

Vorkurs Mathematik

Übungen zu Matrizen

1 Elementare Rechnungen

Aufgabe 1.1 Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $A + B$, $A - B$, $A^T + B$, $A + B^T$, $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

Aufgabe 1.2 Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $a)$, $b)$ und $c)$ und lösen Sie dann $d)$ mit diesen Ergebnissen ohne erneute Rechnungen durchzuführen.

a) $A \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $A \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1.3 Ein Pizzabäcker will die folgenden Pizzen mit den jeweils angegebenen Zutaten backen:

Pizza	Zutaten
Margherita	Teig, T.soße, Käse
Funghi	Teig, T.soße, Käse, Pilze
Salami	Teig, T.soße, Käse, $\frac{1}{2}$ Packung Salami
Pizza „mit allem“ und doppelt Käse	Teig, T.soße, Käse, 1 Packung Salami, Pilze, 2 Käse

An verschiedenen Stichtagen (Tag 1 und Tag 2) hatten diese Rohzutaten verschiedene Preise:

Zutat	Preis an Tag 1	Preis an Tag 2
Teig	2,00 €	1,50 €
Tomatensauce	1,50 €	1,00 €
Salami	3,00 €	5,00 €
Pilze	1,00 €	2,00 €
Käse	2,50 €	1,00 €

Formulieren Sie für beide Tage die Berechnung der Rohzutaten-Preise der Pizzen als Matrixmultiplikation und führen Sie diese durch.

2 Determinante

Aufgabe 2.1 Berechnen Sie die Determinanten von

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A \cdot B \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Was fällt Ihnen beim Vergleich der Ergebnisse von a), b) und c) auf?

Aufgabe 2.2 Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det(A) = ad - bc \neq 0$.

a) Zeigen Sie:

$$\text{Für die Matrix} \quad B := \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{gilt:} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Rechenregel $C \cdot (\lambda \cdot D) = \lambda \cdot (C \cdot D)$ (dies gilt für Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$).

b) Die Matrix B , nennt man *die Inverse* Matrix zu A , geschrieben A^{-1} . Diese Matrix ist wichtig für das Lösen von Gleichungssystemen! Prüfen Sie das Folgende:

$$\text{Der Vektor} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := B \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad \text{löst das LGS} \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Rechnen Sie dazu **nicht** $B \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ aus, sondern setzen Sie ein und verwenden Sie Ihr Wissen über $A \cdot B$.

Aufgabe 2.3 Für reelle Zahlen a, b gilt, dass aus $a \cdot b = 0$ stets $a = 0$ oder $b = 0$ folgt. Man sagt: “die reellen Zahlen sind *nullteilerfrei*”.

Zeigen Sie, dass dies *für Matrizen* im Allgemeinen nicht gilt, indem sie eine $(2, 2)$ -Matrix B , die nicht der Nullmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entspricht, mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

finden. Was gilt für die Determinanten von A, B und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? Steht das im Einklang mit ihrer Vermutung bei Aufgabe 3.1?

3 Lösungen

Lösungen zu Aufgabe 1.1: Die Ergebnisse lauten wie folgt:

$$\begin{aligned}
 A + B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\
 A - B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \\
 A^T + B &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \\
 A + B^T &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -2 \\ 24 & -10 \end{pmatrix} \\
 B \cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 1.2:

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a) } A \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 47 \\ 6 \\ 33 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ -1 \\ 26 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 \text{d) } A \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 47 & 39 & 3 \\ 6 & -1 & -1 \\ 33 & 26 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 1.3:

$$\begin{aligned}
 \text{Zutatenmatrix: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \quad \text{Preismatrix: } \begin{pmatrix} 2 & 1,50 \\ 1,50 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \\ 2,50 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Produkt: } \begin{pmatrix} 6 & 3,50 \\ 7 & 5,50 \\ 7,50 & 6 \\ 12,50 & 11,50 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 2.1:

$$\text{a)} \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 8 + 3 = 11 \quad \text{b)} \quad \det(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 5 = -2$$

$$\text{c)} \quad \det(A \cdot B) = \det \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = 35 - 57 = -22$$

Zu a), b), c): Es gilt $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. Dies gilt für alle Matrizen A, B .

d) Entwickeln nach erster Spalte liefert:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 0 + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 31$$

Berechnen mit Sarrus-Regel liefert:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 2 \cdot (-1) \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 \\ 7 \cdot 0 \cdot 3 \end{matrix} - \begin{matrix} 3 \cdot (-1) \cdot 7 \\ 3 \cdot 4 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 \cdot 3 \end{matrix} = \begin{matrix} -2 \\ +36 \\ +0 \end{matrix} - \begin{matrix} +21 \\ -24 \\ -0 \end{matrix} = 31$$

Lösungen zu Aufgabe 2.2:

a) Zum Beweis der Aussage multiplizieren wir die beiden gegebenen Matrizen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} &= \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Sei $B = A^{-1}$. Wir setzen den vorgeschlagenen Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := B \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ in das Gleichungssystem ein:

$$\begin{aligned} A \cdot \left(B \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \right) &= (A \cdot B) \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 2.3:

Ist $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ eine Matrix mit $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, so muss

$$\begin{pmatrix} b_1 + 2b_3 & b_2 + 2b_4 \\ 2b_1 + 4b_3 & 2b_2 + 4b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gelten. Diese vier Bedingungen sind aber eigentlich nur zwei, nämlich $b_1 + 2b_3 = 0$ und $b_2 + 2b_4 = 0$, also nichts anderes als $b_1 = -2b_3$ und $b_2 = -2b_4$. Damit können wir von b_1 und b_3 sowie von b_2 und b_4 jeweils eines beliebig wählen. Eine Möglichkeit wäre $b_1 = -2, b_2 = -2, b_3 = 1, b_4 = 1$ und tatsächlich: Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gelten $\det(A) = \det(B) = 0$ und natürlich hat auch die Nullmatrix Determinante 0. Dies passt gut zu $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.