

Teilbarkeitsregeln



Wenn du schnell wissen willst,
ob eine Zahl durch **2, 3, 4, 5, 6,**
9 oder **10** teilbar ist, gibt es ein
paar Tricks!

Oft ist dabei die **Quersumme**
wichtig, denn sie zeigt, welche
Teiler eine Zahl hat.
Die Quersumme erhältst du,
wenn du alle Ziffern einer Zahl
zusammenzählst!

Beispiel:

Quersumme von 218467
 $2 + 1 + 8 + 4 + 6 + 7 = 28$

Teilbarkeitsregeln:

- Durch 2 teilbar: alle geraden Zahlen.
- Durch 3 teilbar: alle Zahlen, deren Quersumme durch 3 teilbar ist.
- Durch 4 teilbar: alle Zahlen, deren letzte beiden Ziffern durch 4 teilbar sind.
- Durch 5 teilbar: alle Zahlen mit einer 0 oder einer 5 am Schluss.
- Durch 6 teilbar: alle geraden Zahlen, deren Quersumme durch 3 teilbar ist.
- Durch 9 teilbar: alle Zahlen, deren Quersumme durch 9 teilbar ist.
- Durch 10 teilbar: alle Zahlen, die eine 0 am Schluss haben.

Wenn du die Tricks oben gut durchgelesen hast, kannst du nun auch bei großen Zahlen schnell entscheiden, ob sie durch 2, 3, 4, 5, 6, 9 oder 10 teilbar sind.

Mache dort ein Kreuz, wo dies der Fall ist!

Decke nach 5 Zahlen den Kasten mit den Tricks ab. Kannst du es auch ohne ihn?

	durch 2	durch 3	durch 4	durch 5	durch 6	durch 9	durch 10
3 618 492							
856 341							
1 294 620							
5 762 475							
263 480							
9 351 617							
461 538							
743 956							
3 617 582							
6 275 494							

Primfaktorzerlegung



Du kannst jede natürliche Zahl als das Produkt anderer Zahlen schreiben. Einzige Ausnahme: die Primzahlen. Die kannst du nur als Produkt mit 1 schreiben: z.B. $7 = 1 \cdot 7$.

Eine spezielle Art, die Zahlen als Produkt zu schreiben, ist die Primfaktorzerlegung.

Die Primfaktorzerlegung brauchst du, wenn du z.B. Brüche kürzen oder den ggT (größter gemeinsamer Teiler) oder das kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches) finden willst.

Dabei schreibst du die Zahlen als Produkt einzelner Primzahlen. z.B.:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Die Primfaktorzerlegung zeigt dir, wie eine Zahl zusammengesetzt ist. Das wiederum hilft dir beispielsweise auf den nächsten Seiten beim ggT und beim kgV.

Zerlege die Zahl 84 schrittweise:

84 ist eine gerade Zahl. Deshalb ist sie sicher durch die Primzahl 2 teilbar!

$84 = 2 \cdot 42$ 42 ist ebenfalls gerade. Auch 42 muss durch 2 teilbar sein.

$84 = 2 \cdot 2 \cdot 21$ 21 hat die Quersumme 3. Deshalb ist 21 durch die Primzahl 3 teilbar.

$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ 7 ist eine Primzahl und zugleich die letzte Primzahl der Zerlegung.

Die Zerlegung ist abgeschlossen!

$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ Jetzt kannst du noch gleiche Faktoren zusammenfassen!



$84 = 2 \cdot 42 = 2 \cdot 2 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$									
56 =		·		=		·		·	
90 =		·		=		·		·	
260 =		·		=		·		·	
294 =		·		=		·		·	
350 =		·		=		·		·	
693 =		·		=		·		·	



Größter gemeinsamer Teiler

Lösung
auf Seite
72

Der **größte gemeinsame Teiler** – kurz ggT – ist die größte Zahl, durch die die gegebenen Zahlen teilbar sind.

Beispiel:

Der ggT von 24 und 36 ist 12 (sowohl 24 als auch 36 sind durch 12 teilbar).

Geschrieben wird das Beispiel oben so:

$$\text{ggT}(24, 36) = \{12\}$$

Den ggT brauchst du dann vor allem beim Kürzen von Brüchen.
Dabei musst du herausfinden, durch welche Zahl Zähler und Nenner
teilbar sind.



Es gibt verschiedene Möglichkeiten den ggT zu finden.
Zwei davon siehst du hier!

1. Variante: Du schreibst alle Teiler der gegebenen Zahlen auf. In unserem Beispiel oben sind das:

$$T_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$T_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Jetzt musst du nur noch die **größte** Zahl finden, die in beiden Mengen vorkommt.

2. Variante: Du machst von beiden Zahlen eine Primfaktorzerlegung:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Nun nimmst du alle **gemeinsamen** Faktoren und multiplizierst sie miteinander. In diesem Fall also $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Der Vorteil der Primfaktorzerlegung ist, dass sie auch bei großen Zahlen funktioniert. Das Aufschreiben aller Teiler wird bei großen Zahlen schwierig und mühsam.



Übe nun beide Varianten! Du musst bei beiden Möglichkeiten auf dasselbe Ergebnis kommen!

1. Variante

$$\text{ggT}(24, 27) = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$T_{24} = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$T_{27} = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$\text{ggT}(56, 72) = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$T_{56} = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$T_{72} = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$\text{ggT}(92, 69) = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$T_{92} = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$T_{69} = \{ \quad \quad \quad \}$$

2. Variante

$$\text{gem. Faktoren: } \quad = \quad$$

$$24 = \quad$$

$$27 = \quad$$

$$\text{gem. Faktoren: } \quad = \quad$$

$$56 = \quad$$

$$72 = \quad$$

$$\text{gem. Faktoren: } \quad = \quad$$

$$92 = \quad$$

$$69 = \quad$$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches



Das **kleinste gemeinsame Vielfache** – kurz **kgV** – ist die erste Zahl, die in den Reihen aller gegebenen Zahlen vorkommt.

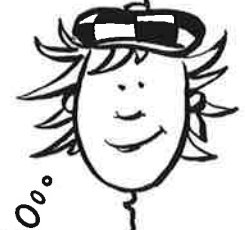
Beispiel: $6 \cdot 3 = 18$ und $9 \cdot 2 = 18$

Das kgV von 6 und 9 ist 18 (18 ist die erste Zahl, die sowohl in der 6er-, wie auch in der 9er-Reihe vorkommt).

Man schreibt das kgV so:

$$\text{kgV}(6, 9) = \{18\}$$

Das kgV brauchst du unter anderem beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen. Dazu musst du die Brüche auf den gleichen Nenner bringen und herausfinden, zu welcher Zahl du die Nenner erweitern musst.



Schau dir die beiden Möglichkeiten, das kgV zu finden, genau an und wende sie in den Aufgaben unten an!

1. Variante: Du schreibst die Vielfachen der gegebenen Zahlen so lange auf, bis du eine Zahl gefunden hast, die in beiden Mengen vorkommt:

$$V_{30} = \{30, 60, 90, 120, 150, 180, \mathbf{210}, 240, \dots\}$$

$$V_{105} = \{105, \mathbf{210}, 315, \dots\}$$

Es ist die 210.

2. Variante: Du machst von beiden Zahlen eine Primfaktorzerlegung:

$$30 = 2 \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{5}$$

$$105 = \boxed{3} \cdot \boxed{5} \cdot 7$$

3 und 5 kommen in beiden Zerlegungen vor. Nimm diese Faktoren und multipliziere sie mit den Faktoren, die darüber hinaus in den beiden Zerlegungen vorkommen:

$$3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 = \mathbf{210}$$

Auch hier ist die Primfaktorzerlegung vorteilhaft bei großen Zahlen.



Übe beide Varianten! Du musst bei beiden Möglichkeiten auf dasselbe Ergebnis kommen!

1. Variante

$$\text{kgV}(10, 15) = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$V_{10} = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$V_{15} = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$\text{kgV}(7, 8) = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$V_7 = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$V_8 = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$\text{kgV}(12, 42) = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$V_{12} = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$V_{42} = \{ \quad \quad \quad \}$$

2. Variante

$$\text{Primfaktoren: } \quad = \quad$$

$$10 = \quad$$

$$15 = \quad$$

$$\text{Primfaktoren: } \quad = \quad$$

$$7 = \quad$$

$$8 = \quad$$

$$\text{Primfaktoren: } \quad = \quad$$

$$12 = \quad$$

$$42 = \quad$$

Lösungen



Seite 7

Teilbarkeitsregeln

	durch 2	durch 3	durch 4	durch 5	durch 6	durch 9	durch 10
3 618 492	X	X	X		X		
856 341		X				X	
1 294 620	X	X	X	X	X		X
5 762 475		X		X		X	
263 480	X		X	X			X
9 351 617							
461 538	X	X			X	X	
743 956	X		X				
3 617 582	X						
6 275 494	X						

Seite 8

Primzahlen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Schreibe alle Primzahlen bis 100 auf die Linie! Es sind insgesamt 26.

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Was fällt dir auf, wenn du dir die Endziffern der zweistelligen Zahlen genauer ansiehst? Warum ist das so?

Es gibt nur die Endziffern 1, 3, 7 und 9. Die

geraden Endziffern fallen weg, weil die Zahl dann sicher durch 2 teilbar ist. Die Endziffern 0 und 5 fallen weg, weil die Zahlen dann durch 5 teilbar sind. So bleiben nur noch 1, 3, 7 und 9.

Lies die Definition der Primzahlen noch einmal durch. Warum ist die 1 ein Spezialfall?

In der Definition heißt es, eine Primzahl ist durch 1 und durch sich selbst teilbar. Bei der 1 ist das das Gleiche! 1 ist nur durch 1 teilbar.

Wie viele gerade Primzahlen gibt es? Warum?

Eine, nämlich die 2! Alle anderen geraden Zahlen sind ja auch durch 2 teilbar und damit nicht nur durch 1 und durch sich selbst!

Gibt es auch Primzahlen über 100?
101, 103, 107, etc.
(siehe unter www.primzahlen.de)



Lösungen

Seite 9

Primfaktorzerlegung

84 = 2 · 42 = 2 · 2 · 21 = 2 · 2 · 3 · 7 = 2 ² · 3 · 7																							
56 =	2	·	28	=	2	·	2	·	14	=	2	·	2	·	2	·	7	=	2 ³	·	7		
90 =	2	·	45	=	2	·	5	·	9	=	2	·	3	·	3	·	5	=	2	·	3 ²	·	5
260 =	2	·	130	=	2	·	2	·	65	=	2	·	2	·	5	·	13	=	2 ²	·	5	·	13
294 =	2	·	147	=	2	·	3	·	49	=	2	·	3	·	7	·	7	=	2	·	3	·	7 ²
350 =	2	·	175	=	2	·	5	·	35	=	2	·	5	·	5	·	7	=	2	·	5 ²	·	7
693 =	3	·	231	=	3	·	3	·	77	=	3	·	3	·	7	·	11	=	3 ²	·	7	·	11

Seite 10

Größter gemeinsamer Teiler

a)

1. Variante

$$\text{ggT}(24, 27) = \{3\}$$

$$T_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$T_{27} = \{1, 3, 9, 27\}$$

$$\text{ggT}(56, 72) = \{8\}$$

$$T_{56} = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$$

$$T_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

$$\text{ggT}(92, 69) = \{23\}$$

$$T_{92} = \{1, 2, 4, 23, 46, 92\}$$

$$T_{69} = \{1, 3, 23, 69\}$$

b)

2. Variante

$$\text{gem. Faktoren: } 3 = 3$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\text{gem. Faktoren: } 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\text{gem. Faktoren: } 23 = 23$$

$$92 = 2 \cdot 2 \cdot 23$$

$$69 = 3 \cdot 23$$

Lösungen



Seite 11

Kleinstes gemeinsames Vielfaches

c)

1. Variante

$$\text{kgV}(10, 15) = \{30\}$$

$$V_{10} = \{10, 20, 30, 40, 50, \dots\}$$

$$V_{15} = \{15, 30, 45, 60, \dots\}$$

$$\text{kgV}(7, 8) = \{56\}$$

$$V_7 = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, \dots\}$$

$$V_8 = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, \dots\}$$

$$\text{kgV}(12, 42) = \{84\}$$

$$V_{12} = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, \dots\}$$

$$V_{42} = \{42, 84, 126, 156, \dots\}$$

d)

2. Variante

$$\text{Primfaktoren: } 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$$

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$\text{Primfaktoren: } 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 56$$

$$7 = 7$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\text{Primfaktoren: } 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 84$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$42 = 7 \cdot 2 \cdot 3$$

Seite 12

Textaufgaben

a)

kgV berechnen:

Sven 80cm-Schritte

(in cm): 80 160 **240** 320 400 **480** 560
640 720...

Tanja 60cm-Schritte

(in cm): 60 120 180 **240** 300 360 420
480 540...

$$\text{kgV} = 240 \text{ (cm)}$$

2. Möglichkeit:

Sven 8 dm-Schritte: $2 \cdot 2 \cdot 2$

Tanja 6 dm-Schritte: $2 \cdot 3$

$$\text{kgV} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24 \text{ (dm)}$$

Sie treten alle 2,4 m zusammen auf.

b)

ggT berechnen:

$$T_{24} \text{ (dm)} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$T_{20} \text{ (dm)} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

$$T_{16} \text{ (dm)} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

$$\text{ggT} = 4 \text{ (dm)}$$

2. Möglichkeit:

$$24 \text{ (dm)} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$20 \text{ (dm)} = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$16 \text{ (dm)} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\text{ggT} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ (dm)}$$

Die Stücke werden 4 dm lang

$$(\text{= } 40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m})$$