}(EG) = 1 - 0{,}22 = 0{,}78$

$P(\overline{EG}) = P(G) \cdot P_G(\overline{EG}) + P(\overline{G}) \cdot P_{\overline{G}}(\overline{EG}) = 0{,}52 \cdot 0{,}37 + 0{,}48 \cdot 0{,}78 = 0{,}5668 = 56{,}68\,\%$

Die Wahrscheinlichkeit, ein Elternteil anzutreffen, das nicht auf dem Gymnasium war, ist ca. 56,68 %.

SCHRITT 12

Das brauchst du wieder

$P_A(B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$; $P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$; $P_{\overline{A}}(B) = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{10}$

$P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) =$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} = \frac{3}{12} + \frac{18}{30} = \frac{17}{20}$

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten

Schreibe die beiden Ergebnisse und ihre Wahrscheinlichkeiten auf:

$P(S1) = \frac{1}{2}$; $P(S2) = \frac{1}{2}$

1. Ergebnis: S1 und schwarz

$P(S1 \cap s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

2. Ergebnis: S2 und schwarz

$P(S2 \cap s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

Bestimme die totale Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Karte zu ziehen:

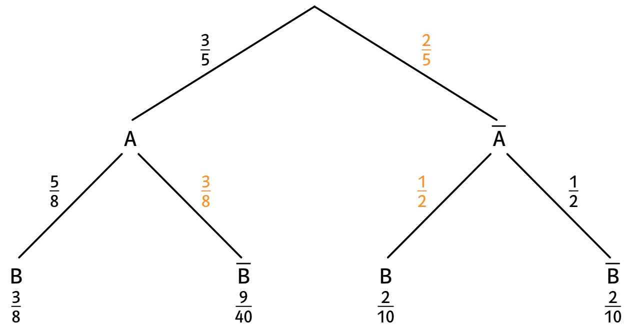
$P(s) = P(S1 \cap s) + P(S2 \cap s) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$

Berechne mit der Regel von Bayes die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_s(S2)$:

$$P_s(S2) = \frac{P(S2 \cap s)}{P(s)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4}$$

2 Fehlende Wahrscheinlichkeiten ergänzen

a)



$P(B) = \frac{3}{8} + \frac{2}{10} = \frac{23}{40}$ $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{17}{40}$

b) $P_B(A) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{23}{40}} = \frac{15}{23}$ $P_B(\overline{A}) = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{23}{40}} = \frac{8}{23}$ oder

$P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A) = 1 - \frac{15}{23} = \frac{8}{23}$

3 Spielwürfel

$$P_1(W2) = \frac{P(W2 \cap 1)}{P(W1) \cdot P_{W1}(1) + P(W2) \cdot P_{W2}(1)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6}} = \frac{3}{5}$$

4 Urne

a) $P_{blau}(U1) = \frac{P(U1 \cap blau)}{P(U1) \cdot P_{U1}(blau) + P(U2) \cdot P_{U2}(blau)} =$

$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}} = \frac{15}{31}$

b) $P_{blau}(U2) = \frac{P(U2 \cap blau)}{P(U1) \cdot P_{U1}(blau) + P(U2) \cdot P_{U2}(blau)} =$

$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}} = \frac{16}{31}$

Man stellt fest: $P_{blau}(U2) = 1 - P_{blau}(U1)$

5 Kindergarten

a) $P(\overline{S} \cap KG)$
Jemand ist Nichtschwimmer und im Kindergarten.

b) $P_{\overline{S}}(GS)$
Jemand, der Nichtschwimmer ist, ist in der Grundschule.

c) $P(KG)$
Jemand ist im Kindergarten.

d) $P_{KG}(S)$
Jemand, der im Kindergarten ist, ist Schwimmer.

6 Filmpremiere

Ü40: Über 40 U40: Unter 40 G: Fanden den Film gut

$\overline{G}$: Fanden den Film nicht gut

a) $P(G) = P(Ü40 \cap G) + P(U40 \cap G) = 0{,}35 \cdot 0{,}2 + 0{,}65 \cdot 0{,}6 = 0{,}46$

b) $P_G(Ü40) = \frac{P(Ü40 \cap G)}{P(G)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}2}{0{,}46} = 0{,}1522$

7 Schornsteinfeger

H: Heizung entspricht den Vorschriften.

$\overline{H}$: Heizung entspricht nicht den Vorschriften.

Ü10: Heizung ist älter als 10 Jahre.

U10: Heizung ist nicht älter als 10 Jahre.

a) $P(Ü10) = P(H \cap Ü10) + P(\overline{H} \cap Ü10) = 0{,}04 + 0{,}15 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$

b) $P_{Ü10}(\overline{H}) = \frac{P(\overline{H} \cap Ü10)}{P(Ü10)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}8}{0{,}16} = 0{,}75$

c) $P_{\overline{H}}(Ü10) = \frac{P(\overline{H} \cap Ü10)}{P(\overline{H})} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}8}{0{,}15} = 0{,}8$

8 Brauerei

A: 0,5 Liter Flaschen B: $\frac{1}{3}$ Liter Flaschen
D: Defekte Verschlüsse $\overline{D}$: Funktionierende Verschlüsse

$P(A) = 0{,}75$ $P(B) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$
$P(B \cap D) = 0{,}25 \cdot 0{,}05 = 0{,}0125$
Da $P(D) = P(B \cap D) + P(A \cap D)$ und $P(D) = 0{,}02$ ist, folgt
$P(A \cap D) = 0{,}02 - 0{,}0125 = 0{,}0075$

$P_A(D) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{0{,}0075}{0{,}75} = 0{,}01$

SCHRITT 13

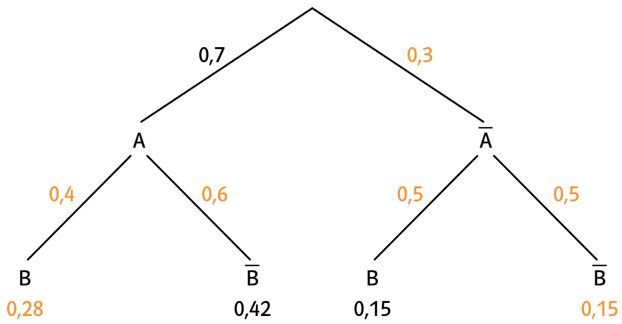
Das brauchst du wieder
$A \cap B = \{2;4\}$
$A \cap B = \{1;3;21\}$

1 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten

Schreibe die Ergebnisse und ihre Wahrscheinlichkeiten auf:
$A = \{4;5;6\}$ $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

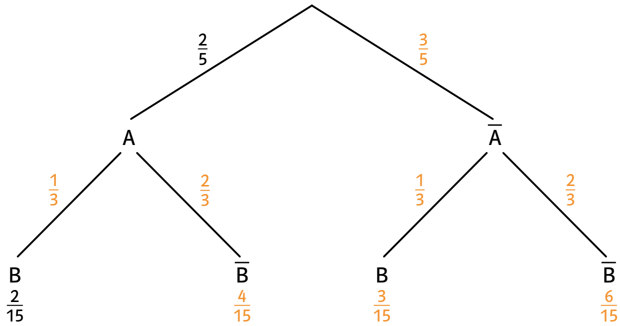
$B = \{2;4;6\}$ $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
Bilde das Produkt der beiden Wahrscheinlichkeiten:
$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
Schreibe die Schnittmenge und ihre Wahrscheinlichkeit auf:
$A \cap B = \{4;6\}$ $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
Vergleiche die beiden Ergebnisse:
$P(A \cap B) = \frac{1}{3} \neq P(A) \cdot P(B)$
Das heißt: A und B sind stochastisch abhängig.

2 Baumdiagramm ergänzen



$P(A) = 0{,}7$ $P(B) = 0{,}28 + 0{,}15 = 0{,}43$
$P_A(B) = 0{,}4$
A und B sind stochastisch abhängig.

3 Baumdiagramm ergänzen



Die $\frac{3}{15}$ wurde so gewählt, dass die Summe von $\frac{2}{15}$ und der Zahl, also insgesamt $P(B)$ gleich $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, also $P_A(B)$ ist.

4 Betriebssport

$P(S) = \frac{160}{400} = 0{,}4$ $P(l) = \frac{240}{400} = 0{,}6$
$P(S) \cdot P(l) = 0{,}24$ $P(S \cap l) = \frac{96}{400} = 0{,}24$
Damit sind die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig.

5 Vierfeldtafel ergänzen

	B	$\overline{B}$	
A	0,2	0,2	0,4
$\overline{A}$	0,3	0,3	0,6
	0,5	0,5	1

Es muss gelten: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$, also
$0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$

6 Urne

P („rote Kugel beim 1. Zug“) $= \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$
P („keine rote Kugel beim 3. Zug“) $= \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$
P („rote Kugel beim 1. Zug“) · P („keine rote Kugel beim 3. Zug“) $= \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$
P („rote Kugel beim 1. Zug ∩ keine rote Kugel beim 3. Zug) $= \frac{5}{8} \cdot 1 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$
Beide Ereignisse sind stochastisch unabhängig.

7 Zwei Würfel

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $P(B1) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$ $P(B2) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

$P(A) \cdot P(B1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{18} = \frac{7}{108}$ $P(A \cap B1) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
A und B1 sind stochastisch abhängig.

$P(A) \cdot P(B2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{27}$ $P(A \cap B2) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
A und B2 sind stochastisch abhängig.

8 Volleyball

V: Ein Mädchen spielt Volleyball.
$\overline{V}$: Ein Mädchen spielt nicht Volleyball.
b: blond $\overline{b}$: nicht blond
$P(V) = 0{,}3$ $P(b) = 0{,}65$ $P(V) \cdot P(b) = 0{,}195$
$P(V \cap b) + P(\overline{V} \cap b) = P(b)$
$P(V \cap b) + 0{,}315 = 0{,}65$
$P(V \cap b) = 0{,}335$
Die Haarfarbe ist stochastisch abhängig davon, ob ein Mädchen Volleyball spielt.

9 Fitness-Studio

M: Frau Müller ist im Fitness-Studio.
$\overline{M}$: Frau Müller ist nicht im Fitness-Studio.
S: Frau Schmidt ist im Fitness-Studio.
$\overline{S}$: Frau Schmidt ist nicht im Fitness-Studio.

a)

	M	$\overline{M}$	
S	0,5	0,1	0,6
$\overline{S}$	0,3	0,1	0,4
	0,8	0,2	1

Antwort: Beide Damen sind zu 50 % im Fitness-studio.

b) Abgelesene Werte:
$P(\overline{M}) = 0,2 \quad P(\overline{S}) = 0,4 \quad P(\overline{M} \cap \overline{S}) = 0,1$
$P(\overline{M}) \cdot P(\overline{S}) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08 \neq 0,1$
Das Nicht-Erscheinen der beiden Damen ist stochastisch unabhängig.

10 Fahrrad

F: Noah nimmt das Fahrrad.
$\overline{F}$: Noah nimmt nicht das Fahrrad.
S: Noah kommt zu spät.
$\overline{S}$: Noah kommt nicht zu spät.

	F	$\overline{F}$	
S	0,15	0,05	0,2
$\overline{S}$	0,65	0,15	0,8
	0,8	0,2	1

$P(F) = 0,8 \quad P(S) = 0,2 \quad P(F) \cdot P(S) = 0,16 \quad P(F \cap S) = 0,15$
Das Fahren mit dem Fahrrad und das Zu-spät-Kommen sind stochastisch abhängig.

TRAINING 2

1 Bedingte Wahrscheinlichkeit berechnen

a)

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{(P(A)} = \frac{\frac{40}{200}}{\frac{140}{200}} = \frac{4}{14} \approx 0,2857 = 28,57\,\%$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{40}{200}}{\frac{150}{200}} = \frac{4}{15} = 0,2\overline{6} = 26,\overline{6}\,\%$$

$$P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{100}{200}}{\frac{150}{200}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = 0,\overline{6} = 66,\overline{6}\,\%$$

$$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{50}{200}}{\frac{150}{200}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 0,\overline{3} = 33,\overline{3}\,\%$$

b)

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3} = 0,\overline{6} = 66,\overline{6}\,\%$$

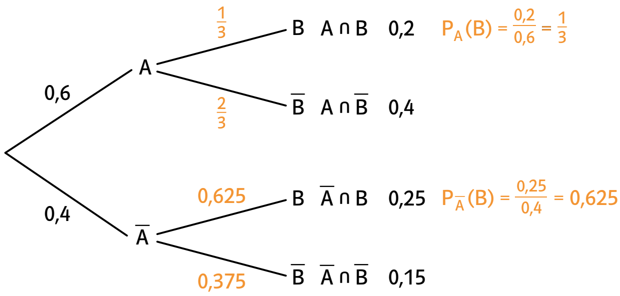
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,4}{0,7} = \frac{4}{7} = 0,5714 = 57,14\,\%$$

$$P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7} = 0,4286 = 42,86\,\%$$

$$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\,\%$$

2 Vierfeldertafel

a) blau
b) rot



3 Schule

S1: Sekundarstufe 1 S2: Sekundarstufe 2

	AG	$\overline{AG}$	
S1	200	400	600
S2	40	160	200
	240	560	800

$P(S1) = \frac{600}{800} = \frac{3}{4} \quad P(AG) = \frac{240}{800} = \frac{3}{10}$

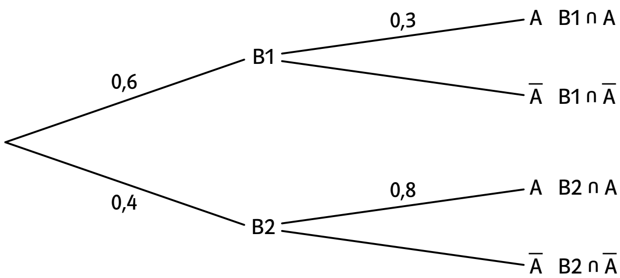
$P(S1) \cdot P(AG) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{40}$

$P(S1 \cap AG) = \frac{200}{800} = \frac{1}{4}$

→ Die Ereignisse S1 („geht in die Sekundarstufe 1“) und AG („besucht eine AG“) sind voneinander abhängig.

4 Bürgermeisterwahl

a)



b) $P(A) = P(B1 \cap A) + P(B2 \cap A)$
$= 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,8 = 0,5 = 50\,\%$
Er hat insgesamt 50 % der Stimmen erhalten.

5 Kartenstapel

A: Ziehung einer roten Karte
$\overline{A}$: Ziehung keiner roten Karte
B: Ziehung vom Stapel 1
$\overline{B}$: Ziehung vom Stapel 2
$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
Freund A hat also Recht.

6 Theater- und Musicalstück

T: Kannten das Theaterstück
$\overline{T}$: Kannten das Theaterstück nicht
M: Kannten das Musicalstück
$\overline{M}$: Kannten das Musicalstück nicht

$P(\overline{T}) = 0{,}68$

$P(\overline{T} \cap \overline{M}) = 0{,}6 \rightarrow P(\overline{T} \cap M) = P(\overline{T}) - P(\overline{T} - \overline{M})$

$= 0{,}68 - 0{,}6 = 0{,}08$

$P_{\overline{T}}(M) = \frac{0{,}8}{0{,}68} = \frac{2}{17} \approx 0{,}1176 = 11{,}76\,\%$

7 Zeitungsartikel

S: Zu schnelles Fahren

$\overline{S}$: Kein zu schnelles Fahren

U25: Personen unter 25 Jahren

Ü25: Personen über 25 Jahren

a)

	S	$\overline{S}$	
U25	0,24	0,44	0,68
Ü25	0,12	0,20	0,32
	0,36	0,64	1

b) $P(\text{Ü25} \cap S) = 0{,}12 = 12\,\%$

c) $P_{\text{Ü25}}(\overline{S}) = \frac{0{,}2}{0{,}32} = 0{,}625 = 62{,}5\,\%$

SCHRITT 14

Das brauchst du wieder

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \quad 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten

Notiere die Zufallsgröße und alle Daten des Zufallsexperiments:

X: Anzahl gerader Ergebnisse;

Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit n = 5; k = 3 und p = konstant.

Schreibe die Ergebnisse von Treffer und Niete und deren Wahrscheinlichkeiten auf:

$T = \{2; 4; 6\}$; $P(T) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$N = \{1; 3; 5\}$; $P(N) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten für 3 Treffer:

$\text{Anzahl} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$

Berechne die Wahrscheinlichkeit:

$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} = 31{,}25\,\%$

2 Binomialkoeffizienten

$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 1} = 3$; $\quad \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 1} = 4$;

$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 6$; $\quad \binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 4$;

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 10$

3 Bernoulli-Formel mit dem Taschenrechner

a) $P(X = 3) \approx 0{,}0425$

b) $P(X = 5) \approx 0{,}2007$

c) $P(X = 7) \approx 0{,}2150$

4 LED-Leuchten

X: Anzahl defekter Leuchten;

Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit n = 100 und p = 0,02.

a) $P(X = 2) = \binom{100}{2} \cdot (0{,}02)^2 \cdot (0{,}98)^{98} \approx 0{,}2734$

b) $P(X = 1) = \binom{100}{1} \cdot (0{,}02)^1 \cdot (0{,}98)^{99} \approx 0{,}2707$

c) $P(X = 5) = \binom{100}{5} \cdot (0{,}02)^5 \cdot (0{,}98)^{95} \approx 0{,}0353$

$P(X = 0) = \binom{100}{0} \cdot (0{,}02)^0 \cdot (0{,}98)^{100} \approx 0{,}1326$

Es ist wahrscheinlicher, dass keine LED-Leuchte defekt ist, als dass 5 defekt sind.

5 Bernoulli-Kette: Ja oder nein?

a) Es gibt zwei mögliche Ergebnisse, „Treffer" oder „Fehlwurf". Die Wahrscheinlichkeit beider Ergebnisse bleibt beim mehrmaligem Durchführen gleich. Es handelt sich daher um eine Bernoulli-Kette.

X: Anzahl Treffer; n = 20; p = 0,7

b) Es gibt zwei mögliche Ergebnisse, „Pasch" oder „kein Pasch".

Die Wahrscheinlichkeit beider Ergebnisse bleibt bei mehrmaligem Durchführen gleich. Es handelt sich daher um eine Bernoulli-Kette.

X: Anzahl Pasche; n = 20; $p = \frac{1}{6}$

c) Es gibt zwei mögliche Ergebnisse, „lebt mit nur einem Elternteil" oder „lebt mit beiden Elternteilen". Die Wahrscheinlichkeit beider Ergebnisse ändert sich aber je nach Zusammensetzung der Klasse. Es handelt sich daher nicht um eine Bernoulli-Kette.

6 Dodekaeder

A: n = 10; k = 3; $p = \frac{1}{12}$; $\quad P(X = 3) \approx 0{,}0378$

B: n = 10; k = 7; $p = \frac{1}{2}$; $\quad P(X = 7) \approx 0{,}1172$

C: n = 10; k = 5; $p = \frac{4}{12}$; $\quad P(X = 5) \approx 0{,}1366$

D: n = 10; k = 6; $p = \frac{5}{12}$; $\quad P(X = 6) \approx 0{,}1272$

7 Glücksrad mit 12 Sektoren

a) Da man nur die beiden Ergebnisse „weiß" und „nicht weiß" (blau und rot) betrachtet, kann man hier ein Bernoulli-Experiment annehmen.

b) X: Anzahl weißer Treffer;

Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit n = 5; k = 2 und $p = \frac{1}{4}$.

$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{27}{64} \approx 0{,}2637$

c) A: Man erhält bei 10 Versuchen genau 3-mal einen roten Sektor.

B: Man erhält bei 10 Versuchen genau 5-mal einen blauen Sektor.

8 Pokerkartenspiel

a) Ein mögliches Ergebnis lautet:

A: Man erhält beim Ziehen von 10 Karten genau 6 rote Karten.

b) Ein mögliches Ergebnis lautet:

B: Man erhält beim Ziehen von 10 Karten genau 3 Herz-Karten.

c) Ein mögliches Ergebnis lautet:

C: Man erhält bei Ziehen von 5 Karten genau 1 Ass-Karte.

SCHRITT 15

Das brauchst du wieder

$n = 5; p = 0{,}4$ $\quad P(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}2592$

$n = 7; p = \frac{1}{3}$ $\quad P(X = 4) = \binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0{,}1280$

$P(X = 5) = \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 0{,}0384$

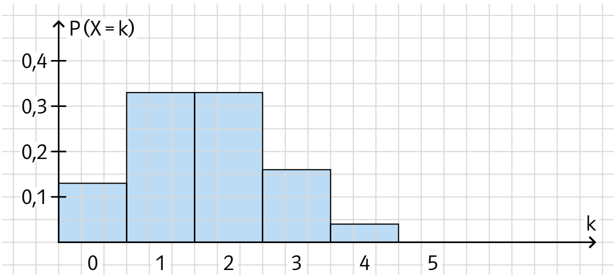
$P(X = 0) = \binom{7}{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \approx 0{,}0585$

1 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten

Berechne mit dem Taschenrechner die Wahrscheinlichkeiten für alle Treffer:

Treffer k	P (X = k)
0	0,1317
1	0,3292
2	0,3292
3	0,1646
4	0,0412
5	0,0041

Trage die Werte in ein Histogramm ein:



2 Werte von Binomialverteilungen berechnen

a) $B_{4;\,0,5}(1) = 0{,}25$

b) $B_{4;\,0,4}(2) = 0{,}3456$

c) $B_{3;\,0,8}(3) = 0{,}512$

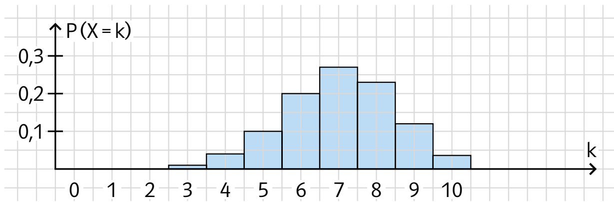
d) $B_{5;\,0,2}(0) = 0{,}32768$

e) $B_{5;\,0,6}(3) = 0{,}3456$

3 Histogramme zeichnen

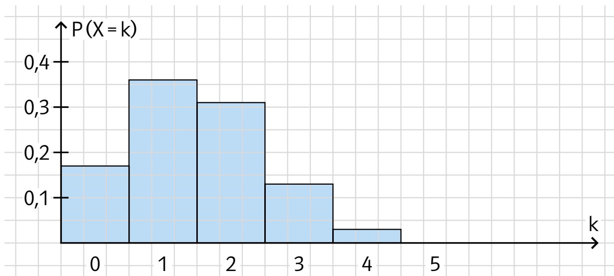
a) Wertetabelle und Histogramm der Binomialverteilung:

Treffer k	P (X = k)
0	0
1	0,0001
2	0,0014
3	0,0090
4	0,0368
5	0,1029
6	0,2001
7	0,2668
8	0,2335
9	0,1211
10	0,0282



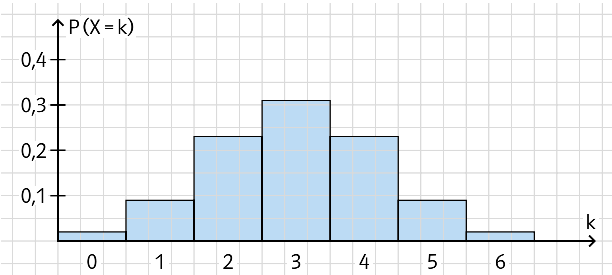
b) Wertetabelle und Histogramm der Binomialverteilung:

Treffer k	P (X = k)
0	0,1681
1	0,3602
2	0,3087
3	0,1323
4	0,0284
5	0,0024



c) Wertetabelle und Histogramm der Binomialverteilung:

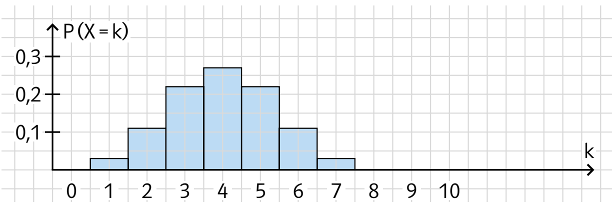
Treffer k	P (X = k)
0	0,0156
1	0,0938
2	0,2344
3	0,3125
4	0,2344
5	0,0938
6	0,0156



4 Reißnagel Aufgabe

X: Anzahl Reißnägel auf glatter Fläche;
Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit n = 10 und p = 0,4.
Wertetabelle und Histogramm der Binomialverteilung:

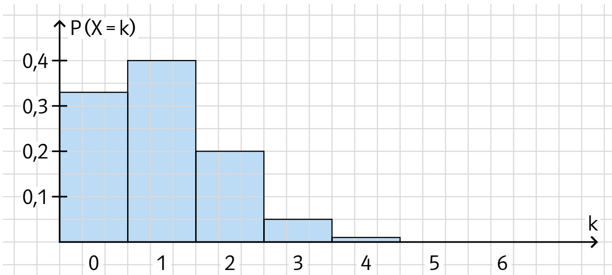
Treffer k	P (X = k)
0	0,0060
1	0,0403
2	0,1209
3	0,2150
4	0,2508
5	0,2007
6	0,1115
7	0,0425
8	0,0106
9	0,0016
10	0,0001



5 Würfel-Aufgabe

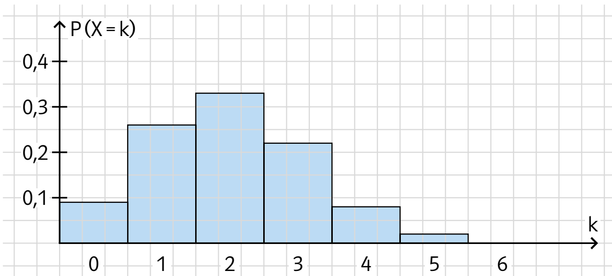
a) X: Augenzahl 6;
Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit n = 6 und $p = \frac{1}{6}$.
Wertetabelle und Histogramm der Binomialverteilung:

Treffer k	P (X=k)
0	0,3349
1	0,4019
2	0,2009
3	0,0536
4	0,0080
5	0,0006
6	0



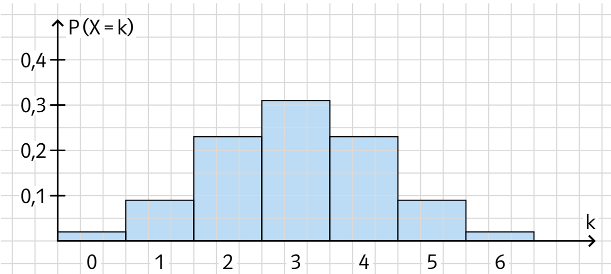
b) X: Augenzahl 1 oder 6;
Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit n = 6 und $p = \frac{1}{3}$.
Wertetabelle und Histogramm der Binomialverteilung:

Treffer k	P (X = k)
0	0,0878
1	0,2634
2	0,3292
3	0,2195
4	0,0823
5	0,0165
6	0,0014



c) X: Ungerade Augenzahl;
Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit n = 6 und $p = \frac{1}{2}$.
Wertetabelle und Histogramm der Binomialverteilung:

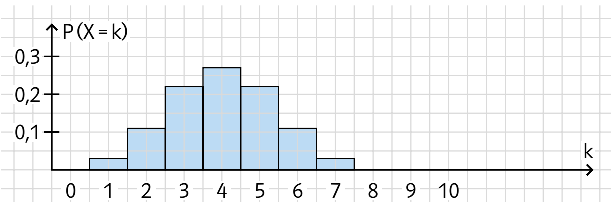
Treffer k	P(X = k)
0	0,0156
1	0,0938
2	0,2344
3	0,3125
4	0,2344
5	0,0938
6	0,0156



6 Münzwurf

a) Wertetabelle und Histogramm der Binomialverteilung:

Treffer k	P(X = k)
0	0,0039
1	0,0313
2	0,1094
3	0,2188
4	0,2734
5	0,2188
6	0,1094
7	0,0313
8	0,0039



b) Das Histogramm ist achsensymmetrisch, da die Trefferwahrscheinlichkeit bei einer Münze 50 % beträgt.

7 Diagramme zuordnen

Diagramm 1 → B
Diagramm 2 → C
Diagramm 3 → A

SCHRITT 16

Das brauchst du wieder

höchstens vier Schüler bedeutet: 0, 1, 2, 3 oder 4 Schüler
mindestens 8 von 10 Schülern bedeutet: 8, 9, oder 10 Schüler
mindestens 5, aber höchstens 9 Schülerinnen bedeutet: 5, 6, 7, 8 oder 9 Schülerinnen

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten

Schreibe alle Ergebnisse der Ereignisse mit deren Wahrscheinlichkeiten auf:
$P(E) = P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}02 + 0{,}12 = 0{,}14$
$P(F) = P(X \ge 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}3 + 0{,}38 + 0{,}18 = 0{,}86$

2 Kumulierte Wahrscheinlichkeiten mit Werten aus einer Tabelle

a) $P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}02 + 0{,}09 + 0{,}21 = 0{,}32$
b) $P(X < 5) = P(X \le 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}85$
c) $P(X > 4) = P(X \ge 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) = 0{,}15$
d) $P(X \ge 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) = 0{,}89$ oder $P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - 0{,}11 = 0{,}89$
e) $P(2 \le X \le 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}74$
f) $P(3 < X < 7) = P(4 \le X \le 6) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 0{,}39$

3 Kumulierte Wahrscheinlichkeiten mit Werten aus einem Histogramm

a) $P(X = 3) = 0{,}24$
b) $P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \approx 0 + 0{,}02 + 0{,}1 + 0{,}24 = 0{,}36$
c) $P(X \ge 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) \approx 0{,}33 + 0{,}24 + 0{,}07 = 0{,}64$
d) $P(3 \le X \le 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \approx 0{,}24 + 0{,}33 + 0{,}24 = 0{,}81$
e) $P(0 < X < 4) = P(1 \le X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \approx 0{,}02 + 0{,}1 + 0{,}24 = 0{,}36$

4 Kumulierte Wahrscheinlichkeiten mit dem Taschenrechner

a) $P(X \leq 6) \approx 0{,}8281$
b) $P(X \leq 5) \approx 0{,}8042$
c) $P(X \geq 32) = 1 - P(X \leq 31) \approx 0{,}9845$
d) $P(X \geq 26) = 1 - P(X \leq 25) \approx 0{,}4465$
e) $P(15 \leq X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 14) = 0{,}5574$
f) $P(25 < X < 35) = P(26 \leq X \leq 34) = P(X \leq 34) - P(X \leq 25) \approx 0{,}8465$

5 Münzwurf

X: Anzahl Würfe mit Ergebnis Zahl;
Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit $n = 100$ und $p = 0{,}5$.
a) $P(X = 50) \approx 0{,}0796 = 7{,}96\,\%$
b) $P(X \leq 50) \approx 0{,}5398 = 53{,}98\,\%$
c) $P(X \geq 50) = 1 - P(X \leq 49) \approx 0{,}5398 = 53{,}98\,\%$
d) $P(X < 60) = P(X \leq 59) \approx 0{,}9716 = 97{,}16\,\%$
e) $P(X > 60) = P(X \geq 61) = 1 - P(X \leq 60) \approx 0{,}0176 = 1{,}76\,\%$
f) $P(45 < X < 55) = P(46 \leq X \leq 54) = P(X \leq 54) - P(X \leq 45) \approx 0{,}6318 = 63{,}18\,\%$

6 Blumenzwiebeln

a) X: Anzahl rotblühender Zwiebeln;
Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit $n = 6$ und $p = 0{,}4$.
$P(X \leq 5) \approx 0{,}9959$
b) X: Anzahl gelbblühender Zwiebeln;
Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit $n = 6$ und $p = 0{,}3$.
$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0{,}2557$
c) X: Anzahl blaublühender Zwiebeln;
Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit $n = 6$ und $p = 0{,}3$.
$P(1 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X = 0) \approx 0{,}8714$

7 Überraschungseier

X: Anzahl Figuren;
Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit $n = 8$ und $p = \frac{1}{3}$.
a) $P(X \leq 4) \approx 0{,}9121$
b) $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0{,}2586$
c) $P(1 \leq X \leq 5)\ P = (X \leq 5) - P(X = 0) \approx 0{,}9413$

8 Brennen von CDs

X: defekte CDs;
Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit $n = 10$ und $p = 0{,}05$.
$P(X \leq 3) \approx 0{,}9990$
Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens drei defekt sind, liegt bei 99,9 %.

9 Kätzchen

X: männliche Kätzchen;
Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit $n = 4$ und $p = 0{,}54$.
$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0{,}7450$
Die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei männliche Kätzchen liegt bei 74,5 %.

10 Tombola

X: Gewinne;
Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit $p = 0{,}3$.
a) $n = 5$: $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0{,}4718$
Bei 5 Losen beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit 47,18 %.
b) $n = 10$: $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0{,}8507$
Bei 10 Losen beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit 85,07 %.

11 Ungleichungen

a) Die Ungleichung ist korrekt, denn da die kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 11)$ ein k mehr umfasst, ist sie größer als $P(X \leq 10)$.
b) Die Ungleichung ist nicht korrekt, denn da die kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(X > 10)$ ein k mehr umfasst, ist sie größer als $P(X > 11)$.
c) Nicht entscheidbar, da zwar beide Bereiche gleich groß sind, aber je nach Auswahl der Werte p und n entweder der eine oder der andere Bereich eine größere Wahrscheinlichkeit hat.
d) Die Ungleichung ist korrekt, denn $1 - P(X \leq 10) = P(X \geq 11)$ umfasst ein k weniger als $P(X \geq 10)$.

12 Aussagen über Binomialverteilung

a) Die Aussage ist korrekt, denn wenn die Anzahl n der Versuche zunimmt, vergrößert sich der Bereich von k + 1 bis n Treffern und damit wird die Wahrscheinlichkeit des Bereichs von 0 bis k Treffern kleiner.
b) Die Aussage ist korrekt, denn wenn die Anzahl n der Versuche zunimmt, vergrößert sich der Bereich von k bis n Treffern und damit wird die Wahrscheinlichkeit dieses Bereichs ebenfalls größer.

13 Roulette-Spiel

$A \rightarrow 3$; $C \rightarrow 1$; $B \rightarrow 1$

14 Parkplätze

X: Mitarbeiter, die mit dem Auto kommen;
Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit $n = 78$ und $p = \frac{1}{3}$.
a) Es ist noch ein Parkplatz vorhanden, wenn 25 oder weniger Mitarbeiter mit dem Auto gekommen sind.
$P(X \leq 25) \approx 0{,}4575$
Die Wahrscheinlichkeit, dass es noch einen freien Parkplatz gibt, liegt bei 45,75 %.
b) Gleiche Voraussetzungen wie in a), aber mit neuer Versuchsanzahl $n = 76$.
$P(X \leq 25) \approx 0{,}5216$
Die Wahrscheinlichkeit liegt bei 52,16 % und ist damit größer als 50 %.

SCHRITT 17

Das brauchst du wieder

$P(X = 13) \approx 0{,}0703$ $P(X = 14) \approx 0{,}0874$
$P(X = 15) \approx 0{,}1002$ $P(X = 16) \approx 0{,}1065$
$P(X = 17) = 0{,}1052$ $P(X = 18) = 0{,}0971$

1 „Du bist dran“ aus dem „So geht’s“-Kasten

Notiere die Zufallsgröße und alle benötigten Daten:

X: Anzahl Dreier = {0, 1, …, 15}

X ist binomialverteilt mit $n = 15$ und $p = \frac{1}{6}$.

$1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Setze die Werte in die Formeln ein:

$E(X) = 15 \cdot \frac{1}{6} = 2{,}5$

$\sigma = \sqrt{15 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 1{,}443$

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten in der σ-Umgebung von E (X). Zeichne ein Histogramm und markiere die σ-Umgebung :

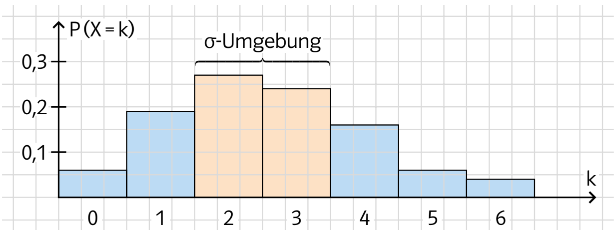
$E(X) - \sigma = 2{,}5 - 1{,}443 = 1{,}057$

$E(X) + \sigma = 2{,}5 + 1{,}443 = 3{,}943$

Die gesuchten Trefferzahlen sind 2 und 3.

$P(X = 2) \approx 0{,}2726$

$P(X = 3) \approx 0{,}2363$



2 Zusätzliche Wahrscheinlichkeiten in der 2σ-Umgebung

a)

$E(X) - 2\sigma \approx 5 - 2 \cdot 2{,}041 = 0{,}918$

$E(X) + 2\sigma \approx 5 + 2 \cdot 2{,}041 = 9{,}082$

$P(X = 1) \approx 0{,}0253$

$P(X = 2) \approx 0{,}0733$

$P(X = 8) \approx 0{,}0631$

$P(X = 9) \approx 0{,}0309$

(Alle restlichen Wahrscheinlichkeiten in der 2σ-Umgebung entsprechen denen aus dem Beispiel.)

b) $P(1 \le X \le 9) = P(X \le 9) - P(X = 0) \approx 0{,}9761$

In dieser Umgebung liegen also 97,61 % aller Treffer.

3 Vergleich von Binomialverteilungen

a) $B_{120;\,0,4}$: $E(X) = 120 \cdot 0{,}4 = 48$

$B_{80;\,0,6}$: $E(X) = 80 \cdot 0{,}6 = 48$

b) $B_{120;\,0,4}$: $P(46 \le X \le 50) = P(X \le 50) - P(X \le 45) \approx 0{,}3585$

Im Intervall liegen 35,85 % aller Ergebnisse.

$B_{80;\,0,6}$: $P(46 \le X \le 50) = P(X \le 50) - P(X \le 45) \approx 0{,}4314$

Im Intervall liegen 43,14 % aller Ergebnisse.

4 Histogramme vergleichen

a) $B_{10;\,0,4}$ ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}4$ und $(1 - p) = 0{,}6$.

$E(X) = 10 \cdot 0{,}4 = 4$

$\sigma = \sqrt{10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} \approx 1{,}549$

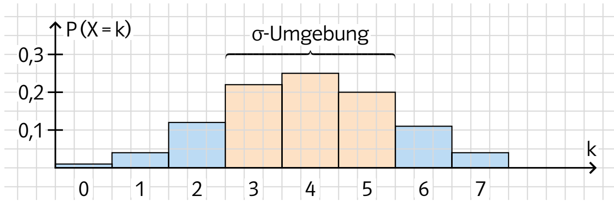
$E(X) - \sigma = 4 - 1{,}549 \approx 2{,}451$

$E(X) + \sigma = 4 + 1{,}549 \approx 5{,}549$

$P(X = 3) \approx 0{,}2150$

$P(X = 4) \approx 0{,}2508$

$P(X = 5) \approx 0{,}2007$



Restliche Wahrscheinlichkeiten zum Zeichnen des Histogramms:

$P(X = 0) \approx 0{,}0060$; $P(X = 1) \approx 0{,}0403$; $P(X = 2) \approx 0{,}1209$

$P(X = 6) \approx 0{,}1115$; $P(X = 7) \approx 0{,}0425$

b) $B_{20;\,0,2}$ ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}2$ und $(1 - p) = 0{,}8$.

$E(X) = 20 \cdot 0{,}2 = 4$

$\sigma = \sqrt{20 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} \approx 1{,}789$

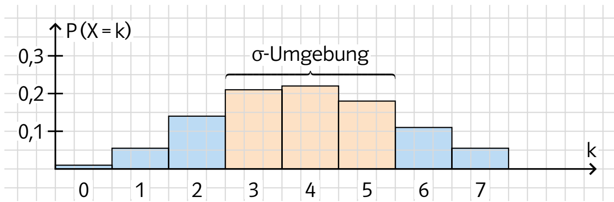
$E(X) - \sigma = 4 - 1{,}789 \approx 2{,}211$

$E(X) + \sigma = 4 + 1{,}789 \approx 5{,}789$

$P(X = 3) \approx 0{,}2054$

$P(X = 4) \approx 0{,}2182$

$P(X = 5) \approx 0{,}1746$



Restliche Wahrscheinlichkeiten zum Zeichnen des Histogramms:

$P(X = 0) \approx 0{,}0115$; $P(X = 1) \approx 0{,}0576$; $P(X = 2) \approx 0{,}1369$

$P(X = 6) \approx 0{,}1091$; $P(X = 7) \approx 0{,}0545$

Vergleicht man beide Histogramme, so fällt auf, dass diese recht ähnlich sind, obwohl sie zu unterschiedlichen Binomialverteilungen gehören. Das liegt daran, dass sie den gleichen Erwartungswert und die gleiche σ-Umgebung haben.

5 Erwartungswert, Standardabweichung und Bestimmung einer Umgebung

a) $E(X) = 100 \cdot 0{,}6 = 60$

$\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} \approx 4{,}899$

b) $E(X) - \sigma \approx 60 - 4{,}899 = 55{,}101$

$E(X) + \sigma \approx 60 + 4{,}899 = 64{,}899$

Innerhalb des Intervalls liegen die Trefferzahlen bei $56 \le k \le 64$.

c) $P(56 \le X \le 64) = P(X \le 64) - P(X \le 55) \approx 0{,}6416$
Es liegen 64,16 % aller Ergebnisse in diesem Intervall.
d) $P(53 \le X \le 67) = P(X \le 67) - P(X \le 52) \approx 0{,}8747$
$P(52 \le X \le 68) = P(X \le 68) - P(X \le 51) \approx 0{,}9179$
Die gesuchte Umgebung ist $[E(X) - 8; E(X) + 8]$.

6 n und p aus Histogrammen ablesen

Für n = 6 und p = 0,4 ist der Erwartungswert
$E(X) = 6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4$.
Dazu passt das Histogramm B.
In Histogramm C ist die höchste Säule bei k = 3, was auch dem Erwartungswert entspricht und das Histogramm ist symmetrisch. Damit ist p = 0,5 und n = 6.
In Histogramm A ist ebenfalls n = 6. Die höchste Säule liegt bei k = 4. Geht man daher von E(X) = 4 als Erwartungswert aus, so erhält man $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

7 Zuordnen mit dem Erwartungswert

Die drei Erwartungswerte lauten:
A: $E(X) = 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9$
B: $E(X) = 8 \cdot 0{,}5 = 4$
C: $E(X) = 8 \cdot 0{,}4 = 3{,}2$
Da der Erwartungswert im Histogramm auf oder neben der höchsten Säule liegt, ist C die passende Binomialverteilung.

8 Binomialverteilung, Erwartungswert, Begründen

a) $E(X) = 20 \cdot 0{,}4 = 8$
b) $P(X \le 8) \approx 0{,}5956$
Beim Erwartungswert liegt der größte Wert der Binomialverteilung. Die Summe der rechts und links davon liegenden Wahrscheinlichkeiten ist ungefähr gleich groß, also ohne den Erwartungswert jeweils etwas weniger als 50 %. Wird der Erwartungswert daher wie hier zur kumulierten Wahrscheinlichkeit hinzugenommen, wird diese größer als 50 %.

9 Münzwurf

a) $E(X) = 50 \cdot 0{,}5 = 25$
b) Das Histogramm ist symmetrisch zum Erwartungswert, da die Erfolgswahrscheinlichkeit 0,5 beträgt.
$P(X = 20) = P(X = 30) \approx 0{,}0419$
c) Da das Histogramm symmetrisch ist, sind die Wahrscheinlichkeiten im gleichen Abstand links und rechts vom Erwartungswert bzw. im gleichen Abstand vom Anfang bzw. Ende der Binomialverteilung gleich groß.
$P(X \le k)$ sind die von 0 bis k aufsummierten Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung. In $P(X \ge n - k)$ sind alle Wahrscheinlichkeiten von n − k bis n aufsummiert. Da es sich aufgrund der Symmetrie um die gleichen Wahrscheinlichkeiten wie von 0 bis k handelt, gilt also:
$P(X \le k) = P(X \ge n - k)$
Im konkreten Fall gilt:
$P(X \le 20) = P(X \ge 50 - 20) = P(X \ge 30) = 0{,}1013$

10 Aussagen prüfen

a) Betrachtet man die Formeln von Erwartungswert und Standardabweichung, so wird deutlich, dass beide bei gleichbleibendem p mit Anzahl der Versuche n größer werden. Die Aussage ist somit richtig.
b) Betrachtet man die Formel vom Erwartungswert, so wird deutlich, dass dieser bei festem n und zunehmendem p größer wird.
Betrachtet man die Formel der Standardabweichung, so sieht man, dass wenn p größer wird gleichzeitig (1 − p) kleiner wird. Die genaue Auswirkung auf den Wert der Standardabweichung hängt vom jeweiligen Wert von p ab.
Der erste Teil der Aussage ist somit richtig, über den zweiten Teil kann dagegen keine Entscheidung getroffen werden.

SCHRITT 18

Das brauchst du wieder
$P(X \ge 7) = 1 - P(X \le 6)$
$P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1)$

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten

Notiere die Zufallsgröße und alle benötigten Daten:
X: Anzahl Fünfen und Sechsen
X ist binomialverteilt mit $p = \frac{1}{3}$ und k = 2; n ist gesucht.
Schreibe die Bedingung für die Wahrscheinlichkeit auf:
$P(X \ge 2) \ge 0{,}8$
$1 - P(X \le 1) \ge 0{,}8 \quad |-1$
$-P(X \le 1) \ge -0{,}2 \quad |\cdot(-1)$
$P(X \le 1) \le 0{,}2$
Suche im Taschenrechner mit p aus der Aufgabenstellung und k aus der letzten Ungleichung den Wert für n, für den diese letzte Ungleichung erstmals erfüllt wird, durch Probieren.
n = 7: $P(X \le 1) \approx 0{,}2634$
n = 8: $P(X \le 1) \approx 0{,}1951$
Schreibe die Antwort auf:
Du musst den Würfel mindestens 8-mal werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % mindestens zweimal eine Zahl größer oder gleich 5 zu erhalten.

2 Kinderparadies
X: Anzahl goldener Bälle
X ist binomialverteilt mit $p = \frac{1}{4}$ und $k = 3$;
n ist gesucht.
$P(X \geq 3) \geq 0{,}5$
$1 - P(X \leq 2) \geq 0{,}5 \quad | -1$
$-P(X \leq 2) \geq -0{,}5 \quad | \cdot (-1)$
$P(X \leq 2) \leq 0{,}5$
$n = 10$: $P(X \leq 2) \approx 0{,}5256$
$n = 11$: $P(X \leq 2) \approx 0{,}4552$
Ein Kind muss mindestens 11 Bälle ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % mindestens drei goldene Bälle zu ziehen und einen davon behalten zu dürfen.

3 Quiz
X: Anzahl richtiger Antworten
X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}5$ und $k = 5$;
n ist gesucht.
$P(X \geq 5) \geq 0{,}8$
$P(X \leq 4) \leq 0{,}2$
$n = 11$: $P(X \leq 4) \approx 0{,}2744$
$n = 12$: $P(X \leq 4) \approx 0{,}1938$
Er muss mit mindestens 12 Fragen rechnen, bis er es mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % in die nächste Runde geschafft hat.

4 Tombola
X: Anzahl Gewinne
X ist binomialverteilt mit $p = \frac{1}{3}$ und $k = 3$;
n ist gesucht.
$P(X \geq 3) \geq 0{,}95$
$P(X \leq 2) \leq 0{,}05$
$n = 16$: $P(X \leq 2) \approx 0{,}0594$
$n = 17$: $P(X \leq 2) \approx 0{,}0442$
Er muss mindestens 17 Lose kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % mindestens drei Gewinne zu erzielen.

5 Statisten
X: Anzahl geeigneter Statisten
X ist binomialverteilt mit $p = \frac{1}{3}$ und $k = 200$;
n ist gesucht.
$P(X \geq 200) \geq 0{,}8$
$1 - P(X \leq 199) \geq 0{,}8 \quad | -1$
$-P(X \leq 199) \geq -0{,}2 \quad | \cdot (-1)$
$P(X \leq 199) \leq 0{,}2$
$n = 628$: $P(X \leq 199) \approx 0{,}2030$
$n = 629$: $P(X \leq 199) \approx 0{,}1953$
Das Team muss mindestens 629 Statisten einladen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % mindestens 200 geeignete Statisten zu finden.

6 Multiple-Choice-Test
X: Anzahl richtiger Antworten
X ist binomialverteilt mit $p = \frac{1}{4}$ und $k = 10$;
n ist gesucht.
$P(X \leq 10) \geq 0{,}9$
$n = 29$: $P(X \leq 10) \approx 0{,}9145$
$n = 30$: $P(X \leq 10) \approx 0{,}8943$
Der Test sollte höchstens 29 Fragen haben, damit man durch zufälliges Ankreuzen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % höchstens 10 richtige Antworten hat.

7 Autohaus
X: Anzahl ausgefüllter Fragebögen
X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}2$ und $k = 500$;
n ist gesucht.
$P(X \geq 500) \geq 0{,}75$
$1 - P(X \leq 499) \geq 0{,}75 \quad | -1$
$-P(X \leq 499) \geq -0{,}25 \quad | \cdot (-1)$
$P(X \leq 499) \leq 0{,}25$
$n = 2566$: $P(X \leq 499) \approx 0{,}2503$
$n = 2567$: $P(X \leq 499) \approx 0{,}2472$
Das Autohaus muss mindestens 2567 Fragebögen verschicken, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % mindestens 500 ausgefüllte Fragebögen zurück zu erhalten.

8 Diagramm unterschiedlich großer Stichproben
Bei der roten Datenreihe ist die Stichprobe größer. Würde man für die dargestellten drei Wahrscheinlichkeiten die kumulierte Wahrscheinlichkeit bilden, sie also addieren, dann wäre der Wert der roten kumulierten Wahrscheinlichkeit geringer. Daher muss die rote Datenreihe einen größeren Stichprobenumfang haben, denn z. B. wird $P(X \leq k)$ bei festen Werten für die Trefferanzahl k und die Trefferwahrscheinlichkeit p kleiner, je größer der Wert für n wird.

SCHRITT 19

Das brauchst du wieder
$\log_{0,8}(0{,}2) \approx 7{,}2126$

$\log_{\frac{3}{4}}(0{,}08) \approx 8{,}7796$

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten
Notiere die Zufallsgröße:
X: Anzahl aufeinanderfolgender Zahlen
Bestimme die Trefferwahrscheinlichkeit p:
Passende Ergebnisse: {12; 21; 23; 32; 34; 43; 45; 54; 56; 65}

$p = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

X ist binomialverteilt mit $p = \frac{5}{18}$ und $k = 1$;
n ist gesucht.
Schreibe die Bedingung für die Wahrscheinlichkeit auf:
$P(X \geq 1) \geq 0{,}9$
$P(X = 0) \leq 0{,}1$

Gib die Wahrscheinlichkeit 1−p für eine Niete an und ersetze P(X = 0) durch $(1-p)^n$:

$1 - p = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$

$P(X = 0) = \left(\frac{13}{18}\right)^n \leq 0{,}1$

Löse die entsprechende Gleichung nach n auf:

$n = \log_{\frac{13}{18}}(0{,}1) \approx 7{,}1$

Runde für die Antwort auf eine ganze Zahl auf:
Du musst mindestens 8-mal würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit zwei aufeinander folgende Zahlen zu erhalten, mindestens 90 % ist.

2 Spielwürfel
X: Anzahl Augenzahl Sechs
X ist binomialverteilt mit $p = \frac{1}{6}$ und k = 1;
n ist gesucht.

$1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1$

$n = \log_{\frac{5}{6}}(0{,}1) \approx 12{,}6$

Du musst mindestens 13-mal würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit eine Sechs zu erhalten, mindestens 90 % ist.

3 Lotterie
X: Anzahl Hauptgewinne
X ist binomialverteilt mit p = 0,02 und k = 1;
n ist gesucht.
$1 - p = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$
$P(X = 0) = 0{,}98^n \leq 0{,}2$
$n = \log_{0{,}98}(0{,}2) \approx 79{,}7$
Du musst mindestens 80 Lose kaufen, damit die Wahrscheinlichkeit einen Hauptgewinn zu erhalten, mindestens 80 % ist.

4 Torwandschießen
X: Treffer an der Torwand
X ist binomialverteilt mit $p = \frac{1}{5}$ und k = 1; n ist gesucht.

$1 - p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$P(X = 0) = \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 0{,}2$

$n = \log_{\frac{4}{5}}(0{,}2) \approx 7{,}2$

Er muss mindestens 8-mal schießen, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer mindestens 80 % ist.

5 Castingshow
X: Anzahl Castingshows, bei denen Stella angenommen wird.
X ist binomialverteilt mit $p = \frac{1}{20}$ und k = 1;
n ist gesucht.

$1 - p = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

$P(X = 0) = \left(\frac{19}{20}\right)^n \leq 0{,}5$

$n = \log_{\frac{19}{20}}(0{,}5) \approx 13{,}5$

Sie muss sich bei mindestens 14 Castingshows bewerben, damit die Wahrscheinlichkeit, bei einer angenommen zu werden, mindestens 50 % ist.

6 Schmuggelgut
X: Anzahl geöffneter Container mit Schmuggelgut
X ist binomialverteilt mit $p = \frac{3}{12}$ und k = 1;
n ist gesucht.
a) Bei zwei geöffneten Containern ist die Wahrscheinlichkeit, keinen einzigen mit Schmuggelgut zu erhalten, $P(X = 0) = (1 - p)^2 = \left(\frac{9}{12}\right)^2 \approx 0{,}5625$.
Damit ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Container mit Schmuggelgut zu finden, bei
1 − 0,5625 = 0,4375 = 43,75 % und damit deutlich unter den geforderten 60 %.
b) $P(X = 0) = \left(\frac{9}{12}\right)^n \leq 0{,}4$

$n = \log_{\frac{9}{12}}(0{,}4) \approx 3{,}18$

Man muss mindestens 4 Container öffnen, damit die Wahrscheinlichkeit, einen mit Schmuggelgut zu öffnen, mindestens 60 % ist.

7 Erfolgloses Würfeln
Die Wahrscheinlichkeit, z. B. fünfmal hintereinander keine 6 zu würfeln, ist $\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}4019$. Die Wahrscheinlichkeit, danach nochmal keine 6 zu würfeln, ist $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}3349$ und damit kleiner. Das heißt: Mit jedem Misserfolg sinkt die Wahrscheinlichkeit, weiterhin keine 6 zu erhalten.

SCHRITT 20

Das brauchst du wieder

k	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X = k)	0	0,01	0,05	0,14	0,27	0,30	0,18	0,05
P(X ≤ k)	0	0,01	0,06	0,20	0,47	0,77	0,95	1

$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$
$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$
$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0{,}77 = 0{,}23$

1 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten
Notiere die Zufallsgröße und alle benötigten Daten:
X: Anzahl der Treffer des Basketballspielers
X ist binomialverteilt mit n = 10 und k = 8;
p ist gesucht.

Schreibe die Bedingung für die Wahrscheinlichkeit auf:
$P(X \geq 8) \geq 0{,}9$
$P(X \leq 7) \leq 0{,}1$
Suche im Taschenrechner mit n aus der Aufgabenstellung und k aus der letzten Ungleichung den Wert für p; für den diese letzte Ungleichung erstmals erfüllt wird, durch Probieren.
$p = 0{,}884$: $P(X \leq 7) \approx 0{,}1004$
$p = 0{,}885$: $P(X \leq 7) \approx 0{,}0983$
Schreibe die Antwort auf:
Die Trefferwahrscheinlichkeit muss mindestens 88,5 % betragen, damit von 10 Würfen mindestens 8 mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit Treffer sind.

2 Biathlet
X: Anzahl Treffer des Biathleten
X ist binomialverteilt mit n = 5 und k = 3;
p ist gesucht.
$P(X \geq 3) \geq 0{,}9$
$1 - P(X \leq 2) \geq 0{,}9 \quad | -1$
$-P(X \leq 2) \geq -0{,}1 \quad | \cdot (-1)$
$P(X \leq 2) \leq 0{,}1$
Suche nach p mit einer Nachkommastelle:
$p = 0{,}7$: $P(X \leq 2) \approx 0{,}1631$
$p = 0{,}8$: $P(X \leq 2) \approx 0{,}0579$
p liegt zwischen 0,7 und 0,8; daher Suche nach p mit zwei Nachkommastellen:
$p = 0{,}75$: $P(X \leq 2) \approx 0{,}1035$
$p = 0{,}76$: $P(X \leq 2) \approx 0{,}0933$
p liegt zwischen 0,75 und 0,76; daher Suche nach p mit drei Nachkommastellen:
$p = 0{,}753$: $P(X \leq 2) \approx 0{,}1004$
$p = 0{,}754$: $P(X \leq 2) \approx 0{,}0993$
Die Trefferwahrscheinlichkeit muss mindestens 75,4 % betragen, damit von 5 Schüssen mindestens 3 mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit Treffer sind.

3 Torwandschießen
X: Anzahl Treffer
X ist binomialverteilt mit n = 6 und k = 5;
p ist gesucht.
$P(X \geq 5) \geq 0{,}8$
$P(X \leq 4) \leq 0{,}2$
$p = 0{,}860$: $P(X \leq 4) \approx 0{,}2003$
$p = 0{,}861$: $P(X \leq 4) \approx 0{,}1980$
Die Trefferwahrscheinlichkeit muss mindestens 86,1 % betragen, damit von 6 Schüssen mindestens 5 mit mindestens 80 % Wahrscheinlichkeit Treffer sind.

4 Nuss Mischung
X: Anzahl Nüsse einer bestimmten Sorte
X ist binomialverteilt mit n = 70 und gegebenen k (je nach Nusssorte); p ist gesucht.

Cashewkerne:
$P(X \geq 18) \geq 0{,}85$
$P(X \leq 17) \leq 0{,}15$
$p = 0{,}307$: $P(X \leq 17) \approx 0{,}1502$
$p = 0{,}308$: $P(X \leq 17) \approx 0{,}1461$
Die Cashewkerne müssen mindestens einen Anteil von 30,8 % an der Nussmischung haben, damit in einer Packung mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85 % mindestens 18 Cashewkerne sind.

Macadamianüsse
$P(X \geq 15) \geq 0{,}85$
$P(X \leq 14) \leq 0{,}15$
$p = 0{,}261$: $P(X \leq 14) \approx 0{,}1520$
$p = 0{,}262$: $P(X \leq 14) \approx 0{,}1476$
Die Macadamianüsse müssen mindestens einen Anteil von 26,2 % an der Nussmischung haben, damit in einer Packung mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85 % mindestens 15 Macadamia-Nüsse sind.

Paranüsse
$P(X \geq 12) \geq 0{,}85$
$P(X \leq 11) \leq 0{,}15$
$p = 0{,}215$: $P(X \leq 11) \approx 0{,}1501$
$p = 0{,}216$: $P(X \leq 11) \approx 0{,}1455$
Die Paranüsse müssen mindestens einen Anteil von 21,6 % an der Nussmischung haben, damit in einer Packung mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85 % mindestens 12 Paranüsse sind.

5 Glücksrad
a) X: Anzahl roter Sektoren
X ist binomialverteilt mit n = 10 und k = 4;
p ist gesucht.
$P(X \leq 4) \geq 0{,}8$
$p = 0{,}326$: $P(X \leq 4) \approx 0{,}8016$
$p = 0{,}327$: $P(X \leq 4) \approx 0{,}7997$
Die Trefferwahrscheinlichkeit darf höchstens 32,6 % betragen, damit von 10 Drehungen mit 80 % Wahrscheinlichkeit nicht mehr als 4 auf einem roten Sektor enden.
b) Die Winkelsumme des gesamten Glücksrads beträgt 360°.
$0{,}326 \cdot 360° = 117{,}36°$
Die Winkelsumme der roten Sektoren darf höchstens 117,36° betragen.

6 Dübel
X: Anzahl defekter Dübel
X ist binomialverteilt mit n = 1000 und k = 5;
p ist gesucht.
a) Für $p = 0{,}005$ ist $P(X \leq 5) \approx 0{,}6160$
Die Wahrscheinlichkeit für 5 oder weniger defekte Dübel liegt nur bei 61,6 % und ist damit zu gering.
b) $P(X \leq 5) \geq 0{,}85$
$p = 0{,}003$: $P(X \leq 5) \approx 0{,}9164$
$p = 0{,}004$: $P(X \leq 5) \approx 0{,}7854$
Die Fehlerquote bei der Herstellung darf höchstens 0,3 % betragen, damit von 1000 Dübeln mit mindestens 85 % Wahrscheinlichkeit nicht mehr als 5 defekt sind.

SCHRITT 21

Das brauchst du wieder
$P(X \leq 85) \approx 0{,}0538$
$P(X \geq 75) = 1 - P(X \leq 74) \approx 0{,}9981$

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten

Schreibe die Zufallsgröße und alle benötigten Daten auf:
X: Anzahl richtiger Antworten
X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = \frac{1}{3}$;
k ist gesucht.
Schreibe die Bedingung für die Wahrscheinlichkeit für k Treffer auf:
$P(X \geq k) \leq 0{,}1$
$1 - P(X \leq k - 1) \leq 0{,}1 \quad | -1$
$-P(X \leq k - 1) \leq -0{,}9 \quad | \cdot (-1)$
$P(X \leq k - 1) \geq 0{,}9$
Suche im Taschenrechner mit n und p aus der Aufgabenstellung den Wert für k, für den diese letzte Ungleichung erstmals erfüllt wird, durch Probieren:
$k - 1 = 8$: $P(X \leq 8) \approx 0{,}8095$
$k - 1 = 9$: $P(X \leq 9) \approx 0{,}9081$
Aus $k - 1 = 9$ folgt, dass $k = 10$ ist.
Schreibe die Antwort auf:
Die Lehrerin muss mindestens 10 richtige Antworten einfordern, damit die Wahrscheinlichkeit, zufällig zu bestehen, höchstens 10 % beträgt.

2 Verschiedene Werte von p

a) X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}6$.
$P(X \geq k) \leq 0{,}4$
$P(X \leq k - 1) \geq 0{,}6$
$k - 1 = 12$: $P(X \leq 12) \approx 0{,}5841$
$k - 1 = 13$: $P(X \leq 13) \approx 0{,}7500$
Gesuchte Trefferzahl: Aus $k - 1 = 13$ folgt, dass $k = 14$ ist.
b) X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}2$.
$P(X \geq k) \leq 0{,}5$
$P(X \leq k - 1) \geq 0{,}5$
$k - 1 = 3$: $P(X \leq 3) \approx 0{,}4114$
$k - 1 = 4$: $P(X \leq 4) \approx 0{,}6296$
Gesuchte Trefferzahl: Aus $k - 1 = 4$ folgt, dass $k = 5$ ist.
c) X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}3$.
$P(X \leq k) \leq 0{,}3$
$k = 4$: $P(X \leq 4) \approx 0{,}2375$
$k = 5$: $P(X \leq 5) \approx 0{,}4164$
Gesuchte Trefferzahl: $k = 4$
d) X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}7$.
$P(X \leq k) \leq 0{,}4$
$k = 13$: $P(X \leq 13) \approx 0{,}3920$
$k = 14$: $P(X \leq 14) \approx 0{,}5836$
Gesuchte Trefferzahl: $k = 13$

3 Spielautomat

X: Anzahl Sonnensymbole
X ist binomialverteilt mit $n = 16$ und $p = 0{,}1$.
$P(X \geq k) \leq 0{,}08$
$P(X \leq k - 1) \geq 0{,}92$
$k - 1 = 2$: $P(X \leq 2) \approx 0{,}7892$
$k - 1 = 3$: $P(X \leq 3) \approx 0{,}9316$
Aus $k - 1 = 3$ folgt, dass $k = 4$ ist.
Es müssen mindestens 4 Sonnensymbole verlangt werden, damit die Wahrscheinlichkeit den Jackpot zu gewinnen höchstens 8 % ist.

4 Würfelwurf

X: Anzahl der Würfe mit der Augenzahl Sechs
X ist binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = \frac{1}{6}$.
$P(X \geq k) \leq 0{,}05$
$P(X \leq k - 1) \geq 0{,}95$
$k - 1 = 8$: $P(X \leq 8) \approx 0{,}9494$
$k - 1 = 9$: $P(X \leq 9) \approx 0{,}9803$
Aus $k - 1 = 9$ folgt, dass $k = 10$ ist.
Sie muss mindestens 10-mal eine Sechs würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, dass dies zufällig geschieht höchstens 5 % ist.

5 Multiple-Choice-Test

X: Anzahl richtiger Antworten
X ist binomialverteilt mit $n = 40$ und $p = \frac{1}{4}$.
a) $E(X) = n \cdot p = 40 \cdot \frac{1}{4} = 10$
$k = 10$: $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 0{,}5605$
Bei einer Mindestanzahl von 8 richtigen Antworten, was dem Erwartungswert entspricht, wäre die Wahrscheinlichkeit durch zufälliges Ankreuzen diese Mindestanzahl zu erreichen bei 56,05 %.
b) $P(X \geq k) \leq 0{,}1$
$1 - P(X \leq k - 1) \leq 0{,}1 \quad | -1$
$-P(X \leq k - 1) \leq -0{,}9 \quad | \cdot (-1)$
$P(X \leq k - 1) \geq 0{,}9$
$k - 1 = 13$: $P(X \leq 13) \approx 0{,}8968$
$k - 1 = 14$: $P(X \leq 14) \approx 0{,}9456$
Aus $k - 1 = 14$ folgt, dass $k = 15$ ist.
Es müssen mindestens 15 richtige Antworten verlangt werden, damit die Wahrscheinlichkeit den Test durch zufälliges Ankreuzen zu bestehen, höchstens 10% beträgt.

6 Tombola

X: Anzahl Nieten
X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}3$.
$P(X \leq k) \leq 0{,}4$
$k = 2$: $P(X \leq 2) \approx 0{,}3828$
$k = 3$: $P(X \leq 3) \approx 0{,}6496$
Wenn man maximal zwei Nieten haben darf, beträgt die Wahrscheinlichkeit den Zusatzpreis zu erhalten höchstens 40 %.

7 Rote Gummibärchen

X: Anzahl falscher Antworten

X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}75$.

a) $P(X \le 4) \approx 0{,}0197$

Sie besteht den Test, unter der Annahme, dass sie nur rät, mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,97 %.

b) $P(X \le k) \le 0{,}1$

$k = 5$: $P(X \le 5) \approx 0{,}0781$

$k = 6$: $P(X \le 6) \approx 0{,}2241$

Sie dürfte maximal 5 falsche Antworten geben, damit die Wahrscheinlichkeit, dass ihr dies durch Raten gelingt, maximal 10 % beträgt.

TRAINING 3

1 Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung

X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}7$.

a) $P(X = 2) \approx 0{,}0014$

b) $P(X = 6) \approx 0{,}2001$

c) $P(X = 9) \approx 0{,}1211$

2 Urne mit schwarzen und roten Kugeln

a) X: Anzahl schwarzer Kugeln

X ist binomialverteilt mit $n = 8$ und $p = \frac{2}{5}$.

$P(X = 3) \approx 0{,}2150$

b) A: Genau 3 von 9 gezogenen Kugeln sind rot.

B: Genau 2 von 7 gezogenen Kugeln sind schwarz.

3 Kumulierte Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswert und Standardabweichung

X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}3$.

a) i. $P(X \le 8) \approx 0{,}8867$

ii. $P(X < 7) = P(X \le 6) \approx 0{,}6080$

iii. $P(X \ge 5) = 1 - P(X \le 4) \approx 0{,}7625$

iv. $P(7 \le X \le 14) = P(X \le 14) - P(X \le 6) \approx 0{,}3919$

v. $P(3 \le X < 12) = P(3 \le X \le 11) = P(X \le 11) - P(X \le 2)$
$\approx 0{,}9594$

b) $E(X) = 20 \cdot 0{,}3 = 6$

$1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

$\sigma = \sqrt{20 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} \approx 2{,}049$

$E(X) - \sigma = 6 - 2{,}049 \approx 3{,}951$

$E(X) + \sigma = 6 + 2{,}049 \approx 8{,}049$

Innerhalb des Intervalls liegen die Trefferzahlen $4 \le k \le 8$. $P(4 \le X \le 8) = P(X \le 8) - P(X \le 3) \approx 0{,}7796$

Es liegen 77,96 % aller Ergebnisse in diesem Intervall.

4 Linkshänder

X: Anzahl Linkshänder

X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}14$; n ist gesucht.

a) $k = 1$

$1 - p = 1 - 0{,}14 = 0{,}86$

$P(X = 0) = 0{,}86^n \le 0{,}25$

$n = \log_{0{,}86}(0{,}25) \approx 9{,}19$

Die Gruppe muss mindestens eine Größe von 10 Personen haben, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75 % mindestens ein Linkshänder darunter ist.

b) $k = 6$

$P(X \ge 6) \ge 0{,}75$

$1 - P(X \le 5) \ge 0{,}75 \qquad | -1$

$-P(X \le 5) \ge -0{,}25 \qquad | \cdot (-1)$

$P(X \le 5) \le 0{,}25$

$n = 51$: $\quad P(X \le 5) \approx 0{,}2634$

$n = 52$: $\quad P(X \le 5) \approx 0{,}2462$

Die Gruppe muss mindestens eine Größe von 52 Personen haben, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75 % mindestens sechs Linkshänder darunter sind.

5 Kugelschreiber

X: Anzahl defekter Kugelschreiber

X ist binomialverteilt mit $n = 200$ und $k = 5$; p ist gesucht.

$P(X \le 5) \ge 0{,}95$

$p = 0{,}013$: $\quad P(X \le 5) \approx 0{,}9521$

$p = 0{,}014$: $\quad P(X \le 5) \approx 0{,}9362$

Der Anteil der defekten Kugelschreiber in der Produktion darf höchstens 1,3 % betragen, damit in einer Packung von 200 Stück mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % höchstens 5 defekt sind.

6 Multiple-Choice-Test

X: Anzahl richtiger Fragen

X ist binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = \frac{1}{5}$.

a) $P(X = 5) \approx 0{,}1723$

b) $P(X \ge 8) = 1 - P(X \le 7) \approx 0{,}2392$

c) $P(X \ge k) \le 0{,}04$

$1 - P(X \le k - 1) \le 0{,}04 \qquad | -1$

$-P(X \le k - 1) \le -0{,}96 \qquad | \cdot (-1)$

$P(X \le k - 1) \ge 0{,}96$

$k - 1 = 9$: $\quad P(X \le 9) \approx 0{,}9389$

$k - 1 = 10$: $\quad P(X \le 10) \approx 0{,}9744$

Aus $k - 1 = 10$ folgt, dass $k = 11$ ist.

Es müssen mindestens 11 richtige Antworten verlangt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, den Test durch zufälliges Ankreuzen zu bestehen, höchstens 4 % beträgt.

7 Überbuchtes Flugzeug

a) X: Anzahl der Passagiere, die den Flug antreten,

X ist binomialverteilt mit $n = 320$ und $p = 0{,}95$.

$P(X > 300) = (X \ge 301) = 1 - P(X \le 300) \approx 0{,}8177$

Die Wahrscheinlichkeit, dass zu viele Buchungen angenommen wurden (und mehr als 300 Personen den gebuchten Flug antreten) liegt bei 81,77 %.

b) $P(X \ge 301) \le 0{,}05$

$1 - P(X \le 300) \le 0{,}05 \qquad | -1$

$-P(X \le 300) \le -0{,}95 \qquad | \cdot (-1)$

$P(X \le 300) \ge 0{,}95$

$n = 309$: $\quad P(X \le 300) \approx 0{,}9733$

$n = 310$: $\quad P(X \le 300) \approx 0{,}9491$

Die Fluggesellschafft sollte maximal 309 Buchungen annehmen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass das Flugzeug überbucht ist, höchstens 5 % beträgt.

8 Tombola

a) A: Genau 5 von 8 gezogenen Losen sind Gewinne.
b) B: Man zieht 6 Nieten.
c) C: Höchstens 2 von 9 gezogenen Losen sind Gewinne.

SCHRITT 22

Das brauchst du wieder

$r = \frac{37}{50} = 0{,}74 = 74\,\%$

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten

Lies an der Grafik den ungefähren Wert ab, dem sich die relativen Häufigkeiten annähern:

$p \approx 29\,\%$ (entspricht dem Wert nach 10 Jahren)

Berechne mit diesem Wert als Wahrscheinlichkeit die Anzahl an Schwimmern:

Anzahl $= p \cdot n = 0{,}29 \cdot 185 = 53{,}65$

Antwort:

Die Schule kann mit etwa 54 Schwimmern rechnen.

2 Verkehrskontrolle

a)

Jahr	2014	2015	2016	2017
Relative Häufigkeit	$\frac{157}{232} \approx 0{,}6767$	$\frac{161}{245} \approx 0{,}6571$	$\frac{177}{287} \approx 0{,}6167$	$\frac{181}{299} \approx 0{,}6054$

b) Zwar weisen von Jahr zu Jahr immer mehr Fahrräder Mängel auf, allerdings nimmt auch die Gesamtanzahl der kontrollierten Fahrräder zu.
Vergleicht man die relativen Häufigkeiten, so fällt sogar auf, dass der Anteil an Fahrrädern mit Mängeln von Jahr zu Jahr kleiner wird.

c) Geht man von der gleichen relativen Häufigkeit wie 2017 aus, so gilt:
$p \cdot n = 0{,}6054 \cdot 312 = 188{,}8848$
Es würden also ca. 189 Fahrräder Mängel aufweisen. Da die relative Häufigkeit aber wahrscheinlich weiter abnimmt, wird es eine geringere Anzahl sein.

3 Spielkegel

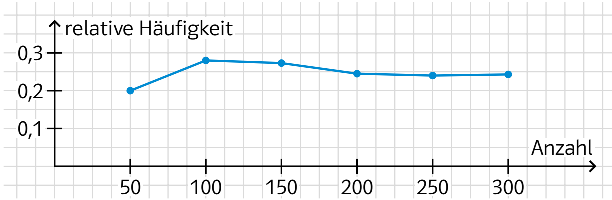
a)

Kind	A	B	C	D	E	F
Relative Häufigkeit „aufrecht"	$\frac{10}{50} = 0{,}2$	$\frac{18}{50} = 0{,}36$	$\frac{13}{50} = 0{,}26$	$\frac{8}{50} = 0{,}16$	$\frac{11}{50} = 0{,}22$	$\frac{13}{50} = 0{,}26$

b)

Anzahl	50	100	150	200	250	300
Anzahl „aufrecht"	10	28	41	49	60	73
Relative Häufigkeit	$\frac{10}{50} = 0{,}2$	$\frac{28}{100} = 0{,}28$	$\frac{41}{150} = 0{,}2\overline{73}$	$\frac{49}{200} = 0{,}245$	$\frac{60}{250} = 0{,}24$	$\frac{73}{300} = 0{,}24\overline{3}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spielkegel aufrecht stehen bleibt, hat näherungsweise den Wert 24,3 %.



c) $p \cdot n = 0{,}24\overline{3} \cdot 400 = 97{,}\overline{3}$
Es werden von 400 hingeworfenen Spielkegel voraussichtlich ca. 97 aufrecht stehen.

d) $p \cdot n = 0{,}24\overline{3} \cdot 1000 = 243{,}\overline{3}$
Es werden also eher 240 als 230 Spielkegel stehen, das „eher" bezieht sich darauf, dass diese Anzahl wahrscheinlicher ist, es aber auch durchaus sein kann, dass nur 230 Spielkegel stehen werden.

SCHRITT 23

Das brauchst du wieder

$P(X \leq 12) \approx 0{,}0275$
$P(X \leq 13) \approx 0{,}0501$
$E(X) = 120 \cdot \frac{1}{6} = 20$

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten

Definiere die Zufallsgröße X und ihre Verteilung:

X: Anzahl gewürfelter Dreien
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 600$ und $p = \frac{1}{6}$.

Schreibe die Nullhypothese H_0, die Alternative H_1 und das Signifikanzniveau α auf:

Nullhypothese H_0: $p = \frac{1}{6}$
Alternative H_1: $p < \frac{1}{6}$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$

Schreibe die Bedingung für die Grenze g des Ablehnungsbereichs auf:

$P(X \leq g) \leq 0{,}05$

Notiere einen Auszug und bestimme das größte g mit dem Taschenrechner:

(Da der Erwartungswert $E(X) = 600 \cdot \frac{1}{6} = 100$ beträgt, suchst du g links davon in nicht allzu großer Entfernung.)

g	$P(X \leq g)$
84	0,0424
85	0,0538
86	0,0675
87	0,0837

$g = 84$

Notiere den Ablehnungsbereich und eine Entscheidungsregel für dein Ergebnis:
Ablehnungsbereich = {0; 1; …; 84}
Da das Ergebnis 87 nicht im Ablehnungsbereich liegt, trifft die Nullhypothese zu.
Entscheidungsregel:
Wenn bei 600 Würfen höchstens 84-mal eine 3 erscheint, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für eine 3 kleiner als $\frac{1}{6}$ ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

2 Linksseitiger Test mit gegebener Tabelle
Gesucht ist das größte g für das gilt: $P(X \leq g) \leq 0{,}1$.
Aus der Tabelle kann man dafür den Wert g = 120 ablesen.
Ablehnungsbereich = {0; 1; …; 120}
Entscheidungsregel:
Wenn es bei 200 Versuchen höchstens 120 Treffer gibt, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer kleiner als 65 % ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

3 Linksseitiger Hypothesentest mit verschiedenen Versuchsanzahlen n
a) X: Anzahl Treffer
X ist im Extremfall binomialverteilt mit n = 60 und $p = \frac{1}{4}$.
Nullhypothese H_0: $p = \frac{1}{4}$
Alternative H_1: $p < \frac{1}{4}$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$
$P(X \leq g) \leq 0{,}05$
(Erwartungswert: $E(X) = 60 \cdot \frac{1}{4} = 15$)

g	$P(X \leq g)$
9	0,0452
10	0,0859

g = 9
Ablehnungsbereich = {0; 1; …; 9}
Entscheidungsregel:
Wenn es bei 60 Versuchen höchstens 9 Treffer gibt, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer kleiner als 25 % ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.
b) X: Anzahl Treffer
X ist im Extremfall binomialverteilt mit n = 80 und $p = \frac{1}{4}$.
Nullhypothese H_0: $p = \frac{1}{4}$
Alternative H_1: $p < \frac{1}{4}$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$
$P(X \leq g) \leq 0{,}05$
(Erwartungswert: $E(X) = 80 \cdot \frac{1}{4} = 20$)

g	$P(X \leq g)$
13	0,0421
14	0,0740

g = 13
Ablehnungsbereich = {0; 1; …; 13}
Entscheidungsregel:
Wenn es bei 80 Versuchen höchstens 13 Treffer gibt, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer kleiner als 25 % ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.
c) X: Anzahl Treffer
X ist im Extremfall binomialverteilt mit n = 100 und $p = \frac{1}{4}$.
Nullhypothese H_0: $p = \frac{1}{4}$
Alternative H_1: $p < \frac{1}{4}$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$
$P(X \leq g) \leq 0{,}05$
(Erwartungswert: $E(X) = 100 \cdot \frac{1}{4} = 25$)

g	$P(X \leq g)$
17	0,0376
18	0,0630

g = 17
Ablehnungsbereich = {0; 1; …; 17}
Entscheidungsregel:
Wenn es bei 100 Versuchen höchstens 17 Treffer gibt, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer kleiner als 25 % ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

4 Linksseitiger Hypothesentest mit verschiedenen Signifikanzniveaus α
X: Anzahl Treffer
X ist im Extremfall binomialverteilt mit n = 80 und p = 0,35.
Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}35$
Alternative H_1: $p < 0{,}35$
(Erwartungswert: $E(X) = 80 \cdot 0{,}35 = 28$)
a) Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$
$P(X \leq g) \leq 0{,}05$

g	$P(X \leq g)$
20	0,0368
21	0,0615

g = 20
Ablehnungsbereich = {0; 1; …; 20}
Entscheidungsregel:
Wenn es bei 80 Versuchen höchstens 20 Treffer gibt, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer kleiner als 35 % ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

b) Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$
$P(X \leq g) \leq 0{,}1$

g	$P(X \leq g)$
22	0,0971
23	0,1454

$g = 22$
Ablehnungsbereich = $\{0; 1; \ldots; 22\}$
Entscheidungsregel:
Wenn es bei 80 Versuchen höchstens 22 Treffer gibt, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer kleiner als 35 % ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

c) Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}15$
$P(X \leq g) \leq 0{,}15$

g	$P(X \leq g)$
23	0,1454
24	0,2072

$g = 23$
Ablehnungsbereich = $\{0; 1; \ldots; 23\}$
Entscheidungsregel:
Wenn es bei 80 Versuchen höchstens 23 Treffer gibt, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer kleiner als 35 % ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

5 Glücksrad

X: Anzahl Hauptgewinne
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 300$ und $p = 0{,}04$.
Nullhypothese H_0: $p = 0{,}04$
Alternative H_1: $p < 0{,}04$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$
$P(X \leq 8) \approx 0{,}1497 > \alpha$
Da das Ergebnis 8 größer als das Signifikanzniveau ist und damit nicht im Ablehnungsbereich liegt, ist der Verdacht nicht gerechtfertigt.

6 Schokoladeneier

X: Tüten mit Normgewicht
X ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0{,}95$.
Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}95$
Alternative H_1: $p < 0{,}95$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$
$P(X \leq g) \leq 0{,}1$
(Erwartungswert: $E(X) = 50 \cdot 0{,}95 = 47{,}5$)

g	$P(X \leq g)$
44	0,0378
45	0,1036

$g = 44$

a) Ablehnungsbereich = $\{0; 1; \ldots; 44\}$
Da die Anzahl von 43 Tüten im Ablehnungsbereich liegt, wird die Nullhypothese H_0 verworfen.
b) Entscheidungsregel:
Wenn es unter 50 untersuchten höchstens 44 Tüten mit Normgewicht gibt, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Tüte mit Normgewicht kleiner als 95 % ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

7 Werbeagentur

X: Anzahl der Befragten, die das Produkt kennen
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0{,}3$.
Nullhypothese H_0: $p = 0{,}3$
Alternative H_1: $p < 0{,}3$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$
$P(X \leq g) \leq 0{,}1$
(Erwartungswert: $E(X) = 200 \cdot 0{,}3 = 60$)

g	$P(X \leq g)$
51	0,0934
52	0,1228

$g = 51$
Ablehnungsbereich = $\{0; 1; \ldots; 51\}$
Da die Anzahl von 53 Befragten, die das Produkt kennen, nicht im Ablehnungsbereich liegt, reicht diese Anzahl aus und die Agentur erhält die Prämie.

8 Biogemüse

X: Kunden, die lieber Biogemüse kaufen
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 80$ und $p = 0{,}5$.
Nullhypothese H_0: $p = 0{,}5$
Alternative H_1: $p < 0{,}5$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}08$
$P(X \leq g) \leq 0{,}08$
(Erwartungswert: $E(X) = 80 \cdot 0{,}5 = 40$)

g	$P(X \leq g)$
33	0,0728
34	0,1093

$g = 33$
a) Ablehnungsbereich = $\{0; 1; \ldots; 33\}$
b) Entscheidungsregel:
Wenn von den 80 Befragten höchstens 33 lieber Biogemüse kaufen, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Kunden der lieber Biogemüse kauft kleiner als 50 % ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

SCHRITT 24

Das brauchst du wieder

$P(X \geq 27) = 1 - P(X \leq 26) \approx 0{,}0597$

$P(X \geq 28) = 1 - P(X \leq 27) \approx 0{,}0373$

1 „Du bist dran“ aus dem „So geht's“-Kasten

Definiere die Zufallsgröße X und ihre Verteilung:

X: Anzahl gewürfelter Vieren

X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 600$ und $p = \frac{1}{6}$.

Schreibe die Nullhypothese H_0, die Alternative H_1 und das Signifikanzniveau auf:

Nullhypothese H_0: $p = \frac{1}{6}$

Alternative H_1: $p > \frac{1}{6}$

Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$

Schreibe die Bedingung für die Grenze g des Ablehnungsbereichs auf:

$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g - 1) \leq 0{,}05$

$P(X \leq g - 1) \geq 0{,}95$

Notiere einen Auszug und bestimme das kleinste g mit dem Taschenrechner:

(Da der Erwartungswert $E(X) = 600 \cdot \frac{1}{6} = 100$ beträgt, suchst du g rechts davon in nicht allzu großer Entfernung.)

g − 1	P(X ≤ g − 1)	g	P(X ≥ g)
112	0,9130	113	0,0870
113	0,9286	114	0,0714
114	0,9419	115	0,0581
115	0,9532	116	0,0468

$g = 116$

Schreibe den Ablehnungsbereich und eine Entscheidungsregel für dein Ergebnis auf:

Ablehnungsbereich = {116; 117; …; 600}

Da das Ergebnis 117 im Ablehnungsbereich liegt, wird die Nullhypothese verworfen.

Entscheidungsregel:

Wenn bei 600 Würfen mindestens 116-mal eine 4 erscheint, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für eine 4 größer als $\frac{1}{6}$ ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

2 Rechtsseitiger Test mit gegebener Tabelle

Gesucht ist das kleinste g für das gilt: $P(X \geq g) \leq 0{,}1$.

Aus der Tabelle kann man dafür den Wert $g = 177$ ablesen.

Ablehnungsbereich = {177; 178; …; 300}

Entscheidungsregel:

Wenn es bei 300 Versuchen mindestens 177 Treffer gibt, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer größer als 55 % ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

3 Rechtsseitiger Hypothesentest mit verschiedenen Signifikanzniveaus α

X: Anzahl Treffer

X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 268$ und $p = 0{,}62$.

Nullhypothese H_0: $p = 0{,}62$

Alternative H_1: $p > 0{,}62$

(Erwartungswert: $E(X) = 268 \cdot 0{,}62 = 166{,}16$)

a) Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}25$

$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g - 1) \leq 0{,}25$

$P(X \leq g - 1) \geq 0{,}75$

g − 1	P(X ≤ g − 1)	g	P(X ≥ g)
171	0,7483	172	0,2517
172	0,7870	173	0,2130

$g = 173$

Ablehnungsbereich = {173; 174; …; 268}

Wenn es bei 268 Versuchen mindestens 173 Treffer gibt, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer größer als 62 % ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

b) Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$

$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g - 1) \leq 0{,}1$

$P(X \leq g - 1) \geq 0{,}9$

g − 1	P(X ≤ g − 1)	g	P(X ≥ g)
175	0,8805	176	0,1195
176	0,9041	177	0,0959

$g = 177$

Ablehnungsbereich = {177; 178; …; 268}

Wenn es bei 268 Versuchen mindestens 177 Treffer gibt, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer größer als 62 % ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

c) Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}15$

$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g - 1) \leq 0{,}15$

$P(X \leq g - 1) \geq 0{,}85$

g − 1	P(X ≤ g − 1)	g	P(X ≥ g)
173	0,8220	174	0,1780
174	0,8532	175	0,1468

$g = 175$

Ablehnungsbereich = {175; 176; …; 268}

Entscheidungsregel:

Wenn es bei 268 Versuchen mindestens 175 Treffer gibt, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer größer als 62 % ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

4 Obstverkäufer

X: Anzahl nicht einwandfreier Äpfel
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}25$.
Nullhypothese H_0: $p = 0{,}25$
Alternative H_1: $p > 0{,}25$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$
$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g - 1) \leq 0{,}1$
$P(X \leq g - 1) \geq 0{,}9$
(Erwartungswert: $E(X) = 10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$)

$g - 1$	$P(X \leq g - 1)$	g	$P(X \geq g)$
3	0,7759	4	0,2241
4	0,9219	5	0,0781

$g = 5$
Ablehnungsbereich = $\{5; 6; \ldots; 10\}$
Entscheidungsregel:
Wenn unter 10 untersuchten Äpfeln mindestens 5 nicht einwandfrei sind, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen nicht einwandfreien Apfel größer als 25 % ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

5 Hygienemängel

X: Betroffene Restaurants
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 40$ und $p = \frac{1}{5}$.
Nullhypothese H_0: $p = \frac{1}{5}$
Alternative H_1: $p > \frac{1}{5}$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$
$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g - 1) \leq 0{,}1$
$P(X \leq g - 1) \geq 0{,}9$
(Erwartungswert: $E(X) = 40 \cdot \frac{1}{5} = 8$)

$g - 1$	$P(X \leq g - 1)$
10	0,8392
11	0,9125

$g = 12$ (da dies aus $g - 1 = 11$ folgt)
Ablehnungsbereich = $\{12; 13; \ldots; 40\}$
Entscheidungsregel:
Wenn mindestens 12 der 40 geprüften Restaurants Hygienemängel haben, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Restaurant mit Hygienemängel größer als $\frac{1}{5}$ ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

6 Reißnägel

X: Anzahl schräg gelandeter Reißnägel
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}6$.
Nullhypothese H_0: $p = 0{,}6$
Alternative H_1: $p > 0{,}6$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$
$P(X \geq 68) = 1 - P(X \leq 67) \approx 0{,}0615 > \alpha$

Da das Ergebnis größer als das Signifikanzniveau ist und damit nicht im Ablehnungsbereich liegt, kann sie der im Artikel behaupteten Prozentzahl zustimmen.

7 Flaschen-Abfüll-Anlage

X: Anzahl nicht richtig verschlossener Flaschen
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 800$ und $p = 0{,}02$.
Nullhypothese H_0: $p = 0{,}02$
Alternative H_1: $p > 0{,}02$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$
$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g - 1) \leq 0{,}1$
$P(X \leq g - 1) \geq 0{,}9$
(Erwartungswert: $E(X) = 800 \cdot 0{,}02 = 16$)

$g - 1$	$P(X \leq g - 1)$
20	0,8704
21	0,9129

$g = 22$ (da dies aus $g - 1 = 21$ folgt)
Ablehnungsbereich = $\{22; 23; \ldots; 800\}$
Entscheidungsregel:
Wenn mindestens 22 der 800 geprüften Flaschen nicht richtig verschlossen sind, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Flasche nicht richtig verschlossen ist größer als 2 % ist.
Die vom Abteilungsleiter gezählten 20 Flaschen sind also tatsächlich noch akzeptabel.

8 Metallbänder

X: Anzahl unbrauchbarer Teile
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}03$.
Nullhypothese H_0: $p = 0{,}03$
Alternative H_1: $p > 0{,}03$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$
$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g - 1) \leq 0{,}05$
$P(X \leq g - 1) \geq 0{,}95$
(Erwartungswert: $E(X) = 100 \cdot 0{,}03 = 3$)

$g - 1$	$P(X \leq g - 1)$
5	0,9192
6	0,9688

$g = 7$ (da dies aus $g - 1 = 6$ folgt)
Ablehnungsbereich = $\{7; 8; \ldots; 100\}$
Entscheidungsregel:
Wenn unter den 100 produzierten Teilen mindestens 7 Mängel aufweisen, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil Mängel hat, größer als 3 % ist.
Der Mitarbeiter hat nicht recht, denn es könnten bis zu 6 Teile Mängel aufweisen ohne, dass man die Nullhypothese verwerfen müsste.

9 Mangelhafte Smartphones
X: Anzahl mangelhafter Smartphones
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 280$ und $p = 0{,}03$.
Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}03$
Alternative H_1: $p > 0{,}03$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$
$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g - 1) \leq 0{,}05$
$P(X \leq g - 1) \geq 0{,}95$
(Erwartungswert: $E(X) = 280 \cdot 0{,}03 = 8{,}4$)

$g - 1$	$P(X \leq g - 1)$
12	0,9182
13	0,9550

$g = 14$ (da dies aus $g - 1 = 13$ folgt)
Ablehnungsbereich = {14; 15; …; 280}
Da zehn mangelhafte Smartphones außerhalb des Ablehnungsbereichs liegen, kann man der Behauptung des Herstellers weiterhin vertrauen.
Entscheidungsregel:
Wenn mindestens 14 der 280 verkauften Smartphones Mängel aufweisen, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Smartphone Mängel hat, größer als 3 % ist.

SCHRITT 25

Das brauchst du wieder
Linksseitig:

g	$P(X \leq g)$
23	0,0314
24	0,0573

Taschenrechner: $g = 23$
Ablehnungsbereich = {0; 1; …; 23}
Rechtsseitig:

g	$P(X \leq g - 1)$
35	0,9460
36	0,9720

Taschenrechner: $g - 1 = 36$; $g = 37$
Ablehnungsbereich = {37; …; 50}

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten
Lege die Art des zu verwendenden Tests fest:
a) Die Ärzte wollen nachweisen, dass es mehr Kinder mit Übergewicht gibt, sie werden daher einen rechtsseitigen Test durchführen. ($E(X) = \frac{1}{5} \cdot 300 = 60$, d. h. $77 > E(X)$)
Notiere die Zufallsgröße und die Daten für den Test:
b) X: Anzahl der Kinder mit Übergewicht
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 300$ und $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

Schreibe die Bedingung für einen entsprechenden Hypothesentest auf:
Die Behauptung hier lautet:
Höchstens 20 % der Kinder haben Übergewicht.
Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}2$
Man prüft, ob es nicht mehr sind.
Alternative H_1: $p > 0{,}2$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$
Gesucht: kleinste Zahl g mit
$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g - 1) \leq 0{,}05$
bzw. $P(X \leq g - 1) \geq 0{,}95$
Notiere einen Auszug aus dem Taschenrechner und das passende g:
(Da der Erwartungswert $E(X) = 300 \cdot 0{,}2 = 60$ beträgt, suchst du g rechts davon in nicht allzu großer Entfernung.)

$g - 1$	$P(X \leq g - 1)$
71	0,9492
72	0,9621

$g = 73$ (da $g - 1 = 72$)
Schreibe den Ablehnungsbereich auf:
Ablehnungsbereich = {73; 74; …; 300}
Entscheidungsregel:
Wenn von 300 Kindern mindestens 73 übergewichtig sind, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass mehr als jedes fünfte Kind übergewichtig ist.
Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.
Das Untersuchungsergebnis 77 liegt im Ablehnungsbereich. Daher können die Ärzte die Nullhypothese verwerfen und das Ergebnis der Studie anfechten.

2 Entscheidung für links- oder rechtsseitigen Test
a) Hier wäre ein rechtsseitiger Hypothesentest angemessen, da die Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}15$ ist und die Alternative davon ausgeht, dass mehr Kunden daran interessiert sind.
b) Hier wäre ein linksseitiger Hypothesentest angemessen, da die Nullhypothese H_0: $p \geq \frac{2}{3}$ ist und die Alternative davon ausgeht, dass weniger Schüler aufs Gymnasium gehen möchte.
c) Hier wäre ein rechtsseitiger Hypothesentest angemessen, da die Nullhypothese H_0: $p \leq \frac{1}{5}$ ist und die Alternative davon ausgeht, dass mehr Studenten unzufrieden sind.
d) Hier wäre ein linksseitiger Hypothesentest angemessen, da die Nullhypothese H_0: $p \geq \frac{1}{3}$ ist und die Alternative davon ausgeht, dass weniger als jeder dritte Badegast übergewichtig ist.

3 Mathematik ohne Grenzen

X: Anzahl der Schüler, die die Anforderungen nicht erfüllt.
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 86$ und $p = \frac{1}{5}$.

a) linksseitiger Test:
Nullhypothese H_0: $p \geq \frac{1}{5}$
Alternative H_1: $p < \frac{1}{5}$
Die Behauptung zur Nullhypothese wäre hier, dass mindestens $\frac{1}{5}$ der Kinder die Anforderungen nicht erfüllt. Man prüft, ob es nicht weniger sind.

b) rechtsseitiger Test:
Nullhypothese H_0: $p \leq \frac{1}{5}$
Alternative H_1: $p > \frac{1}{5}$
Die Behauptung zur Nullhypothese wäre hier, dass höchstens $\frac{1}{5}$ der Kinder die Anforderungen nicht erfüllt. Man prüft, ob es nicht mehr sind.

c) Da in der Aufgabenstellung von höchstens $\frac{1}{5}$ die Rede ist, prüft man mit einem rechtsseitigen Test.
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$
$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g-1) \leq 0{,}1$
$P(X \leq g-1) \geq 0{,}9$
(Erwartungswert: $E(X) = 86 \cdot \frac{1}{5} = 17{,}2$)

$g-1$	$P(X \leq g-1)$
21	0,8754
22	0,9201

$g = 23$ (da $g - 1 = 22$)
Ablehnungsbereich = $\{23; 24; \ldots; 86\}$
Entscheidungsregel:
Wenn mindestens 23 Schüler die Anforderungen nicht ganz erfüllen, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass der Anteil der Schüler, der die Anforderungen nicht erfüllt, größer als $\frac{1}{5}$ ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.
Es dürfen daher maximal 22 Schüler sein, die die Aufgaben nicht erfüllen.

4 Onlinehilfen für Mathematik

X: Anzahl der Schüler, die Onlinehilfen nutzen.
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 173$; $p = 0{,}12$, und $k = 36$.

a) Erwartungswert: $E(X) = 173 \cdot 0{,}12 = 20{,}76$
Da die zu prüfende Anzahl 36 größer als der Erwartungswert ist, bietet sich ein rechtsseitiger Test an.

b) Nullhypothese H_0: $p = 0{,}12$
Alternative H_1: $p > 0{,}12$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$
$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g-1) \leq 0{,}1$
$P(X \leq g-1) \geq 0{,}9$

$g-1$	$P(X \leq g-1)$
25	0,8652
26	0,9071

$g = 27$ (da $g - 1 = 26$)
Ablehnungsbereich = $\{27; 28; \ldots; 173\}$
Entscheidungsregel:
Wenn von 173 Befragten mindestens 27 Onlinehilfen nutzen, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass mehr als 12 % der Befragten Onlinehilfen nutzen. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen. Die gegebene Wahrscheinlichkeit sollte, aufgrund des im Ablehnungsbereichs liegenden Befragungsergebnisses von 36, daher nach oben korrigiert werden.

c) Gesucht wird eine neue Wahrscheinlichkeit p, für die gilt $P(X \geq 36) \geq 0{,}1$. Also so, dass die Anzahl von 36 Schülern noch im Annahmebereich liegt.
$P(X \geq 36) \geq 0{,}1$
$1 - P(X \leq 35) \geq 0{,}1$
$-P(X \leq 35) \geq -0{,}9$
$P(X \leq 35) \leq 0{,}9$
$p = 0{,}16$: $P(X \leq 35) \approx 0{,}9440$
$p = 0{,}17$: $P(X \leq 35) \approx 0{,}8893$
Der Anteil an Schülern die Onlinehilfen in Mathe verwenden, liegt also aktuell eher bei mindestens 17 %.

SCHRITT 26

Das brauchst du wieder

Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$

Linksseitig:	$P(X \leq g) \leq 0{,}05$; $g = 3$ Ablehnungsbereich = $\{0; 1; 2; 3\}$
Rechtsseitig:	$P(X \geq g) \leq 0{,}05$ $P(X \leq g-1) \geq 0{,}95$ $g - 1 = 10$; $g = 11$ Ablehnungsbereich = $\{11; 12; \ldots; 15\}$

Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}15$

Linksseitig:	$P(X \leq g) \leq 0{,}15$; $g = 4$ Ablehnungsbereich = $\{0; 1; \ldots; 4\}$
Rechtsseitig:	$P(X \geq g) \leq 0{,}15$ $P(X \leq g-1) \geq 0{,}85$ $g - 1 = 9$; $g = 10$ Ablehnungsbereich = $\{10; 11; \ldots; 15\}$

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten

Definiere die Zufallsvariable X und ihre Verteilung:
X: Anzahl der gewürfelten Vierer
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 120$ und $p = \frac{1}{6}$.
Schreibe die Nullhypothese H_0, die Alternative H_1 und das Signifikanzniveau α auf:
Nullhypothese H_0: $p = \frac{1}{6}$
Alternative H_1: $p \neq \frac{1}{6}$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$; $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$

1. Linksseitig: Schreibe die Bedingung für die Grenze g_1 des Ablehnungsbereichs auf:
$P(X \le g_1) \le 0{,}025$
Berechne mit dem Taschenrechner einen Auszug und bestimme das größte g_1:

g_1	$P(X \le g_1)$
11	0,0139
12	0,0275

$g_1 = 11$
Schreibe den Ablehnungsbereich auf:
Ablehnungsbereich = $\{0; 1; \ldots; 11\}$
2. Rechtsseitig: Schreibe die Bedingung für die Grenze g_2 des Ablehnungsbereichs auf:
$P(X \ge g_2) \le 0{,}025$
$P(X \le g_2 - 1) \ge 0{,}975$
Berechne mit dem Taschenrechner einen Auszug und bestimme das kleinste g_2:

$g_2 - 1$	$P(X \le g_2 - 1)$
27	0,9627
28	0,9777

$g_2 = 29$ (da $g_2 - 1 = 28$)
Schreibe den Ablehnungsbereich auf:
Ablehnungsbereich = $\{29; 30; \ldots; 120\}$
Formuliere eine Entscheidungsregel für dein Ergebnis:
Entscheidungsregel:
Wenn die Vier weniger als 12-mal oder mehr als 28-mal gewürfelt wird, wird die Nullhypothese verworfen. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen und das bedeutet, dass die Korrektheit des Würfels zu 95 % gegeben ist.

2 Zweiseitiger Hypothesentest mit vorberechneten Tabellen

X: Anzahl Treffer
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 80$ und $p = 0{,}7$.
Nullhypothese H_0: $p = 0{,}7$
Alternative H_1: $p \neq 0{,}7$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$; $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$
Linksseitiger Test:
$P(X \le g_1) \le 0{,}05$
Aus der Tabelle erhält man $g_1 = 48$.
Linker Ablehnungsbereich = $\{0; 1; \ldots; 48\}$
Rechtsseitiger Test:
$P(X \ge g_2) \le 0{,}05$
$P(X \le g_2 - 1) \ge 0{,}95$
Aus der Tabelle erhält man $g_2 - 1 = 63$ und damit ist $g_2 = 64$.
Rechter Ablehnungsbereich = $\{64; 65; \ldots; 80\}$
Entscheidungsregel:
Bei weniger als 49 und mehr als 63 Treffern wird die Nullhypothese verworfen. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

3 Spielautomat

X: Anzahl der Hauptgewinne
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}1$
Nullhypothese H_0: $p = 0{,}1$
Alternative H_1: $p \neq 0{,}1$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$; $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$
Linksseitiger Test:
$P(X \le g_1) \le 0{,}05$

g_1	$P(X \le g_1)$
4	0,0237
5	0,0576

$g_1 = 4$
Linker Ablehnungsbereich = $\{0; 1; \ldots; 4\}$
Rechtsseitiger Test:
$P(X \ge g_2) \le 0{,}05$
$P(X \le g_2 - 1) \ge 0{,}95$

$g_2 - 1$	$P(X \le g_2 - 1)$
14	0,9274
15	0,9601

$g_2 = 16$ (da $g_2 - 1 = 15$)
Ablehnungsbereich = $\{16; 17; \ldots; 100\}$
Entscheidungsregel:
Wenn der Hauptgewinn weniger als 5-mal oder mehr als 15-mal auftritt, wird die Nullhypothese verworfen.

4 Puzzle

X: Teile die Wasser zeigen
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}5$.
Nullhypothese H_0: $p = 0{,}5$
Alternative H_1: $p \neq 0{,}5$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}2$; $\frac{\alpha}{2} = 0{,}1$
a) Linksseitiger Test:
$P(X \le g_1) \le 0{,}1$

g_1	$P(X \le g_1)$
43	0,0967
44	0,1356

$g_1 = 43$
Linker Ablehnungsbereich = $\{0; 1; \ldots; 43\}$
Rechtsseitiger Test:
$P(X \ge g_2) \le 0{,}1$
$P(X \le g_2 - 1) \ge 0{,}9$

$g_2 - 1$	$P(X \le g_2 - 1)$
55	0,8644
56	0,9033

$g_2 = 57$ (da $g_2 - 1 = 56$)

Ablehnungsbereich = {57; 58; ...; 100}
Entscheidungsregel:
Wenn weniger als 44 oder mehr als 56 Teile Wasser zeigen und blau sind, wird die Nullhypothese verworfen.
b) Bei 43 oder weniger Teilen hat Käthe nicht recht.
c) Bei 57 oder mehr Teilen hat Leah nicht recht.
d) Sind es mehr als 43 und weniger als 57 Teile, können beide beanspruchen, recht gehabt zu haben.

5 Gummibärchen
X: Anzahl Gummibärchen einer bestimmten Farbe.
X ist im Extremfall binomialverteilt mit je nach Person unterschiedlichen n und $p = \frac{1}{4}$.
Nullhypothese H_0: $p = \frac{1}{4}$
Alternative H_1: $p \neq \frac{1}{4}$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}15$; $\frac{\alpha}{2} = 0{,}075$
Linksseitiger Test:
$P(X \leq g_1) \leq 0{,}075$
Anja (n = 48):

g_1	$P(X \leq g_1)$
7	0,0611
8	0,1190

$g_1 = 7$
Linker Ablehnungsbereich = {0; 1; ...; 7}
Paula (n = 50):

g_1	$P(X \leq g_1)$
7	0,0453
8	0,0916

$g_1 = 7$
Linker Ablehnungsbereich = {0; 1; ...; 7}
Regina (n = 52):

g_1	$P(X \leq g_1)$
8	0,0697
9	0,1292

$g_1 = 8$
Linker Ablehnungsbereich = {0; 1; ...; 8}
Rechtsseitiger Test:
$P(X \geq g_2) \leq 0{,}075$
$P(X \leq g_2 - 1) \geq 0{,}925$
Anja (n = 48):

$g_2 - 1$	$P(X \leq g_2 - 1)$
15	0,8768
16	0,9296

$g_2 = 17$ (da $g_2 - 1 = 16$)
Rechter Ablehnungsbereich = {17; 18; ...; 48}
Paula (n = 50):

$g_2 - 1$	$P(X \leq g_2 - 1)$
16	0,9017
17	0,9449

$g_2 = 18$ (da $g_2 - 1 = 17$)
Rechter Ablehnungsbereich = {18; 19; ...; 50}
Regina (n = 52):

$g_2 - 1$	$P(X \leq g_2 - 1)$
17	0,9219
18	0,9570

$g_2 = 19$ (da $g_2 - 1 = 18$)
Rechter Ablehnungsbereich = {19; 20; ...; 52}
Entscheidungsregel:
Anja: Bei weniger als 8 und mehr als 16 Bärchen einer Farbe wird die Nullhypothese verworfen. Das trifft bei ihr nur auf die grünen zu.
Paula: Bei weniger als 8 und mehr als 17 Bärchen einer Farbe wird die Nullhypothese verworfen. Dies trifft bei ihr auf keine der Farben zu.
Regina: Bei weniger als 9 und mehr als 18 Bärchen einer Farbe wird die Nullhypothese verworfen. Das trifft bei ihr auf die grünen und orangenen zu.
Da die grünen Bärchen bei zwei Personen im Ablehnungsbereich sind, scheint ihr Anteil nicht zu stimmen, sie treten seltener auf als angegeben. Die orangenen Bärchen liegen nur bei einer Person im Ablehnungsbereich, ihr Anteil ist somit wahrscheinlich korrekt angegeben oder minimal größer. Der Anteil der roten und gelben Bärchen, scheint dagegen wie angegeben zu stimmen.

SCHRITT 27

Das brauchst du wieder

k	3	4	8	9
$P(X = k)$	0,1339	0,1897	0,0609	0,0271
$P(X \leq k)$	0,2252	0,4148	0,9591	0,9861

Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$
Linksseitig: $P(X \leq g) \leq 0{,}05$;
$g = 1$; $P(X \leq 1) \approx 0{,}0243$
Ablehnungsbereich = {0; 1}
Rechtsseitig: $P(X \geq g) \leq 0{,}05$
$P(X \leq g - 1) \geq 0{,}95$
$g - 1 = 8$; $g = 9$; $P(X \geq 9) \approx 0{,}0409$
Ablehnungsbereich = {9; 10; ...; 20}

Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$

Linksseitig: $P(X \le g) \le 0{,}1$
$g = 2$; $P(X \le 2) \approx 0{,}0913$
Ablehnungsbereich = $\{0; 1; 2\}$

Rechtsseitig: $P(X \ge g) \le 0{,}1$
$P(X \le g - 1) \ge 0{,}9$
$g - 1 = 8$; $g = 9$; $P(X \ge 9) \approx 0{,}0409$
Ablehnungsbereich = $\{9; 10; \ldots; 20\}$

1 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten für den Fehler 1. Art

Definiere die Zufallsvariable X und ihre Verteilung:

X: Anzahl der angeschlagenen Äpfel
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 25$ und $p = 0{,}2$.

Schreibe die Nullhypothese H_0, die Alternative H_1 und das Signifikanzniveau α auf:

Nullhypothese H_0: $p \le 0{,}2$
Alternative H_1: $p > 0{,}2$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$

Schreibe die Bedingung für die Grenze g des Ablehnungsbereichs auf:

$P(X \ge g) \le 0{,}1$
$P(X \le g - 1) \ge 0{,}9$

Berechne mit dem Taschenrechner einen Auszug und bestimme das kleinste g:

$g - 1$	$P(X \le g - 1)$
7	0,8909
8	0,9532

$g = 9$ (da $g - 1 = 8$)

Gib den Ablehnungsbereich an und bestimme die Irrtumswahrscheinlichkeit:

Ablehnungsbereich = $\{9; 10; \ldots; 25\}$
$P(X \ge 9) = 1 - P(X \le 8) \approx 0{,}0468$
Die Irrtumswahrscheinlichkeit und damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art beträgt 4,68 %.

Beschreibe die Bedeutung des Fehlers:

Aufgrund des Ablehnungsbereichs des Tests würde man bei 9 oder mehr angeschlagenen Äpfeln dem Händler nicht glauben. Aber wenn der Händler dennoch recht hat, begeht man einen Fehler, die Entscheidung war also ein Irrtum. Denn die Möglichkeit, 9 oder mehr angeschlagene Äpfel zu erhalten, hat, wenn der Händler die Wahrheit sagt, eine Wahrscheinlichkeit von immerhin 4,68 %.

2 Fehler 1. Art mit verschiedenen Signifikanzniveaus

X: Anzahl Treffer
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 300$ und $p = 0{,}4$.
Nullhypothese H_0: $p \ge 0{,}4$
Alternative H_1: $p < 0{,}4$

a) Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$
$P(X \le g) \le 0{,}1$

g	$P(X \le g)$
108	0,0871
109	0,1075

$g = 108$
Ablehnungsbereich = $\{0; 1; \ldots; 108\}$
$P(X \le 108) \approx 0{,}0871$
Die Irrtumswahrscheinlichkeit und damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art beträgt 8,71 %.

b) Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$
$P(X \le g) \le 0{,}05$

g	$P(X \le g)$
105	0,0429
106	0,0550

$g = 105$
Ablehnungsbereich = $\{0; 1; \ldots; 105\}$
$P(X \le 105) \approx 0{,}0429$
Die Irrtumswahrscheinlichkeit und damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art beträgt 4,29 %.

c) Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$
$P(X \le g) \le 0{,}01$

g	$P(X \le g)$
99	0,0074
100	0,0102

$g = 99$
Ablehnungsbereich = $\{0; 1; \ldots; 99\}$
$P(X \le 99) \approx 0{,}0074$
Die Irrtumswahrscheinlichkeit und damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art beträgt 0,74 %.

3 Aussagen prüfen

a) Diese Aussage ist falsch. Ein größeres Signifikanzniveau bedeutet auch eine größere Irrtumswahrscheinlichkeit. Je größer die Irrtumswahrscheinlichkeit ist, desto größer ist auch die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese fälschlicherweise zu verwerfen.
b) Diese Aussage ist wahr. Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art entspricht der Irrtumswahrscheinlichkeit und diese ist maximal so groß wie das Signifikanzniveau.
c) Diese Aussage ist falsch. Nach den Erläuterungen aus a) müsste man das Signifikanzniveau hierfür möglichst klein machen.

4 „Du bist dran" aus dem „So geht's"-Kasten für den Fehler 2. Art

Gebe den Ablehnungsbereich der ursprünglichen Behauptung an:

Ablehnungsbereich = {9; 10; ...; 24}

Notiere die Werte der tatsächlichen Binomialverteilung:

X ist tatsächlich binomialverteilt mit n = 25 und $p = \frac{1}{4}$.

Bestimme mit diesen Werten die Wahrscheinlichkeit ein Ergebnis außerhalb des ursprünglichen Ablehnungsbereichs zu erhalten:

$P(X \le 8) \approx 0{,}8506$

Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art liegt bei 85,06 %.

Beschreibe die Bedeutung des Fehlers:

Der Fehler 2. Art gibt an, wie wahrscheinlich es ist, ein Ergebnis zu erhalten, aufgrund dessen man dem Obsthändler glaubt (da es im ursprünglichen Annahmebereich liegt), auch wenn er gelogen hat.

5 Fehler 2. Art bei verschiedenen wahren Wahrscheinlichkeiten

X: Anzahl Treffer

X ist im Extremfall binomialverteilt mit n = 250 und p = 0,8.

Erwartungswert: $E(X) = 250 \cdot 0{,}8 = 200$

Da die akzeptierten 192 Treffer links vom Erwartungswert liegen, handelt es sich um einen linksseitigen Test mit dem Ablehnungsbereich {0; 1; ...; 191}.

a) X ist tatsächlich binomialverteilt mit n = 250 und p = 0,75.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art:

$P(X \ge 192) = 1 - P(X \le 191) \approx 0{,}2823$

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art liegt bei 28,23 %.

b) X ist tatsächlich binomialverteilt mit n = 250 und p = 0,7.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art:

$P(X \ge 192) = 1 - P(X \le 191) \approx 0{,}0101$

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art liegt bei 1,01 %.

6 Fehler 2. Art bei einem zweiseitigen Hypothesentest

X: Anzahl Treffer

X ist im Extremfall binomialverteilt mit n = 1240 und p = 0,68

Nullhypothese H_0: p = 0,68

Alternative H_1: $p \neq 0{,}68$

Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$; $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$

Linksseitiger Test:

$P(X \le g_1) \le 0{,}05$

g_1	$P(X \le g_1)$
815	0,0465
816	0,0526

$g_1 = 815$

Linker Ablehnungsbereich = {0; 1; ...; 815}

Rechtsseitiger Test:

$P(X \ge g_2) \le 0{,}05$

$P(X \le g_2 - 1) \ge 0{,}95$

$g_2 - 1$	$P(X \le g_2 - 1)$
869	0,9460
870	0,9524

$g_2 = 871$ (da $g_2 - 1 = 870$)

Ablehnungsbereich = {871; 872; ...; 1240}

Die Hypothese wird nicht verworfen für $816 \le X \le 870$.

a) X ist tatsächlich binomialverteilt mit n = 1240 und p = 0,7.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art:

$P(816 \le X \le 870) = P(X \le 870) - P(X \le 815) \approx 0{,}5593$

b) X ist tatsächlich binomialverteilt mit n = 1240 und p = 0,65.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art:

$P(816 \le X \le 870) = P(X \le 870) - P(X \le 815) \approx 0{,}2865$

c) X ist tatsächlich binomialverteilt mit n = 1240 und p = 0,6.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art:

$P(816 \le X \le 870) = P(X \le 870)\text{-}P(X \le 815) \approx 0$

7 Klausuraufgaben zu Hypothesentests

a) Sie begeht einen Fehler 1. Art, wenn sie ihm nicht glaubt, obwohl er recht hat.

b) Sie begeht einen Fehler 2. Art wenn sie ihm glaubt, obwohl er nicht recht hat und doch eine Aufgabe zu Hypothesentests in der Klausur drankommt.

8 Fehler beim Würfeln

X: Anzahl gewürfelter Sechsen

X ist im Extremfall binomialverteilt mit n = 400 und $p = \frac{1}{6}$.

Nullhypothese H_0: $p \ge \frac{1}{6}$

Alternative H_1: $p < \frac{1}{6}$

Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$

$P(X \le g) \le 0{,}05$

$g - 1$	$P(X \le g)$
54	0,0485
55	0,0644

g = 54

Ablehnungsbereich = {0; 1; ...; 54}

a) $P(X \le 54) \approx 0{,}0485$

Die Irrtumswahrscheinlichkeit und damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art beträgt 4,85 %.

b) X ist tatsächlich binomialverteilt mit n = 400 und p = 0,12.

$P(X \ge 55) = 1 - P(X \le 54) \approx 0{,}1585$

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art beträgt 15,85 %.

9 Herstellung von Drahtstiften

X: Anzahl fehlerhafter Drahtstifte
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0{,}05$.
Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}05$
Alternative H_1: $p > 0{,}05$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$
$P(X \geq g) \leq 0{,}1$
$P(X \leq g - 1) \geq 0{,}9$

g − 1	P (X ≤ g − 1)
30	0,8691
31	0,9055

$g = 32$; (da $g - 1 = 31$)
Ablehnungsbereich = {32; 33; …; 500}
a) $P(X \geq 32) = 1 - P(X \leq 31) \approx 0{,}0945$
Die Irrtumswahrscheinlichkeit und damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art beträgt 9,45 %.
b) Wird das Signifikanzniveau kleiner, wird auch die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art kleiner, denn diese kann immer maximal so groß sein wie das Signifikanzniveau.
c) X ist tatsächlich binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0{,}06$.
$P(X \leq 31) \approx 0{,}6209$
Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art beträgt 62,09 %.
d) Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art wird größer, wenn das Signifikanzniveau verkleinert wird, da dann der Annahmebereich und die Menge der darin liegenden Werte für X größer werden.

TRAINING 4

1 Linkshänder

a)

Jahr	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Relative Häufigkeit „Linkshänder“	$\frac{3}{62} \approx$ 0,0484	$\frac{5}{65} \approx$ 0,0769	$\frac{8}{73} \approx$ 0,1096	$\frac{8}{66} \approx$ 0,1212	$\frac{13}{62} \approx$ 0,2097	$\frac{17}{65} \approx$ 0,2615

b) Der Anteil der Linkshänder an der Grundschule selbst nimmt zu, daraus kann man aber nicht schließen, ob generell auf das ganze Land oder die Erdbevölkerung bezogen ebenfalls der Anteil an Linkshändern größer wird und damit anteilig mehr Linkshänder geboren werden. (Zudem wurden in früheren Jahren viele Linkshänder bereits als Kinder darauf trainiert, mit Rechts zu schreiben.)
c) $p \approx 26{,}15\,\%$ (entspricht der relativen Häufigkeit im Jahr 2010)
Anzahl $= p \cdot n = 0{,}2615 \cdot 73 = 19{,}0895$
Die Schule kann mit etwa 19 Linkshändern rechnen.

2 Medikament

X: Patienten mit Allergie
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 650$ und $p = 0{,}1$.
Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}1$
Alternative H_1: $p > 0{,}1$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$
$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g - 1) \leq 0{,}01$
$P(X \leq g - 1) \geq 0{,}99$
(Erwartungswert: $E(X) = 650 \cdot 0{,}1 = 65$)

g − 1	P (X ≤ g − 1)
82	0,9869
83	0,9905

$g = 84$ (da dies aus $g - 1 = 83$ folgt)
Ablehnungsbereich = {84; 85; …; 650}
Entscheidungsregel:
Wenn bei mindestens 84 der 650 getesteten Patienten Allergien auftreten, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Allergien größer als 10 % ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

3 Ausländisches Kennzeichen

a) X: Auto mit ausländischem Kennzeichen
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 683$ und $p = 0{,}25$
Nullhypothese H_0: $p = 0{,}25$
Alternative H_1: $p \neq 0{,}25$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$; $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$
Linksseitiger Test:
$P(X \leq g_1) \leq 0{,}05$

g_1	$P(X \leq g_1)$
151	0,0431
152	0,0520

$g_1 = 151$
Linker Ablehnungsbereich = {0; 1; …; 151}
Rechtsseitiger Test:
$P(X \geq g_2) \leq 0{,}05$
$P(X \leq g_2 - 1) \geq 0{,}95$

$g_2 - 1$	$P(X \leq g_2 - 1)$
188	0,9404
189	0,9500

$g_2 = 190$ (da $g_2 - 1 = 189$)
Ablehnungsbereich = {190; 191; …; 683}
Entscheidungsregel:
Wenn weniger als 152 oder mehr als 189 Autos ein ausländisches Kennzeichen haben, wird die Nullhypothese verworfen. Da hier 151 Autos gezählt wurden, wird die Nullhypothese verworfen und der Anteil der Autos mit ausländischem Kennzeichen ist kleiner als 25 %.

b) Es gilt $P(X \leq 151) \approx 0{,}0431$. Würde man ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}08$ bzw. $\frac{\alpha}{2} = 0{,}04$ ansetzen, hätte man für den linken Ablehnungsbereich die Bedingung $P(X \leq g_1) \leq 0{,}04$ und damit wäre die Zahl von 151 Autos im Annahmebereich.
Das Signifikanzniveau zu verkleinern senkt die Genauigkeit des Tests und damit seine Aussagekraft über die gemachte Behauptung.

4 Tulpenzwiebeln

a) X: Keimende Tulpenzwiebeln
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 400$ und $p = 0{,}85$.
Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}85$
Alternative H_1: $p < 0{,}85$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$
$P(X \leq g) \leq 0{,}1$
(Erwartungswert: $E(X) = 50 \cdot 0{,}95 = 340$)

g	$P(X \leq g)$
330	0,0936
331	0,1181

$g = 330$
Ablehnungsbereich = $\{0; 1; \ldots; 330\}$
Entscheidungsregel:
Wenn von den 400 untersuchten Tulpenzwiebeln 330 oder weniger keimen, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Tulpenzwiebel keimt, kleiner als 85 % ist. Ansonsten wird die Nullhypothese nicht verworfen.

b) $P(X \leq 330) \approx 0{,}0936$
Die Irrtumswahrscheinlichkeit und damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art beträgt 9,36 %.

c) X wäre hier binomialverteilt $n = 400$ und $p = 0{,}88$
$P(X \leq 330) \approx 0{,}0008$
Die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese fälschlicherweise zu verwerfen,
also ebenfalls einen Fehler 1. Art zu begehen liegt bei ca. 0,08 %.

d) Den Fehler 2. Art begeht man hier, wenn man bei der Stichprobe von 400 Tulpenzwiebeln ein Ergebnis erhält, aufgrund dessen man die Nullhypothese nicht verwirft, obwohl sie falsch ist. Dies ist der Fall, wenn das Ergebnis im Annahmebereich der ursprünglichen Nullhypothese liegt.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art:
X wäre hier binomialverteilt mit $n = 400$ und $p = 0{,}79$.
$P(X \geq 331) = 1 - P(X \leq 330) \approx 0{,}0353$
Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art läge in diesem Fall bei 3,53 %.

5 Cafeteria

X: Unzufriedene Schülerinnen und Schüler
X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 640$ und $p = 0{,}5$.
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$
(Erwartungswert: $E(X) = 640 \cdot 0{,}5 = 320$)

a) Die Schülervertretung geht von wesentlich mehr Unzufriedenen aus und wird daher einen rechtsseitigen Hypothesentest durchführen.
Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}5$
Alternative H_1: $p > 0{,}5$

b) Der Betreiber geht von wesentlich weniger Unzufriedenen aus und wird daher einen linksseitigen Hypothesentest durchführen.
Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}5$
Alternative H_1: $p < 0{,}5$

c) Linksseitiger Test:
$P(X \leq g) \leq 0{,}1$

g	$P(X \leq g)$
303	0,0960
304	0,1102

$g = 303$
Ablehnungsbereich = $\{0; 1; \ldots; 303\}$
Rechtsseitiger Test:
$P(X \geq g) \leq 0{,}1$
$P(X \leq g - 1) \geq 0{,}9$

$g_2 - 1$	$P(X \leq g_2 - 1)$
335	0,8898
336	0,9040

$g_2 = 337$ (da $g - 1 = 336$)
Ablehnungsbereich = $\{337; 338; \ldots; 640\}$
Gemeinsame Entscheidungsregel:
Wenn von den 640 befragten Schülerinnen und Schülern weniger als 304 oder mehr als 336 mit dem Angebot der Cafeteria unzufrieden sind, wird die Nullhypothese verworfen und man geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Befragter mit der Mensa unzufrieden ist, kleiner oder größer als 50 % ist. Das Ergebnis des Betreibers liegt mit 303 Unzufriedenen innerhalb des Annahmebereichs seines Tests, das der Schülervertretung mit 343 Zufriedenen innerhalb des Ablehnungsbereichs ihres Tests. In diesem Fall werden also mehr als 50 % der Schülerinnen und Schüler mit dem Angebot der Cafeteria unzufrieden sein.

Beilage zum Arbeitsbuch Mathematik Stochastik

ISBN: 978-3-12-735996-1

Endlich verständlich! Alle sicher zum Abitur.

Die Arbeitsbücher Mathematik Oberstufe bieten die Grundlagen fürs Mathe-Abi:
- mit Wiederholungen aus der Sekundarstufe I,
- dem Abi-Stoff in kleinen und verständlichen Schritten,
- vielen Beispielen und Aufgaben zum Nachvollziehen,
- vielen einfachen Tipps, schrittweisen Erklärungen und Erklärfilmen,
- Trainingsseiten zur regelmäßigen Selbstkontrolle
- und Lösungen zu allen Aufgaben.

Die Arbeitsbücher können flexibel eingesetzt werden:
im Unterricht zusätzlich zum Lehrwerk oder als zentrales Arbeitsbuch;
selbstständig zum Erarbeiten (auch im Rahmen von flipped classroom), Wiederholen, Festigen und zum Vorbereiten auf Klausuren und die Abiturprüfung.
Ebenfalls in dieser Reihe:
- Analysis I
- Analysis II
- Analytische Geometrie