Lösungen zu den Übungen zum Rechnen mit Matrizen

Aufgabe	Lösung
1. Gegeben sind die Matrizen A = $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ und B = $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 \\ -3 & -2 & -6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie: a. A + B b. A – B c. 3 · A d. 4 · A – 2 · B	a. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 \\ -3 & -2 & -6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 10 \\ 4 & -4 & -6 \\ 6 & 11 & 6 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 \\ -3 & -2 & -6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -8 \\ 10 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ c. $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 \\ 21 & -6 & 0 \\ 9 & 15 & 6 \end{pmatrix}$ d. $4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 \\ -3 & -2 & -6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 8 & -12 & 4 \\ 28 & -8 & 0 \\ 12 & 20 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 4 & 18 \\ -6 & -4 & -12 \\ 6 & 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -16 & -14 \\ 34 & -4 & 12 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$
2. Gegeben ist die Matrix A = $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 10 & -20 & -6 \\ 5 & 13 & 1 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie: a. A · $\vec{v}$ b. 3A · $\vec{v}$ c. A · 2$\vec{v}$	a. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 10 & -20 & -6 \\ 5 & 13 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) + (-3) \cdot 4 \\ 10 \cdot 2 + (-20) \cdot (-3) + (-6) \cdot 4 \\ 5 \cdot 2 + 13 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ 56 \\ -25 \end{pmatrix}$ b. $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 10 & -20 & -6 \\ 5 & 13 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 18 & -9 \\ 30 & -60 & -18 \\ 15 & 39 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 54 - 36 \\ 60 + 180 - 54 \\ 30 - 117 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -78 \\ 168 \\ -75 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 10 & -20 & -6 \\ 5 & 13 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 36 - 24 \\ 40 + 120 - 48 \\ 20 - 78 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 \\ 112 \\ -50 \end{pmatrix}$

<table>
<tr>
<td>

3. Gegeben sind die Matrizen A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

und B = $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

a. $A \cdot B$
b. A^2
c. $(A + B) \cdot B$

</td>
<td>

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-1+4 & 2+4+8 & 4+3-10 \\ 18-4-2 & 3+16-4 & 6+12+5 \\ 36+5+6 & 6-20+12 & 12-15-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 14 & -3 \\ 12 & 15 & 23 \\ 47 & -2 & -18 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3-12 & 2+4+10 & -4+1+6 \\ 6+12+6 & 3+16-5 & -6+4-3 \\ 12-15-18 & 6-20+15 & -12-5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 16 & 3 \\ 24 & 14 & -5 \\ -21 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

c. $\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & -5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 4 & -9 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 48-2 & 8+8 & 16+6 \\ 12-8-8 & 2+32-16 & 4+24+20 \\ 24+9-4 & 4-36-8 & 8-27+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 16 & 22 \\ -4 & 18 & 48 \\ 29 & -40 & -9 \end{pmatrix}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

4. Berechnen Sie mit den Matrizen aus Aufgabe 3 **mit** dem Taschenrechner:

a. A^6
b. $(A + B)^5$
c. $A^4 \cdot B^2$

</td>
<td>

Matrix definieren: A := Menu7 (Matrix und Vektor) -> 1(Erstellen) -> 1-> Zeilen- und Spaltenanzahl eingeben -> Zahlen eintragen -> enter

a. $A^6 = \begin{pmatrix} 4297 & 7475 & 1255 \\ 11313 & 13228 & -2248 \\ -9321 & 128 & 2573 \end{pmatrix}$

b. $(A + B)^5 = \begin{pmatrix} 62048 & 18912 & 13312 \\ 45536 & 2144 & -2112 \\ -32064 & 18064 & -1344 \end{pmatrix}$

c. $A^4 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 10516 & 5655 & 11254 \\ -5 & 771 & 22778 \\ 14559 & -244 & -861 \end{pmatrix}$

</td>
</tr>
</table>

5. Untersuchen Sie anhand von $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & -5 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 2 & 4 & -1 \\ 10 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -2 \\ -10 & 9 & 5 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix}$ und mit Hilfe des Taschenrechners, ob die folgenden Aussagen bezüglich der Matrizenmultiplikation mit gleicher Spalten- und Zeilenzahl gelten: $A \cdot B = B \cdot A$ (kommutativ) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (assoziativ) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (distributiv)	$A \cdot B = \begin{pmatrix} -12 & -2 & 5 \\ 27 & -1 & 25 \\ -22 & -44 & 38 \end{pmatrix}$ und $B \cdot A = \begin{pmatrix} 39 & -57 & -35 \\ 10 & 23 & 3 \\ 44 & -23 & -37 \end{pmatrix}$ ⇨ nicht kommutativ $(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -12 & -2 & 5 \\ 27 & -1 & 25 \\ -22 & -44 & 38 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 9 & -2 \\ -10 & 9 & 5 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 & -161 & 19 \\ 324 & 59 & -34 \\ 476 & -860 & -138 \end{pmatrix}$ $A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 111 & -74 & -23 \\ -31 & 61 & 15 \\ 115 & 37 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 & -161 & 19 \\ 324 & 59 & -34 \\ 476 & -860 & -138 \end{pmatrix}$ => assoziativ $A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 4 & 6 \\ -8 & 13 & 4 \\ 15 & -9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 39 & 4 \\ 13 & 55 & 40 \\ 55 & -14 & -2 \end{pmatrix}$ $A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} -12 & -2 & 5 \\ 27 & -1 & 25 \\ -22 & -44 & 38 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 41 & -1 \\ -14 & 56 & 15 \\ 77 & 30 & -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 39 & 4 \\ 13 & 55 & 40 \\ 55 & -14 & -2 \end{pmatrix}$ ⇨ distributiv