Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Schriftliche Abiturprüfung

Mathematik

Neue Beispielaufgaben zum Abitur 2025

Impressum

Herausgeber:
Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung
Hamburger Straße 31, 22083 Hamburg

Referatsleitung Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht:
Dr. Najib Karim

Fachreferentin Mathematik für Gymnasien:
Xenia Rendtel

Redaktion:
Xenia Rendtel
Marion Böttcher

Vorwort und Schlussredaktion:
Xenia Rendtel
Marion Böttcher

Layout in LaTeX:
Xenia Rendtel

Internet: http://www.hamburg.de/abschlusspruefungen

Hamburg, am 9. Dezember 2024

Inhaltsverzeichnis

II Komplexe Aufgaben 31

1 Vorwort

Liebe Kolleginnen und Kollegen,
liebe Schülerinnen und Schüler,

zum Prüfungsjahr 2025 hat die Kultusministerkonferenz der Länder nach sorgfältigen Evaluationen eine Reduktion der Aufgabendichte bei der schriftlichen Abiturprüfung in Mathematik für das grundlegende und das erhöhte Anforderungsniveau beschlossen. Die Beschlüsse beinhalten:

- Reduktion der Bewertungseinheiten um 20 Einheiten;
- Beibehaltung der Bearbeitungszeiten sowie der grundlegenden Prüfungsstruktur.

Die angepassten Bewertungseinheiten für die einzelnen Prüfungsteile lauten:

Prüfungsteil	**Grundlegendes Niveau**	**Erhöhtes Niveau**
Aufgabe I hilfsmittelfreier Teil	25 BE (bisher 35 BE)	30 BE (bisher 40 BE)
Aufgabe II.1 oder II.2 Analysis 1 oder Analysis 2	25 BE (bisher 35 BE)	30 BE (bisher 40 BE)
Aufgabe III Lineare Algebra/Analytische Geometrie	15 BE (bisher 20 BE)	20 BE (bisher 25 BE)
Aufgabe IV Stochastik	15 BE (bisher 20 BE)	20 BE (bisher 25 BE)
Gesamtsumme	**80 BE (bisher 100 BE)**	**100 BE (bisher 120 BE)**

Tabelle 1.1: *Bewertungseinheiten der schriftlichen Abiturprüfung Mathematik ab 2025*

Beispielhaft sind in der hier vorliegenden Handreichung die Abituraufgaben des Haupttermins aus dem Jahr 2024 gemäß der neuen Richtlinien angepasst worden und liegen damit zur Einübung des neuen Formats bereit.

Schülerinnen und Schüler, die auf erhöhtem Anforderungsniveau arbeiten, haben ebenfalls die Möglichkeit, zur weiteren Übung die Aufgaben des grundlegenden Anforderungsniveaus zu bearbeiten.

Zur Unterstützung der Prüfungsvorbereitung steht weiterhin die Aufgabensammlung Mathematik des IQB zur Verfügung unter https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik.

Dieses und weiteres Material finden Sie auch auf der Website von B31-30[1].

Wir hoffen, Ihnen mit dieser Publikation eine geeignete Unterstützung für eine gezielte Vorbereitung der schriftlichen Abiturprüfung geben zu können.

Xenia Rendtel	Dr. Najib Karim
Fachreferentin Mathematik Gymnasien	Referatsleiter MINT-Referat

Hamburg, den 9. Dezember 2024

---

[1] siehe https://www.hamburg.de/politik-und-verwaltung/behoerden/schulbehoerde/themen/zentrale-pruefungen/mathematik-134022

2 Leistungsanforderungen und Bewertungskriterien

Die folgenden Aufgabenbeispiele für die Abiturprüfung im Fach Mathematik werden in zwei Aufgabenformaten vorgestellt:

- Aufgaben, die ohne den Einsatz eines Hilfsmittels bearbeitet werden sollen
- Aufgaben, zu deren Lösung der Einsatz eines Hilfsmittels vorgesehen ist

Die reine Arbeitszeit beträgt auf grundlegendem Anforderungsniveau 285 Minuten, und auf erhöhtem Anforderungsniveau 330 Minuten. Es sind jeweils insgesamt 80 Bewertungseinheiten bzw. 100 Bewertungseinheiten zu erreichen.
Die Prüflinge erhalten fünf Aufgaben – I (hilfsmittelfreier Teil) und II.1 (Analysis 1), II.2 (Analysis 2), III (Lineare Algebra bzw. Analytische Geometrie) und IV (Stochastik).
Die Prüflinge wählen im hilfsmittelfreien Prüfungsteil auf grundlegendem Anforderungniveau jeweils eine der Unteraufgaben **I.4.1**, **I.4.2** und **I.4.3**, sowie **I.5.1**, **I.5.2** und **I.5.3** aus. Die Unteraufgaben **I.1**, **I.2** und **I.3** müssen bearbeitet werden, insgesamt also **fünf** Unteraufgaben von Aufgabe **I**.
Auf erhöhtem Anforderungsniveau wählen die Prüflinge zwei der Unteraufgaben **I.5.1**, **I.5.2**, **I.5.3**, **I.5.4**, **I.5.4**, **I.5.5** und **I.5.6** aus. Die Unteraufgaben **I.1**, **I.2**, **I.3** und **I.4** müssen bearbeitet werden, insgesamt also **sechs** Unteraufgaben von Aufgabe **I**.

Die Prüflinge entscheiden selbst, über den Zeitpunkt, zu dem sie die Bearbeitung zum Prüfungsteil A abgeben und die Hilfsmittel erhalten. Dieser Zeitpunkt muss innerhalb der ersten 100 Minuten bzw. 110 Minuten nach Prüfungsbeginn liegen. In dieser Zeit ist nur die Nutzung des Rechtschreibwörterbuch erlaubt.

Die Prüflinge bearbeiten **drei** Aufgaben II.1 (Analysis 1) oder II.2 (Analysis 2), III (Lineare Algebra/Analytische Geometrie) und IV (Stochastik) in der restlichen Arbeitszeit.
Als Hilfsmittel zählen:

- Rechtschreibwörterbuch;
- nach Abgabe des hilfsmittelfreien Prüfungsteils:
  - zugelassene Formelsammlung,
  - Taschenrechner (nicht-programmierbar, nicht-grafikfähig), bzw. in Kursen mit Einsatz von modularen Mathematiksysteme: MMS-Rechner

Die Aufgabenbeispiele enthalten neben der Aufgabenstellung den Erwartungshorizont (die erwartete Schülerleistung) und Vorschläge für eine mögliche Bewertung. Im Erwartungshorizont kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise für die korrigierende Lehrkraft und keine Bestandteile der erwarteten Lösung.

Für die Bewertung der Gesamtleistung der Abiturprüfung Mathematik gilt die folgende Zuordnungstabelle:

Notenpunkte	mindestens zu erreichender Anteil an den insgesamt zu erreichenden Bewertungseinheiten
15	95 %
14	90 %
13	85 %
12	80 %
11	75 %
10	70 %
9	65 %
8	60 %

Notenpunkte	mindestens zu erreichender Anteil an den insgesamt zu erreichenden Bewertungseinheiten
7	55 %
6	50 %
5	45 %
4	40 %
3	33 %
2	27 %
1	20 %
0	0 %

Für die Erteilung der **Note „gut“** (11 Notenpunkte) ist mindestens erforderlich, dass annähernd vier Fünftel der erwarteten Gesamtleistung sowie Leistungen in allen drei Anforderungsbereichen erbracht wurden.

Für die Erteilung der **Note „ausreichend“** (5 Notenpunkte) ist mindestens erforderlich, dass annähernd die Hälfte der erwarteten Gesamtleistung und über den Anforderungsbereich I hinaus Leistungen in einem weiteren Anforderungsbereich erbracht wurden.

Die erbrachte Gesamtleistung ergibt sich aus der Summe der Bewertungseinheiten in den vier Aufgaben.

Schwerwiegende und gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem Abzug von bis zu zwei Notenpunkten in einfacher Wertung. Mangelhafte Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen oder unzureichende oder falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text sind als fachliche Fehler zu werten. Ein Abzug für Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit soll nicht erfolgen, wenn diese bereits Gegenstand der fachspezifischen Bewertungsvorgaben sind.

Bei der Bearbeitung des Prüfungsteils B müssen die Lösungswege sorgfältig dokumentiert werden.

Teil I

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

3 Grundlegendes Anforderungsniveau

I.1 Analysis Lösung S. 92

Die Abbildung 3.1 zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.

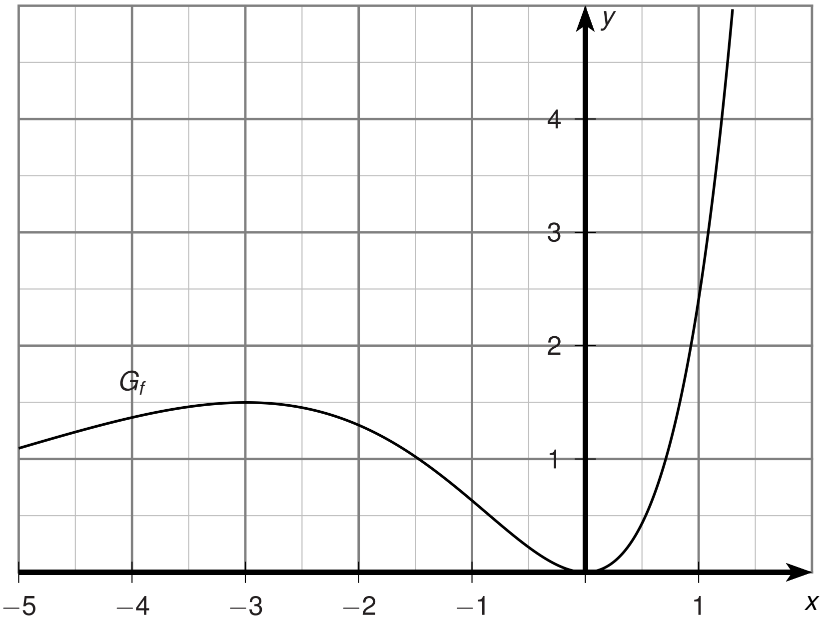


Abbildung 3.1

a) Bestimmen Sie grafisch den Wert des Integrals

$$\int_{-3}^{-1{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2 BE)

b) Beschreiben Sie, wie der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion u mit

$$u(x) = -f(x) + 2$$

aus G_f erzeugt werden kann.

Geben Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von u **an.** **(3 BE)**

I.2.1 Lineare Algebra Lösung S. 92

Gegeben ist ein dreiseitiges, gerades Prisma *ABCDEF* mit den Eckpunkten

$$A(3|0|0),\ B(3|4|0),\ C(0|0|0) \text{ und } F(0|0|5).$$

Siehe dazu Abbildung 3.2.

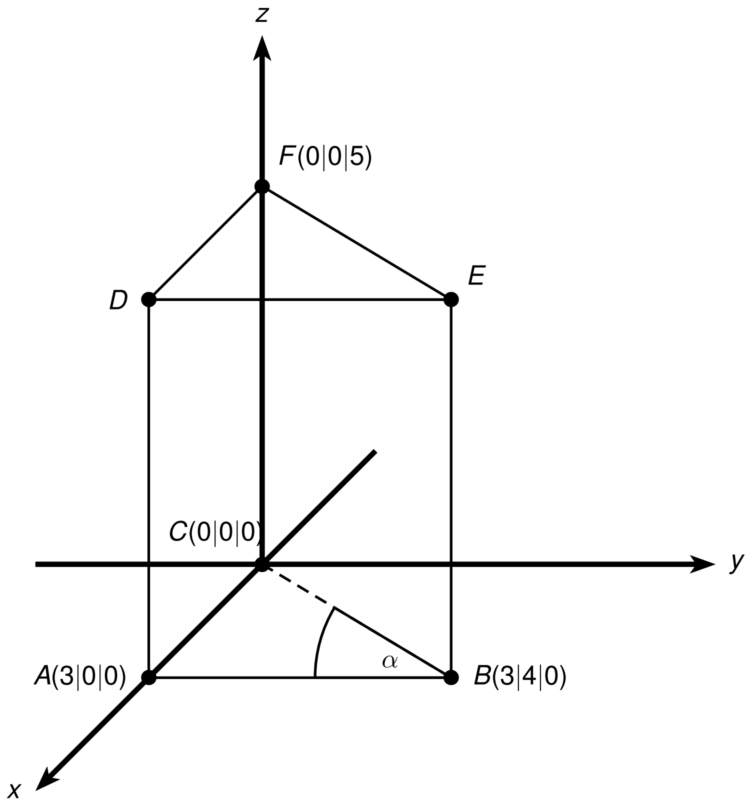


Abbildung 3.2

a) **Geben** Sie die Koordinaten der Punkte *D* und *E* **an.** **(1 BE)**

b) **Berechnen** Sie den Umfang des Dreiecks *ABC*. **(4 BE)**

I.2.2 Analytische Geometrie Lösung S. 93

Gegeben sind die Punkte $P\,(2|0|23)$ und $Q_t\,(6|t|20)$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) **Entscheiden** Sie, ob es einen Wert von t gibt, für den die Gerade PQ_t parallel zur xy-Ebene verläuft.

Begründen Sie Ihre Entscheidung. **(2 BE)**

b) Der Koordinatenursprung und die Punkte P und Q_t bilden für jedes t ein Dreieck.

Ermitteln Sie diejenigen Werte von t, für die das Dreieck in Q_t einen rechten Winkel hat.

(3 BE)

I.3 Stochastik Lösung S. 93

In einem Spielwarengeschäft erhält jedes Kind im Rahmen einer Werbeaktion einen kleinen, blickdicht verpackten Ball. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Ball eine Glitzerfärbung hat, beträgt 40 %.

a) **Zeigen** Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Gruppe von drei Kindern jedes Kind einen Ball mit Glitzerfärbung erhält, kleiner als 10 % ist. **(2 BE)**

b) **Beschreiben** Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E mit dem Term

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5}$$

berechnet werden kann.

Geben Sie das Ereignis E **an**, das genau zum angegebenen Term passt. **(3 BE)**

Aus den folgenden Aufgaben I.4.1 bis I.4.3 muss eine ausgewählt werden.

I.4.1 Analysis Lösung S. 93

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 4x.$$

a) **Begründen** Sie, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. **(1 BE)**

b) Der Graph von f und die x-Achse schließen eine Fläche ein, die aus zwei Flächenstücken besteht.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. **(4 BE)**

I.4.2 Lineare Algebra Lösung S. 94

Gegeben ist eine 2×2-Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) **Berechnen** Sie den Vektor

$$\vec{u} = A \cdot 2 \cdot \vec{v} - \vec{v}.$$

(2 BE)

b) Die inverse Matrix von A ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & a \\ -0{,}5 & a \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie a. **(3 BE)**

I.4.2 Analytische Geometrie **Lösung S. 94**

Die Punkte

$$A\,(1|1|0),\ B\,(4|1|0),\ E\,(1|1|4) \text{ und } H\,(1|7|4)$$

sind Eckpunkte des in der Abbildung 3.3 dargestellten Quaders *ABCDEFGH*.

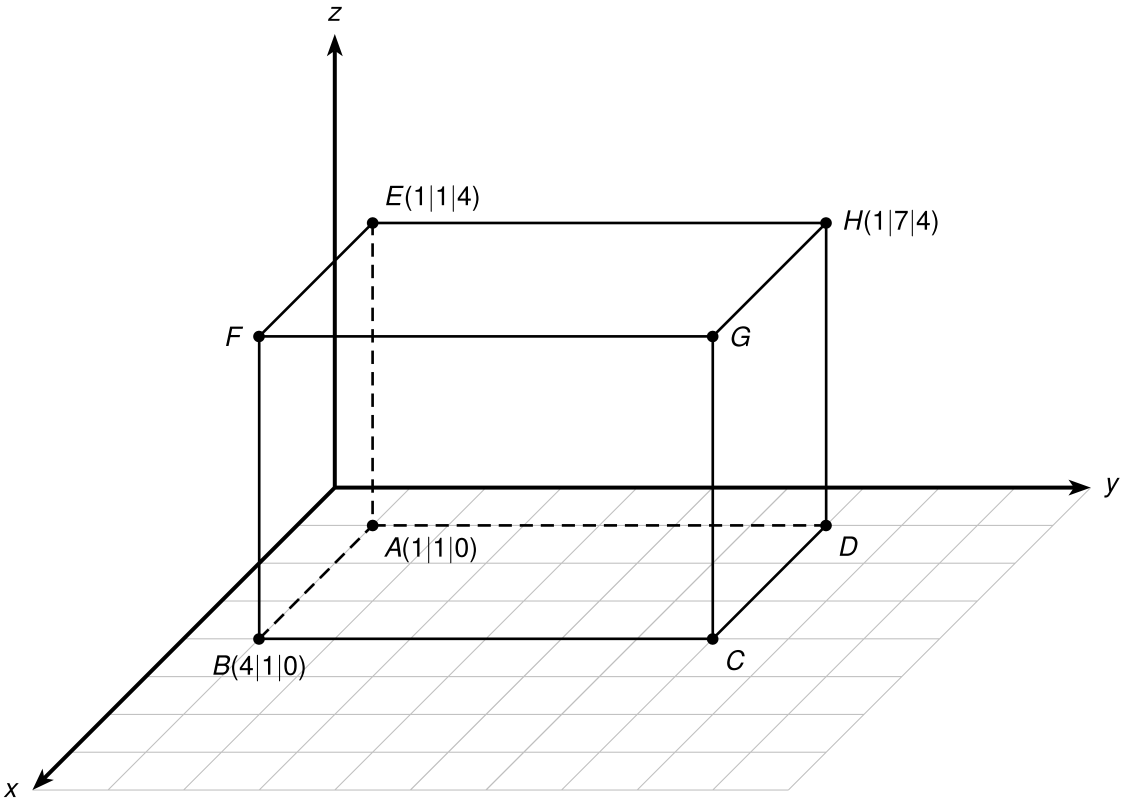


Abbildung 3.3

a) **Geben** Sie die Koordinaten des Punktes *G* **an.** **(1 BE)**

Der Quader wird parallel zu einer Gerade so verschoben, dass sich der Schnittpunkt seiner Raumdiagonalen im Koordinatenursprung befindet.
Dabei entsteht der Quader $A'B'C'D'E'F'G'H'$.

b) **Ermitteln** Sie die Koordinaten des Punktes H'. **(3 BE)**

c) **Geben** Sie einen Eckpunkt des Quaders $A'B'C'D'E'F'G'H'$ **an**, der nur positive Koordinaten hat. **(1 BE)**

I.4.3 Stochastik Lösung S. 94

Auf einer Spendengala wird das folgende Spiel angeboten: Für einen Einsatz von 3 € dreht der Spieler zweimal ein Glücksrad. Dieses besteht aus mehreren gleich großen Sektoren. 10 % der Sektoren sind grün eingefärbt. Für jedes Erzielen eines grünen Sektors werden dem Spieler 10 € ausgezahlt.

a) Die Wahrscheinlichkeit bei diesem Spiel genau einmal einen grünen Sektor zu erzielen beträgt 18 %.

Zeigen Sie dies. **(2 BE)**

b) **Begründen** Sie, dass der Veranstalter der Spendengala erwarten kann, mit diesem Spiel auf lange Sicht mehr Geld einzunehmen als auszuzahlen. **(3 BE)**

Aus den folgenden Aufgaben I.5.1 bis I.5.3 muss eine ausgewählt werden.

I.5.1 Analysis Lösung S. 95

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Die Abbildung 3.4 zeigt den Graphen von f sowie die Tangente t_4 an den Graphen von f im Punkt $(4|f(4))$.

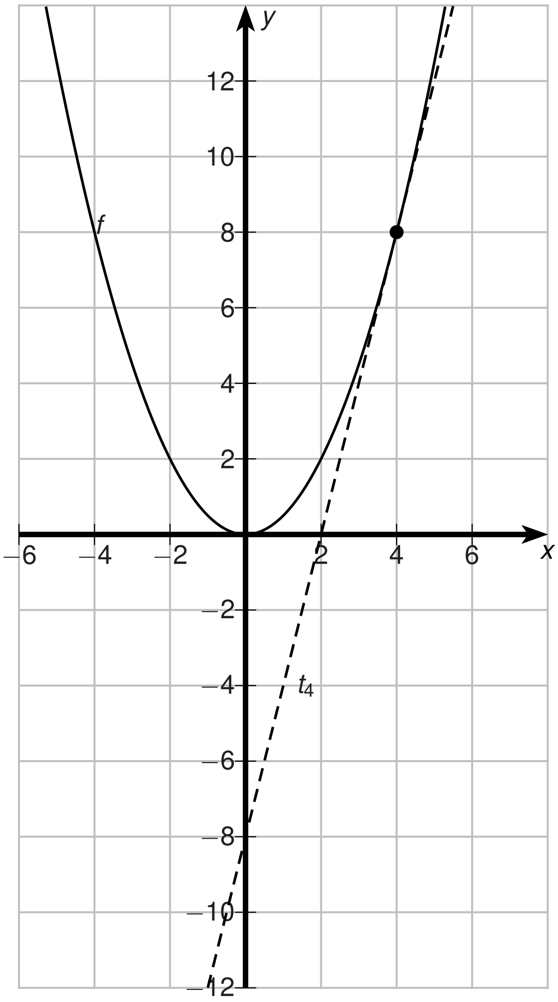


Abbildung 3.4

a) **Geben** Sie anhand der Abbildung 3.4 eine Gleichung der Tangente t_4 **an.** **(1 BE)**

b) **Bestimmen** Sie die Gleichung der Tangente t_u an den Graphen von f im Punkt $(u|f(u))$ für $u \in \mathbb{R}$. **(4 BE)**

I.5.2.1 Lineare Algebra **Lösung S. 95**

Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) **Begründen** Sie, dass es mehr als einen Vektor $\vec{a}$ gibt, für den

$$M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt. **(2 BE)**

b) **Ermitteln** Sie alle Vektoren $\vec{b}$ mit $M \cdot \vec{b} = \vec{b}$. **(3 BE)**

I.5.2.2 Analytische Geometrie Lösung S. 95

Betrachtet wird das Quadrat aus Abbildung 3.5, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Das Quadrat liegt in der *xy*-Ebene.
- Ein Eckpunkt liegt im Koordinatenursprung.
- Der Schnittpunkt *M* der Diagonalen des Quadrats liegt auf der Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Die Gerade *g* hat mit der *xy*-Ebene nur den Schnittpunkt *M* gemeinsam.

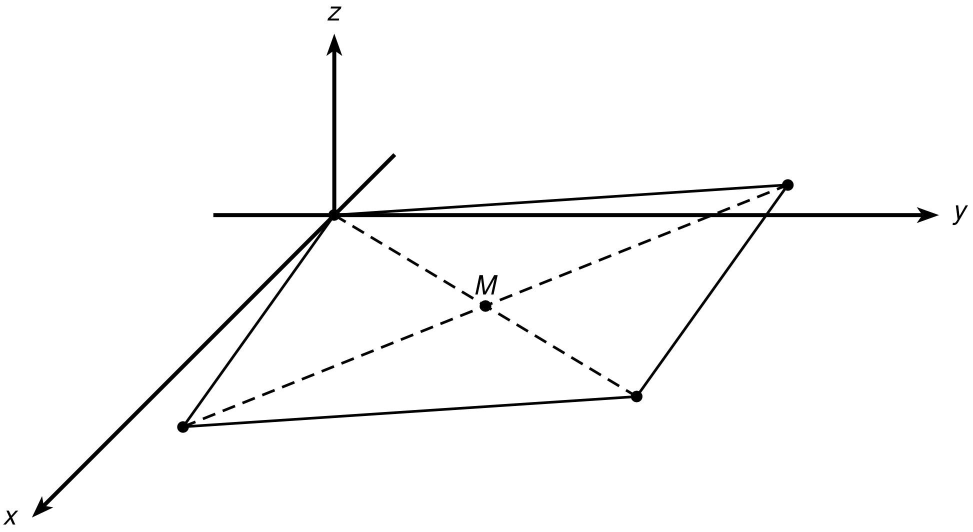


Abbildung 3.5

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts *M* der Diagonalen und **berechnen** Sie den Flächeninhalt des Quadrats. **(5 BE)**

I.5.3 Stochastik Lösung S. 96

In einem Betrieb werden Geräte hergestellt, von denen jedes mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % fehlerfrei ist. Bevor ein Gerät in den Verkauf gehen kann, wird es einer Endkontrolle unterzogen. Dabei identifiziert die Endkontrolle ein fehlerfreies Gerät mit einer Wahrscheinlichkeit von 99%. Dagegen wird ein fehlerhaftes Gerät mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % ebenfalls als fehlerfrei eingestuft.

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät fehlerfrei ist und als fehlerfrei eingestuft wird, beträgt 89,1 %.

Zeigen Sie dies. **(2 BE)**

b) **Formulieren** Sie eine Aussage im Sachzusammenhang, die sich in Verbindung mit der Gleichung

$$0{,}891 + 0{,}1 \cdot 0{,}05 = 0{,}896$$

aus der Ungleichung

$$\sum_{k=90}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0{,}896^{k} \cdot 0{,}104^{100-k} > 0{,}5$$

ergibt. **(3 BE)**

4 Erhöhtes Anforderungsniveau

I.1 Analysis **Lösung S. 97**

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = ax^3 + ax^2$$

und $a \in \mathbb{R}^+$.

a) **Geben** Sie den Wert von a **an**, so dass der Punkt $(1|6)$ auf dem Graphen von f_a liegt. **(1 BE)**

b) **Berechnen** Sie in Abhängigkeit von a den Inhalt der Fläche, die der Graph von f_a mit der x-Achse einschließt. **(4 BE)**

I.2 Analysis

Lösung S. 97

Die Abbildung 4.1 zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right).$$

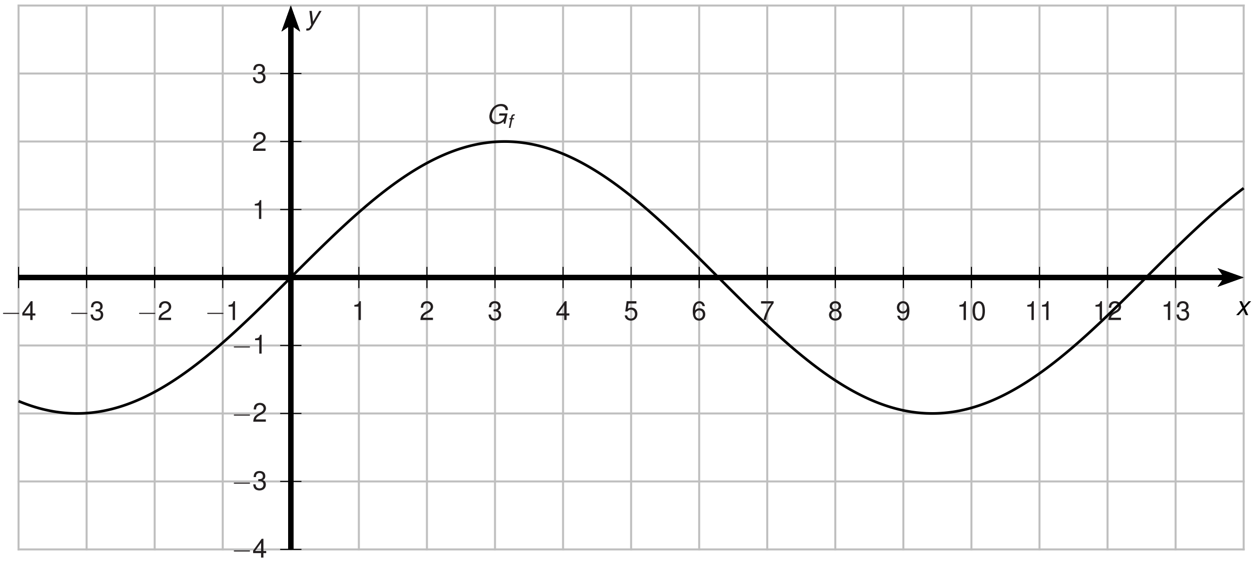


Abbildung 4.1

a) **Beurteilen** Sie mithilfe der Abbildung 4.1, ob der Wert des Integrals

$$\int_{-2}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$$

negativ ist. **(2 BE)**

b) **Weisen** Sie rechnerisch **nach**, dass die folgende Aussage zutrifft:

Die Tangente an G_f im Koordinatenursprung ist die Gerade durch die Punkte

$(-1|-1)$ *und* $(1|1)$.

(3 BE)

I.3.1 Lineare Algebra Lösung S. 97

Ein Unternehmen produziert aus zwei Rohstoffen drei Zwischenprodukte, aus denen dann zwei Endprodukte hergestellt werden.
Für den Produktionsprozess gilt

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}$$

und

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}.$$

Dabei gibt der Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ die Anzahlen der Mengeneinheiten (ME) der beiden Rohstoffe an, der Vektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ die Anzahlen der Mengeneinheiten der drei Zwischenprodukte und der Vektor $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ die Anzahlen der Mengeneinheiten der beiden Endprodukte.
Die beiden Matrizen geben an, wie viel Rohstoffe bzw. Zwischenprodukte benötigt werden, um eine bestimme Menge Endprodukte zu produzieren.

a) **Bestimmen** Sie für jeden der beiden Rohstoffe die Anzahl der Mengeneinheiten, die zur Herstellung von 2 ME des ersten und 2 ME des zweiten Endprodukts insgesamt benötigt werden. **(1 BE)**

Für 1 ME des ersten, 1 ME des zweiten und 1 ME des dritten Zwischenprodukts ist jeweils die gleiche Anzahl von Mengeneinheiten des ersten Rohstoffs erforderlich.
Sowohl für 1 ME des ersten als auch für 1 ME des zweiten Zwischenprodukts werden 2 ME des zweiten Rohstoffs benötigt.

b) **Bestimmen** Sie die Matrix M, für die

$$\vec{r} = M \cdot \vec{z}$$

gilt. **(4 BE)**

I.3.2 Analytische Geometrie Lösung S. 98

Gegeben ist die Schar der Ebenen

$$E_a : 2ax_1 - 4x_2 + (a-2) \cdot x_3 = 12$$

mit $a \in \mathbb{R}$.

a) **Ermitteln** Sie denjenigen Wert von a, für den E_a parallel zur Gerade mit der Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $b \in \mathbb{R}$ verläuft. **(2 BE)**

b) **Prüfen** Sie, ob die Ebene mit der Gleichung

$$6x_1 - 8x_2 + x_3 = 24$$

zur Schar gehört. **(3 BE)**

I.4 Stochastik

Lösung S. 98

Ein Glücksrad ist in 20 gleich große Sektoren unterteilt, die entweder blau oder gelb eingefärbt sind.
Das Glücksrad wird 100-mal gedreht.
Die binomialverteilte Zufallsgröße X beschreibt, wie oft dabei die Farbe „Blau“,
die binomialverteilte Zufallsgröße Y, wie oft dabei die Farbe „Gelb“ erzielt wird.

a) **Begründen** Sie, dass X und Y die gleiche Standardabweichung haben. **(2 BE)**

b) Der Erwartungswert von X ist ganzzahlig.

Die Abbildung 4.2 zeigt Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

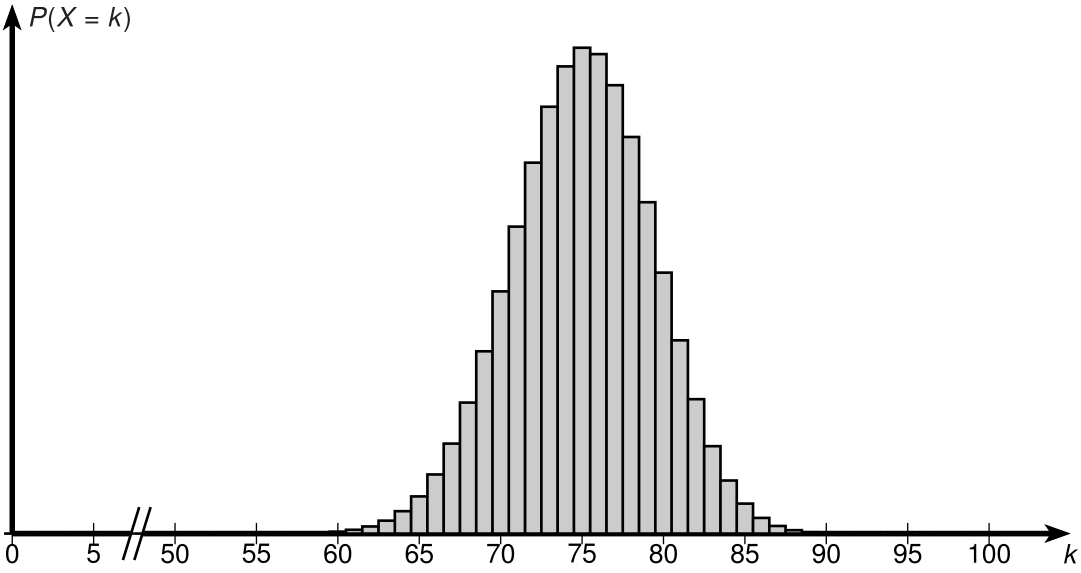


Abbildung 4.2

Bestimmen Sie die Anzahl der blauen Sektoren des Glücksrads. **(3 BE)**

Aus den folgenden Aufgaben I.5.1 bis I.5.6 müssen zwei ausgewählt werden.

I.5.1 Analysis Lösung S. 99

Gegeben ist für jede positive reelle Zahl a die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a mit

$$f_a(x) = a \cdot x^2.$$

Die Abbildung 4.3 zeigt den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ sowie die Tangente t_4 an den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ im Punkt $\left(4|f_{\frac{1}{2}}(4)\right)$.

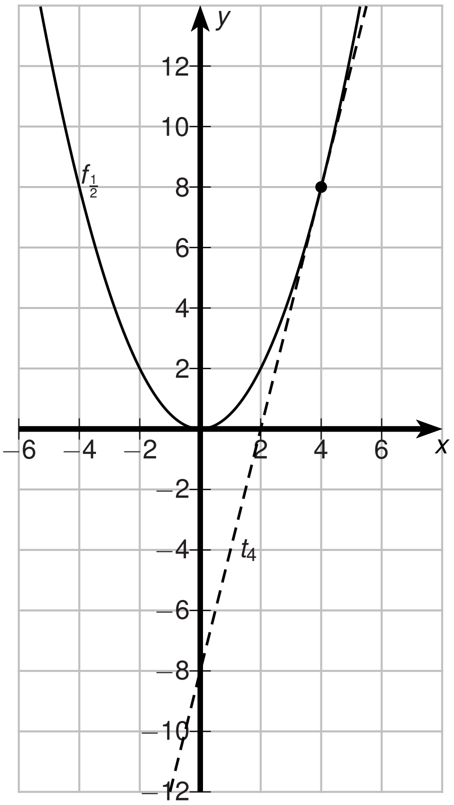


Abbildung 4.3

a) **Geben** Sie anhand der Abbildung 4.3 eine Gleichung der Tangente t_4 **an.** **(1 BE)**

b) **Bestimmen** Sie die Gleichung der Tangente t_u an den Graphen von f_a im Punkt $(u|f_a(u))$ für $u \in \mathbb{R}$. **(4 BE)**

I.5.2 Analysis **Lösung S. 99**

Gegeben sind die reellen Funktionen f_a und g mit

$$f_a(x) = x^5 - x^3 + ax; \quad a \in \mathbb{R}$$

und

$$g(x) = -x.$$

In der Abbildung 4.4 sind der Graph von f_a für $a = 1$ und der Graph von g dargestellt.

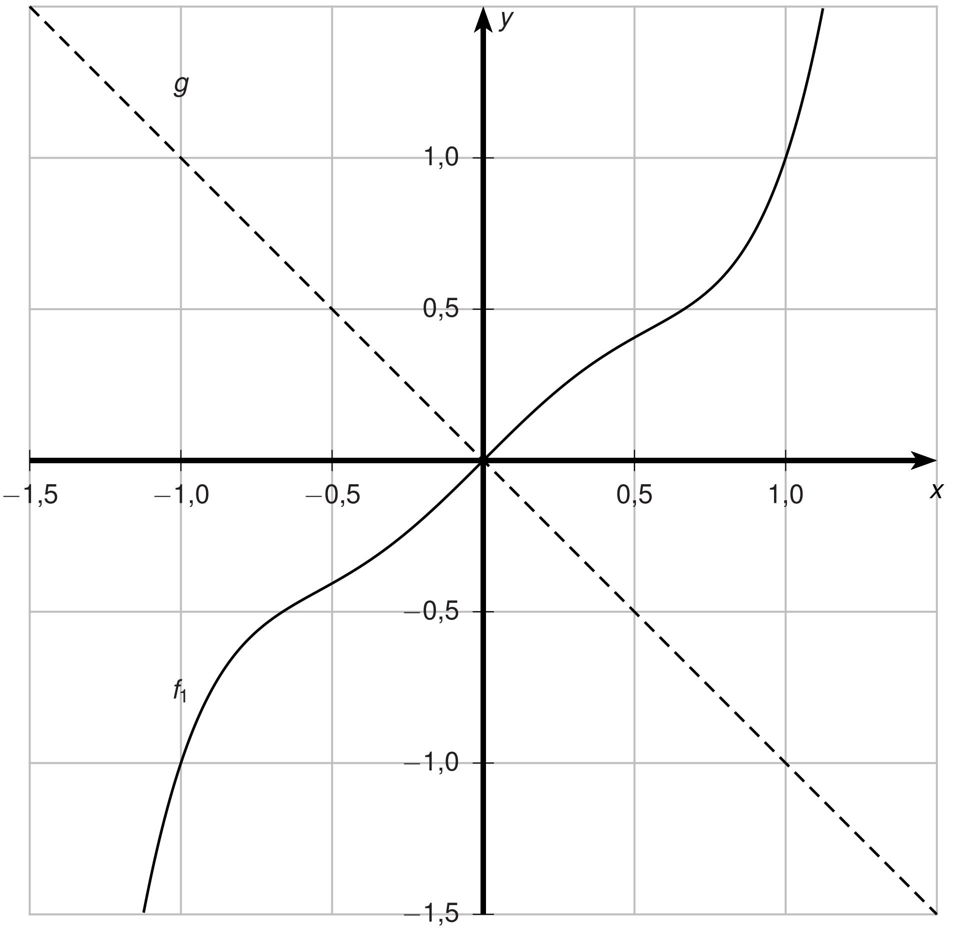


Abbildung 4.4

a) **Bestimmen** Sie für $a = 1$ die Fläche, die die Funktionen f_1 und g im Intervall $[0; 1]$ einschließen.

(2 BE)

b) **Bestimmen** Sie a so, dass die Tangente der Funktion f_a an der Stelle $x = 1$ senkrecht zur Funktion g steht. **(3 BE)**

I.5.3.1 Lineare Algebra Lösung S. 99

Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beschreiben Sie zunächst die Veränderungen, die sich für eine beliebige 3×3-Matrix ergeben, wenn ...

- diese von rechts mit M multipliziert wird.
- diese von links mit M multipliziert wird.

Bestimmen Sie die Werte von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ b & 2c & d \\ 1 & 2d - b & c - a \end{pmatrix}$$

gilt:

$$M \cdot A \cdot M = A$$

(5 BE)

I.5.3.2 Analytische Geometrie Lösung S. 100

Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte eines Oktaeders (siehe Abbildung 4.5).

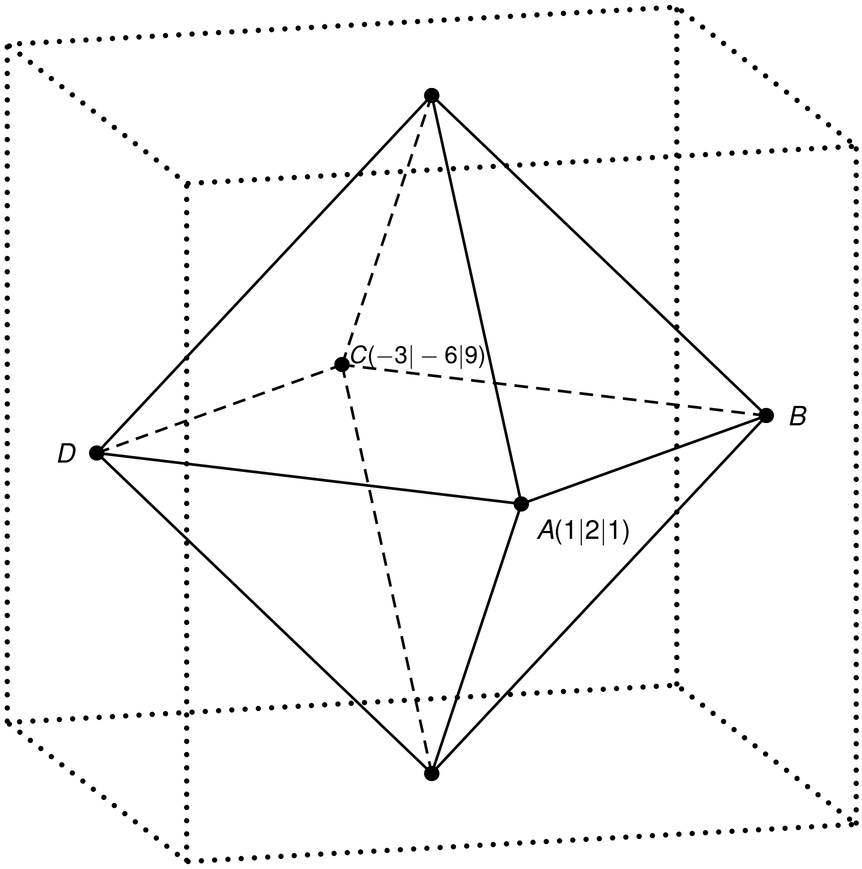


Abbildung 4.5

Die Eckpunkte

$$A\,(1|2|1),\ B,\ C\,(-3|-6|9) \text{ und } D$$

des Oktaeders liegen in der Ebene H mit der Gleichung

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6.$$

a) **Weisen** Sie **nach**, dass die Kantenlänge des Würfels 12 beträgt. **(2 BE)**

b) **Bestimmen** Sie die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte des Oktaeders, die nicht in H liegen. **(3 BE)**

I.5.4.1 Lineare Algebra Lösung S. 100

Eine Population entwickelt sich in drei Entwicklungsstadien gemäß der Populationsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a & 2a \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}^+$.
Die Matrixelemente in der ersten Zeile stellen die jeweiligen Geburtenraten dar.
In allen drei Stadien gibt es zu Beginn dieselbe Anzahl an Individuen.

Bestimmen Sie ein Intervall für a, sodass die Gesamtpopulation nach einem Entwicklungsschritt zwischen 0 % und 20 % wächst. **(5 BE)**

I.5.4.2 Analytische Geometrie Lösung S. 101

Gegeben ist die Schar der Geraden

$$g_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ -4k \\ k \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.

a) **Begründen** Sie, dass alle Geraden g_k der Schar parallel zueinander sind. **(1 BE)**

b) Betrachtet wird das Quadrat mit folgenden Eigenschaften:

- Die Punkte $O\,(0|0|0)$ und $P\,(11|4|5)$ sind Eckpunkte des Quadrats.
- Zwei Seiten des Quadrats liegen auf Geraden der Schar g_k.

Weisen Sie **nach**, dass O und P keine benachbarten Eckpunkte dieses Quadrats sind.

(4 BE)

I.5.5 Stochastik Lösung S. 101

Die drei nicht sichtbaren Seiten des abgebildeten Würfels (siehe Abbildung 4.6) sollen jeweils mit einer der Zahlen 3, 4, 5 oder 6 beschriftet werden. Dabei können Zahlen auch mehrfach verwendet werden.

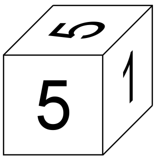


Abbildung 4.6

Nach der Beschriftung soll der Würfel folgende Eigenschaften haben:

- Beim einmaligen Werfen ist der Erwartungswert für die erzielte Zahl gleich 4.
- Auf den sechs Seiten des Würfels kommen genau drei verschiedene Zahlen vor.
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim zweimaligen Werfen des Würfels zweimal die gleiche Zahl erzielt wird, beträgt $\frac{1}{2}$.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, die nicht sichtbaren Seiten des Würfels so zu beschriften, dass er alle drei Eigenschaften besitzt. **(5 BE)**

I.5.6 Stochastik **Lösung S. 102**

Betrachtet wird ein Tetraeder, bei dem die Seiten mit den Zahlen 1 bis 4 durchnummeriert sind. Beim Werfen des Tetraeders werden alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzielt. Das Tetraeder wird viermal geworfen. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Würfe, bei denen die Zahl 1 erzielt wird. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist in Abbildung 4.7 dargestellt.

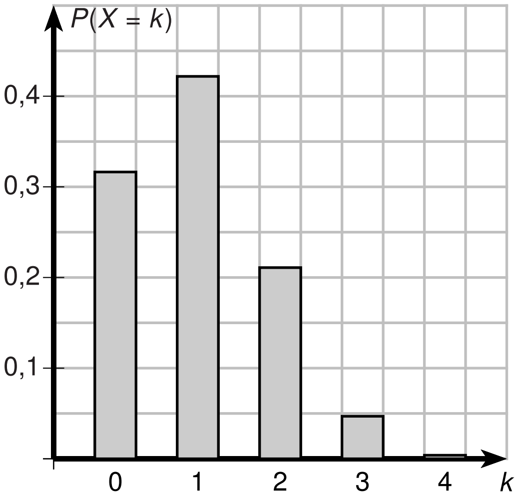


Abbildung 4.7

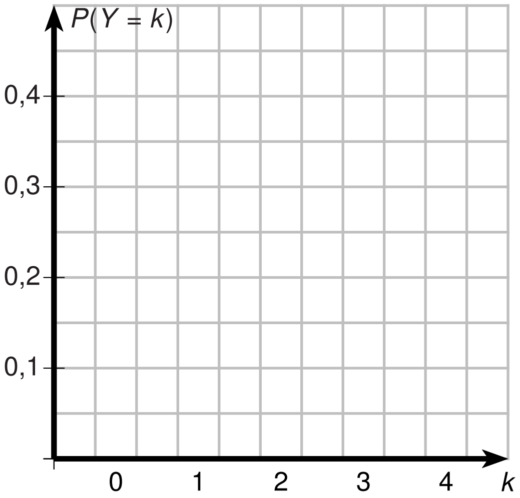


Abbildung 4.8

a) Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der Würfe an, bei denen die Zahl 1 nicht erzielt wird.

Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y in Abbildung 4.8 **dar**. **(2 BE)**

b) Bei einem anderen Zufallsexperiment werden ein roter und ein grüner Würfel, bei denen die Seiten jeweils mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind, viermal gleichzeitig geworfen.

Geben Sie zu diesem Zufallsexperiment eine Zufallsgröße Z **an**, die die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung hat wie X, und **begründen** Sie Ihre Angabe. **(3 BE)**

Teil II

Komplexe Aufgaben

5 Grundlegendes Anforderungsniveau

5.1 wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR)

Aufgabe 1. Analysis 1 Lösung S. 104

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit

$$f(x) = \frac{3}{1\,000} \cdot x^4 - \frac{8}{100} \cdot x^3 + \frac{6}{10} \cdot x^2.$$

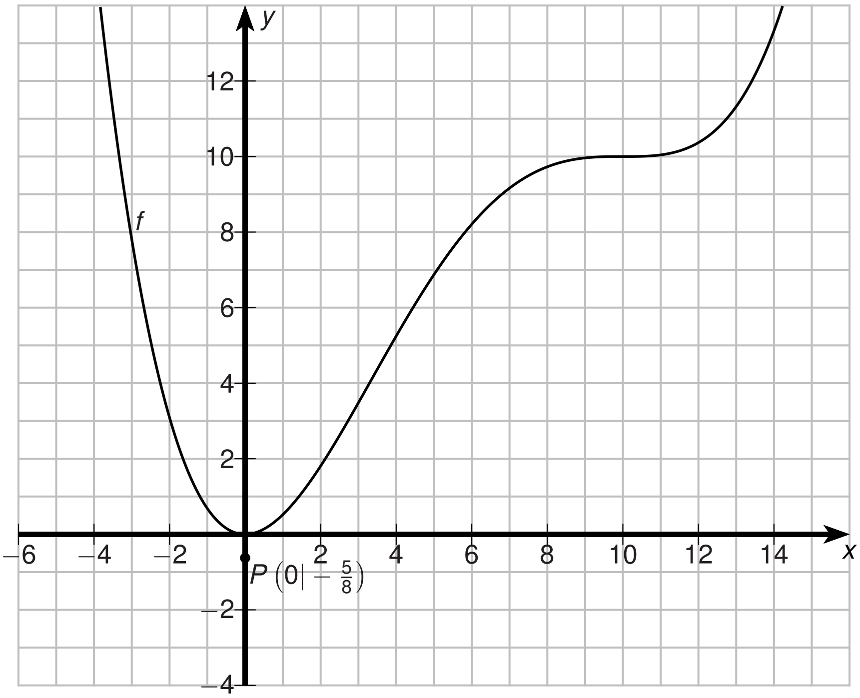


Abbildung 5.1

Abbildung 5.1 zeigt den Graphen von f sowie den Punkt $P\left(0\middle|-\frac{5}{8}\right)$.

a) **Geben** Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen von f **an**.

Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von f keine weiteren Extrempunkte besitzt.

(6 BE)

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(5|f(5))$ wird mit t bezeichnet.

b) **Ermitteln** Sie eine Gleichung von t. **(4 BE)**

c) Der Graph der reellen Funktion g mit

$$g(x) = a \cdot f(b \cdot x) \quad a, b \in \mathbb{R}^+$$

kann aus dem Graphen von f erzeugt werden.

Geben Sie in diesem Zusammenhang die Bedeutung von a und b **an**.

Durch die Transformation von f zu g wird aus dem Punkt $(10|10)$ auf dem Graphen von f der Punkt $(12|12)$ auf dem Graphen von g.

Bestimmen Sie den Wert von a. **(3 BE)**

2. Zwei Radfahrer starten gleichzeitig nebeneinander auf einer geradlinigen Bahn aus einer Ruheposition. Radfahrer A beschleunigt 10 Sekunden lang und fährt danach mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

Radfahrer B beschleunigt 12 Sekunden lang und fährt dann mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

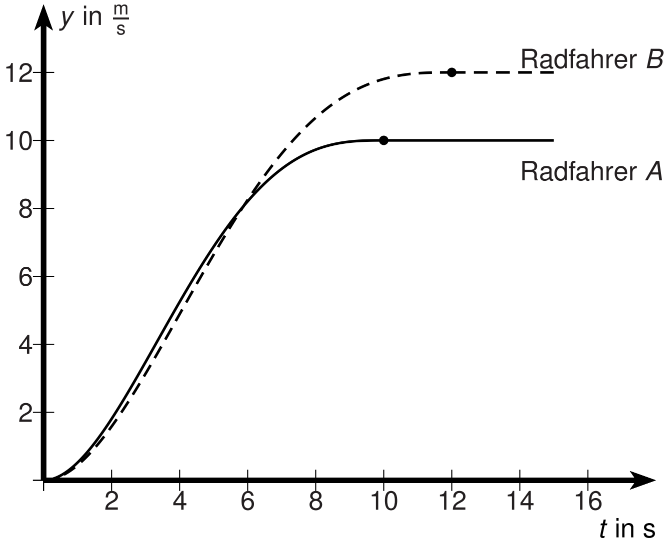


Abbildung 5.2

Abbildung 5.2 stellt die Geschwindigkeitsverläufe der beiden Radfahrer in den ersten 15 Sekunden nach dem Start dar.

Dabei wird der Geschwindigkeitsverlauf von Radfahrer A in den ersten 10 Sekunden nach dem Start durch die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{3}{1\,000} \cdot t^4 - \frac{8}{100} \cdot t^3 + \frac{6}{10} \cdot t^2$$

beschrieben. Der Geschwindigkeitsverlauf von Radfahrer B wird in den ersten 12 Sekunden nach dem Start durch eine Funktion h beschrieben.

Dabei ist t die seit dem Start vergangene Zeit in Sekunden und $f(t)$ bzw. $h(t)$ die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde.

Nach dem Start gibt es genau einen Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeiten beider Radfahrer gleich groß sind. Im Modell wird dieser Zeitpunkt mit t_s bezeichnet.

a) **Ermitteln** Sie t_s mithilfe von Abbildung 5.2 und **geben** Sie den Zeitraum **an**, in dem die Geschwindigkeit von Radfahrer *A* größer ist als die Geschwindigkeit von Radfahrer *B*.

(3 BE)

b) Im Folgenden ist ein Lösungsweg für eine Aufgabe im gegebenen Sachzusammenhang dargestellt.

$d(t) = f(t) - h(t)$
$d'(t) = 0$ *hat für* $0 < t < t_s$ *nur die Lösung* $t_1 \approx 3{,}64$.
$d''(t_1) \approx -0{,}13 < 0$
$d(t_1) \approx 0{,}37$

Geben Sie die Bedeutung von $d(t)$ für $0 < t < t_s$ im Sachzusammenhang **an**. **(3 BE)**

c) **Berechnen** Sie die Länge der Strecke, die Radfahrer *A* in den ersten 10 Sekunden nach dem Start zurücklegt. **(4 BE)**

d) Es gibt ein z mit $0 < z < 10$, für das gilt:

$$\int_0^z (f(t) - h(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

Geben Sie die Bedeutung von z im Sachzusammenhang **an**. **(2 BE)**

Aufgabe 2. Analysis 2 Lösung S. 106

1. Bei einer Algenkultur wird das Wachstum für 54 Stunden beobachtet. Die Wachstumsgeschwindigkeit der Algen wird durch die reelle Funktion f mit

$$f(t) = \frac{1}{100} \cdot (t - 50) \cdot (t - 40) \cdot e^{\frac{t}{5}}$$

beschrieben (siehe Abbildung 5.3).

Dabei ist t die Zeit nach Beobachtungsbeginn in Stunden und $f(t)$ gibt die Wachstumsgeschwindigkeit in Algen pro Stunde an.

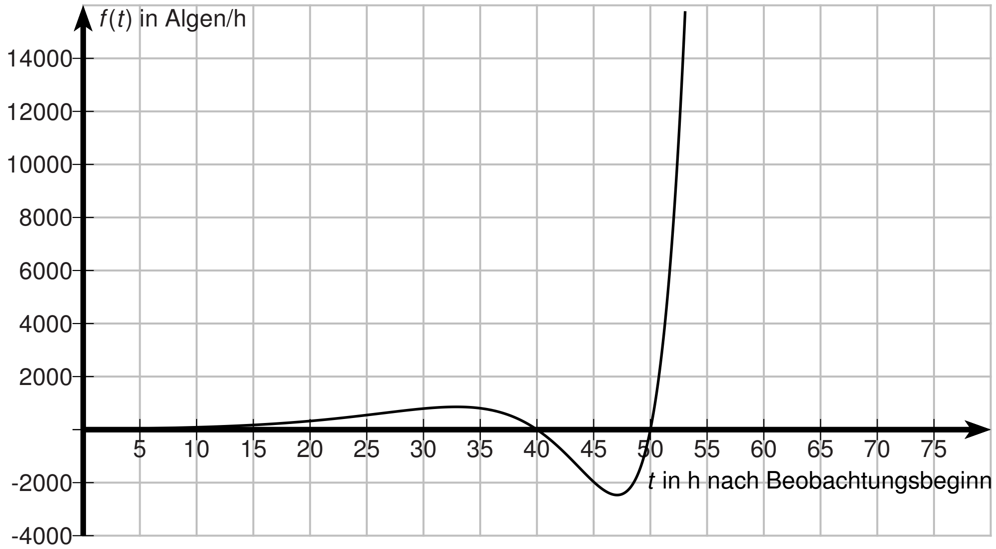


Abbildung 5.3

a) **Berechnen** Sie die Wachstumsgeschwindigkeit der Algen 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

(3 BE)

b) **Interpretieren** Sie anhand des Graphen die Bedeutung der Zeitpunkte $t = 40$ und $t = 50$ für die Anzahl der Algen.

Begründen Sie Ihre Aussagen. **(3 BE)**

c) **Bestätigen** Sie, dass die Funktion F mit

$$F(t) = \left(0{,}05t^2 - 5t + 125\right) \cdot e^{\frac{t}{5}} + 1$$

eine Stammfunktion von f ist. **(3 BE)**

d) **Berechnen** Sie, wie viele Algen 10 Stunden nach Beobachtungsbeginn hinzugekommen sind. **(3 BE)**

2. Gegeben ist die ganzrationale Funktion u mit

$$u(x) = -2x^3 + 6x^2 - 5x + 2$$

und der Punkt $A(1\,|5)$ (siehe Abbildung 5.4).

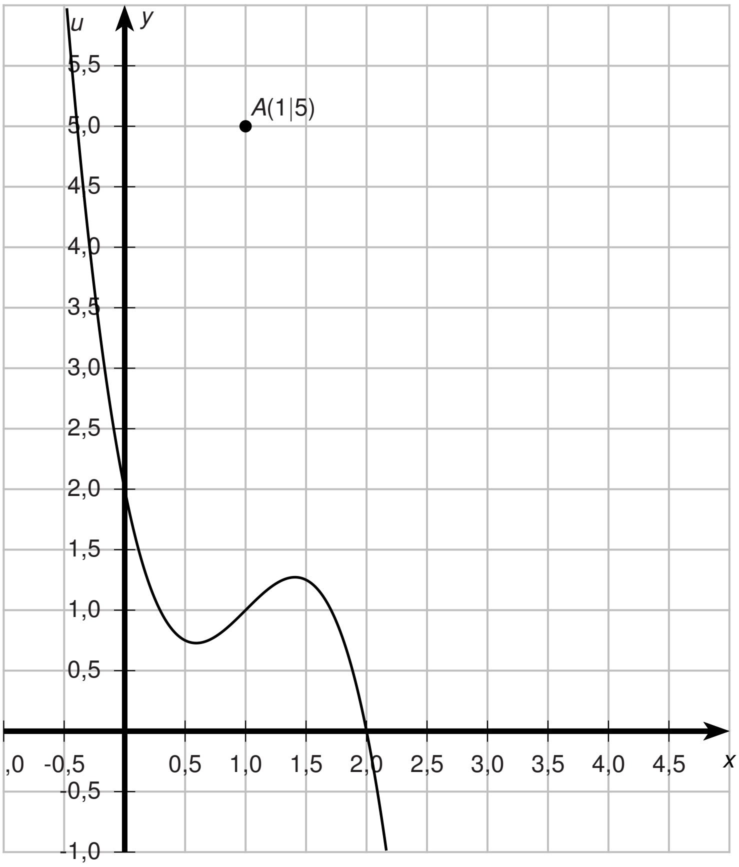


Abbildung 5.4

Die Funktion u ist durch geeignete Verschiebungen aus der Funktion v mit

$$v(x) = -2x^3 + x$$

hervorgegangen, die punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

a) **Geben** Sie **an**, welche der folgenden Funktionsgleichungen für u richtig ist:

I) $u(x) = -2(x + 1)^3 + x + 1$
II) $u(x) = -2(x - 1)^3 + x$
III) $u(x) = -2(x + 1)^3 + x + 2$

(2 BE)

b) **Begründen** Sie ohne weitere Berechnung, dass die Fläche, die der Graph der Funktion u im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt, genau zwei Flächeneinheiten beträgt. **(3 BE)**

c) **Bestätigen** Sie, dass sich an der Stelle $x = 1$ ein Wendepunkt der Funktion u befindet.

Zeichnen Sie in Abbildung 5.4 die Wendetangente **ein**. **(3 BE)**

d) Die Steigung der Tangente t am Wendepunkt hat die Gleichung $t(x) = x$.

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $A(1|5)$ von der Wendetangente von u. **(5 BE)**

Aufgabe 3. Lineare Algebra Lösung S. 109

1. Ein Unternehmen bietet in einer Stadt insgesamt 900 E-Scooter zum Ausleihen an. Das Stadtgebiet wurde in drei Bereiche A, B und C aufgeteilt. Die Nutzung der E-Scooter ist nur in diesen Bereichen möglich.
Die Verteilung der E-Scooter im Stadtgebiet kann durch Vektoren $\overrightarrow{v_n}$ der Form

$$\overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

beschrieben werden, wobei a, b und c die Anzahlen der E-Scooter in den Bereichen A, B bzw. C sind.
Die Entwicklung der Verteilung vom Ende eines Tages n zum Ende des nächsten Tages wird modellhaft durch die Gleichung

$$\overrightarrow{v_{n+1}} = M \cdot \overrightarrow{v_n}$$

mit

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

und $n \geq 0$ beschrieben.
Hierbei bezeichnet $\overrightarrow{v_0}$ die Verteilung der E-Scooter zu Beginn der Beobachtung.
Es ist zu Beginn der Beobachtung $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}$.

a) **Stellen** Sie die Entwicklung der Verteilung der E-Scooter vom Ende eines Tages bis zum Ende des nächsten Tages in einem Übergangsdiagramm **dar**. **(3 BE)**

b) Es gilt

$$M \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Wert von y und **geben** Sie seine Bedeutung im Sachzusammenhang **an**.

(2 BE)

c) Es gilt

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}43 & 0{,}22 & 0{,}31 \\ 0{,}39 & 0{,}61 & 0{,}39 \\ 0{,}18 & 0{,}18 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Verteilung der E-Scooter nach drei Tagen. **(2 BE)**

d) Am Ende eines Tages befindet sich ein Drittel der E-Scooter im Bereich *A*.

Ermitteln Sie, wie viele E-Scooter mindestens und wie viele E-Scooter höchstens am Ende des nächsten Tags im Bereich *A* zu erwarten sind. **(4 BE)**

e) In einer bestimmten Woche werden am Ende des Dienstags 20 % der E-Scooter, die sich im Bereich *C* befinden, zu Wartungszwecken entnommen und nach 48 Stunden in den Bereich *C* zurückgebracht. Der Vektor $\vec{d}$ beschreibt die Verteilung der E-Scooter am Ende des Dienstags direkt vor der Entnahme. Dieses Szenario wird durch den Vektor

$$\vec{g} = M \cdot \left(M \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{d} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \vec{d} \right)$$

beschrieben.

Erläutern Sie für

$$\vec{h} = M \cdot \left(M \cdot M \cdot \left(\vec{d} - 0{,}2 \cdot \vec{d} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \right)$$

ein mögliches Szenario im vorgegebenen Sachkontext. **(4 BE)**

Aufgabe 4. Analytische Geometrie Lösung S. 111

Gegeben sind das gerade Prisma *ABCDEF* mit den Eckpunkten

$$C\,(0|0|0),\ D\,(6|0|5),\ E\,(0|8|5) \text{ und } F\,(0|0|5)$$

sowie der Punkt $M\,(3|4|5)$ (siehe Abbildung 5.5).

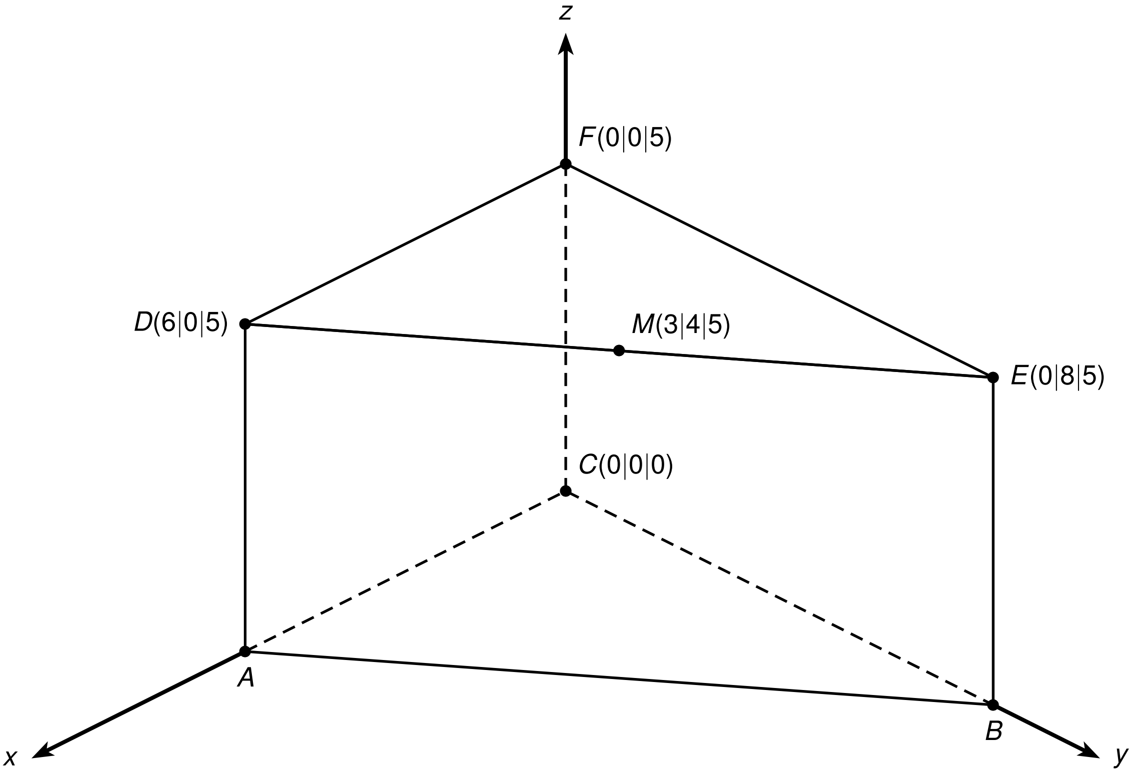


Abbildung 5.5

a) **Berechnen** Sie den Inhalt der Oberfläche des Prismas. **(4 BE)**

b) Die Ebene W enthält die Punkte M, F und $S\,(7{,}5|0|0)$ (siehe Abbildung 5.6).

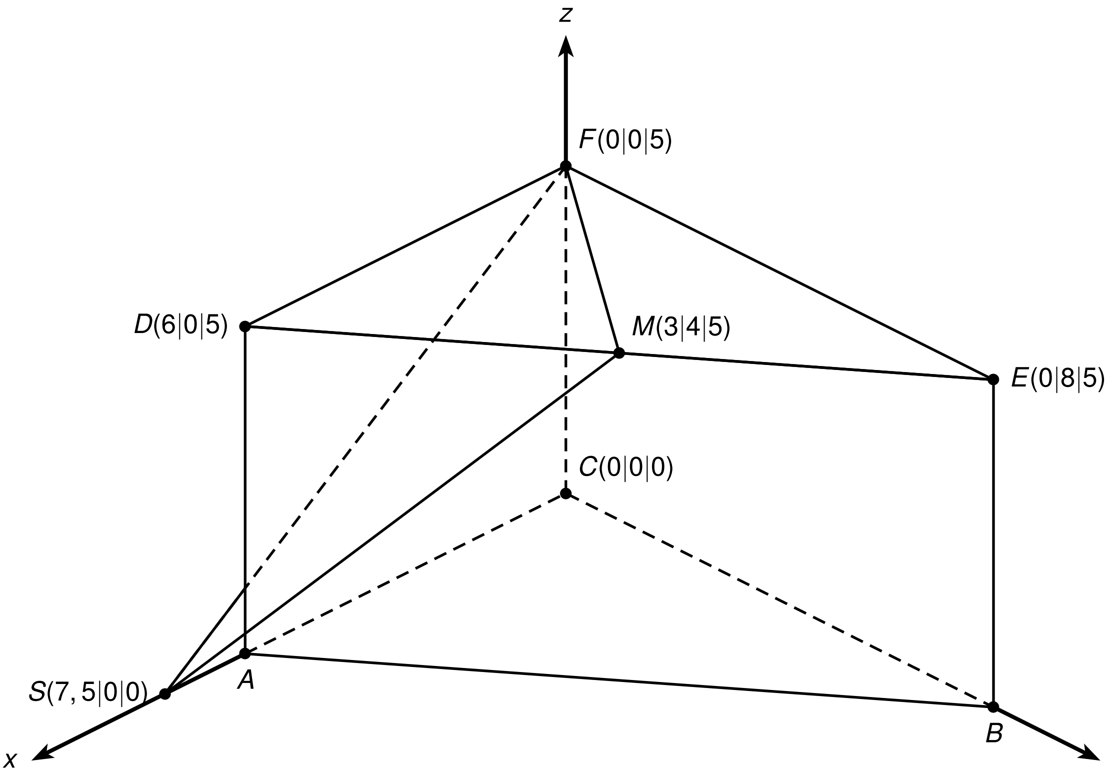


Abbildung 5.6

Bestimmen Sie eine Gleichung von W in Parameterform.

(Zur Kontrolle: $W : 4x - 3y + 6z = 30$ *in Koordinatenform)* **(2 BE)**

c) Im Folgenden sind zwei Schritte der Lösung einer Aufgabe angegeben, die im Zusammenhang mit den betrachteten geometrischen Objekten steht:

(1) $P\,(6|0|r)$ mit $0 \leq r \leq 5$

(2) $4 \cdot 6 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot r = 30$

Geben Sie eine passende Aufgabenstellung **an.** **(2 BE)**

Anstelle des Punktes S werden nun die Punkte

$$S_t\,(t|0|0)$$

mit $t \geq 0$ auf der x-Achse betrachtet.

d) **Bestimmen** Sie denjenigen Wert von t, für den das Dreieck MFS_t im Punkt M rechtwinklig ist. **(3 BE)**

e) Für $t = 0$ schneidet die Ebene durch die Punkte M, F und S_t das Prisma $ABCDEF$ in einem Vieleck.

Geben Sie begründet **an**, von welchem Typ dieses Vieleck ist. **(4 BE)**

Aufgabe 5. Stochastik Lösung S. 112

Hinweis: Zur Bearbeitung der folgenden Aufgabe kann nach Bedarf die Tabelle in der Anlage genutzt werden.

In den folgenden Aufgaben sollen die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden.

1. Eine umfassende Studie zu den Arbeits- und Lebensbedingungen von Studierenden einer Universität ergab, dass 56 % der Studierenden einen Laptop und 33 % einen Desktop-PC besitzen. 72 % der Studierenden haben mindestens eines dieser beiden Endgeräte.
Unter den Studierenden der Universität wird eine Person zufällig ausgewählt und zum Besitz von digitalen Endgeräten befragt. Folgende Ereignisse werden betrachtet:

L: Die Person besitzt einen Laptop.
D: Die Person besitzt einen Desktop-PC.

a) **Zeigen** Sie, dass

$$P\left(\overline{L} \cap \overline{D}\right) = 0{,}28$$

gilt, und **geben** Sie das zugrundeliegende Ereignis im Sachzusammenhang **an**. **(3 BE)**

b) **Stellen** Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel **dar**.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür **an**, dass die zufällig ausgewählte Person zwar einen Laptop, jedoch keinen Desktop-PC besitzt. **(4 BE)**

2. In derselben Studie wurde auch festgestellt, dass 68 % der Besitzer von Endgeräten bei einem Software-Problem versuchen, dieses selbstständig zu lösen.
Unter den Besitzern dieser Endgeräte werden 900 Personen zufällig ausgewählt.
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl derjenigen unter diesen 900 Personen, die versuchen, ein Software-Problem selbstständig zu lösen.
Dabei wird X als binomialverteilt angenommen.

Berechnen Sie den Erwartungswert μ von X und **ermitteln** Sie die kleinste mögliche natürliche Zahl k, sodass

$$P(\mu - k \leq X \leq \mu) \geq 30\ \%$$

gilt. **(4 BE)**

3. Für binomialverteilte Zufallsgrößen mit den Parametern $n = 15\,000$ und p ist in der Abbildung 5.7 die Standardabweichung σ in Abhängigkeit von p dargestellt.

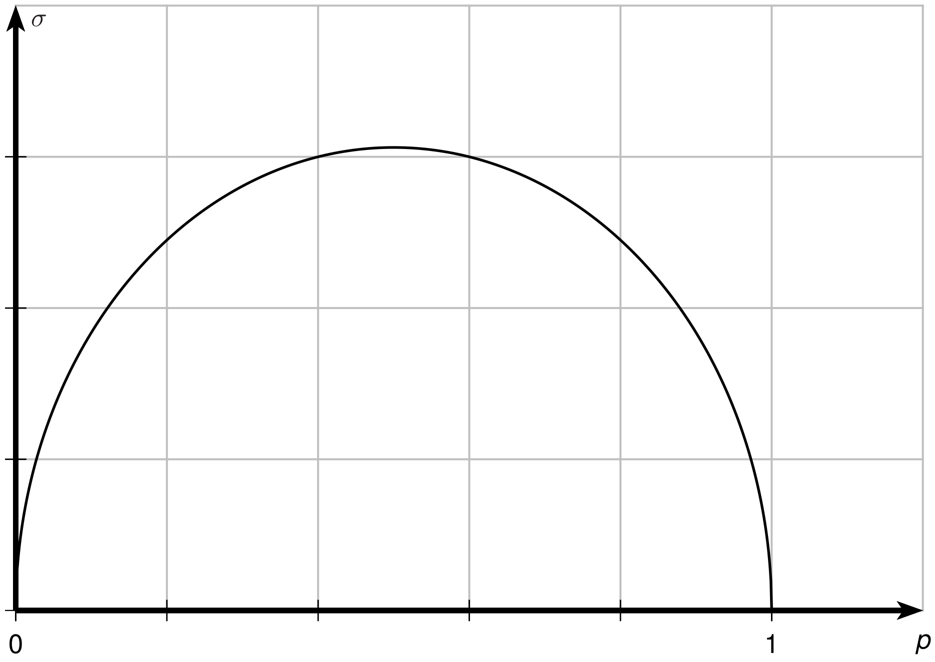


Abbildung 5.7

Ergänzen Sie im dargestellten Koordinatensystem die Skalierungen der σ-Achse und **erläutern** Sie Ihr Vorgehen. **(4 BE)**

Anlage zur Aufgabe „Stochastik“

k	$P(X \leq k)$		k	$P(X \leq k)$
570	0,0017		610	0,4556
571	0,0021		611	0,4840
572	0,0026		612	0,5125
573	0,0032		613	0,5410
574	0,0040		614	0,5693
575	0,0049		615	0,5972
576	0,0059		616	0,6246
577	0,0072		617	0,6515
578	0,0088		618	0,6776
579	0,0106		619	0,7029
580	0,0127		620	0,7273
581	0,0152		621	0,7506
582	0,0181		622	0,7729
583	0,0215		623	0,7940
584	0,0254		624	0,8139
585	0,0298		625	0,8326
586	0,0349		626	0,8500
587	0,0407		627	0,8662
588	0,0473		628	0,8812
589	0,0546		629	0,8949
590	0,0629		630	0,9075
591	0,0721		631	0,9189
592	0,0823		632	0,9292
593	0,0936		633	0,9385
594	0,1060		634	0,9468
595	0,1195		635	0,9543
596	0,1342		636	0,9608
597	0,1501		637	0,9666
598	0,1673		638	0,9716
599	0,1856		639	0,9760
600	0,2052		640	0,9799
601	0,2260		641	0,9832
602	0,2479		642	0,9860
603	0,2709		643	0,9884
604	0,2950		644	0,9904
605	0,3200		645	0,9922
606	0,3458		646	0,9936
607	0,3724		647	0,9948
608	0,3997		648	0,9958
609	0,4275		649	0,9966

Tabelle 5.1: *Summierte Binomialverteilung* $P(X \leq k)$ *für* $n = 900$ *und* $p = 0{,}68$.

5.2 Modulares Mathematiksystem (MMS)

Aufgabe 6. Analysis 1 Lösung S. 114

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit

$$f(x) = \frac{3}{1\,000} \cdot x^4 - \frac{8}{100} \cdot x^3 + \frac{6}{10} \cdot x^2.$$

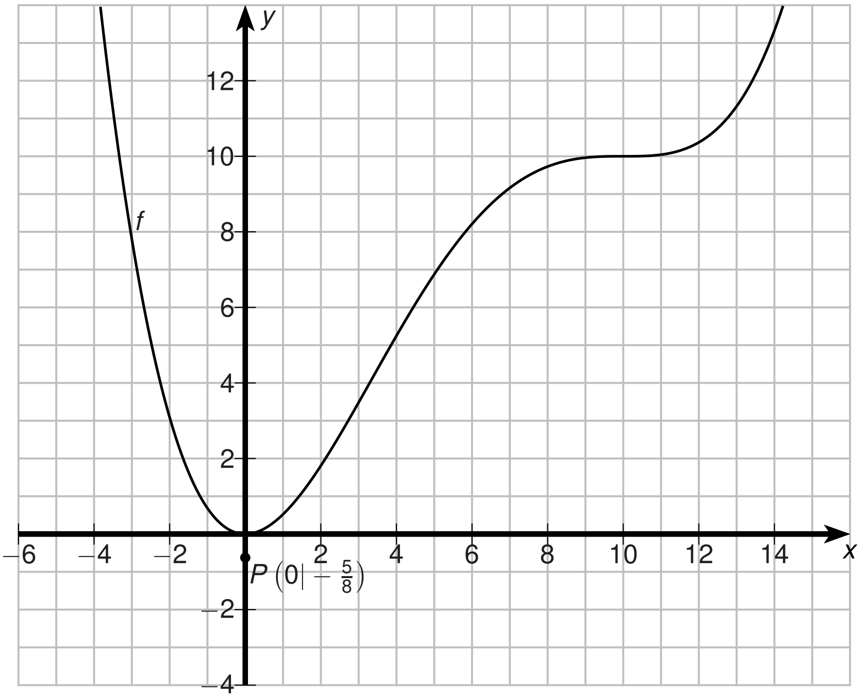


Abbildung 5.8

Abbildung 5.8 zeigt den Graphen von f sowie den Punkt $P\left(0\middle|-\frac{5}{8}\right)$.

a) Der Graph von f besitzt den Tiefpunkt $(0|0)$.

Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von f keine weiteren Extrempunkte besitzt.

(3 BE)

Die Gerade durch die Punkte P und $Q\left(-\frac{1}{4}\middle|-1\right)$ wird mit t bezeichnet.

b) **Ermitteln** Sie eine Gleichung von t und **weisen** Sie rechnerisch **nach**, dass t die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(5|f(5))$ ist.

(Zur Kontrolle: Gleichung von t: $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}$*)* **(4 BE)**

c) Der Graph von f und die Tangente t schließen eine Fläche ein, die aus zwei Flächenstücken besteht.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. **(5 BE)**

d) Der Graph der reellen Funktion g mit

$$g(x) = a \cdot f(b \cdot x) \qquad a, b \in \mathbb{R}^+$$

kann aus dem Graphen von f erzeugt werden.

Geben Sie in diesem Zusammenhang die Bedeutung von a **an.**

Durch die Transformation von f zu g wird aus dem Punkt (10|10) auf dem Graphen von f der Punkt (12|12) auf dem Graphen von g.

Bestimmen Sie den Wert von a. **(3 BE)**

2. Zwei Radfahrer starten gleichzeitig nebeneinander auf einer geradlinigen Bahn aus einer Ruheposition. Radfahrer *A* beschleunigt 10 Sekunden lang und fährt danach mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Radfahrer *B* beschleunigt 12 Sekunden lang und fährt dann mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

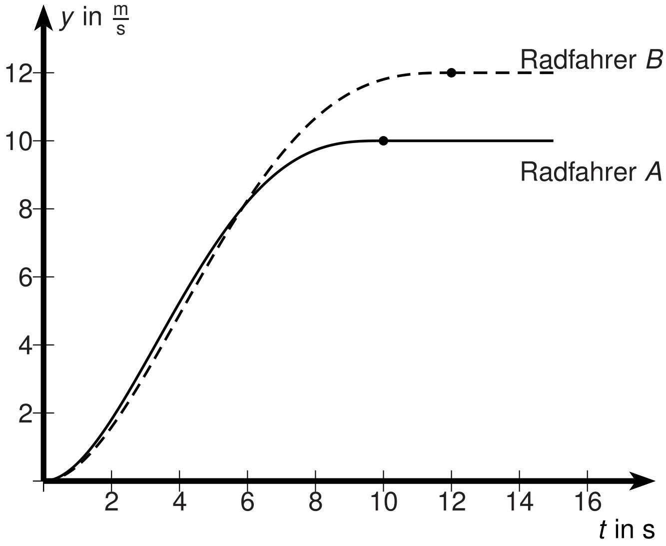


Abbildung 5.9

Abbildung 5.9 stellt die Geschwindigkeitsverläufe der beiden Radfahrer in den ersten 15 Sekunden nach dem Start dar.

Dabei wird der Geschwindigkeitsverlauf von Radfahrer A in den ersten 10 Sekunden nach dem Start durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit

$$f(t) = \frac{3}{1\,000} \cdot t^4 - \frac{8}{100} \cdot t^3 + \frac{6}{10} \cdot t^2$$

beschrieben. Der Geschwindigkeitsverlauf von Radfahrer B wird in den ersten 12 Sekunden nach dem Start durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit

$$h(t) = \frac{1}{576} \cdot t^4 - \frac{1}{18} \cdot t^3 + \frac{1}{2} \cdot t^2$$

beschrieben. Dabei ist t die seit dem Start vergangene Zeit in Sekunden und $f(t)$ bzw. $h(t)$ die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde.

a) **Berechnen** Sie die Geschwindigkeit von Radfahrer A drei Sekunden nach dem Start sowie den Zeitpunkt, zu dem er eine Geschwindigkeit von 8 Meter pro Sekunde erreicht. **(3 BE)**

b) **Ermitteln** Sie die konstante Geschwindigkeit, mit der sich Radfahrer B ab dem Zeitpunkt 12 Sekunden nach dem Start bewegt.

Zeigen Sie durch Rechnung, dass der zum Radfahrer B gehörende Graph in Abbildung 5.9 an der Stelle 12 keinen Knick aufweist. **(3 BE)**

c) Es gibt genau einen Zeitpunkt in den ersten 10 Sekunden nach dem Start, zu dem einer der beiden Radfahrer den anderen überholt.

Berechnen Sie, um wieviel Prozent die Geschwindigkeit des schnelleren Radfahrers die Geschwindigkeit des langsameren Radfahrers zum Zeitpunkt des Überholens übersteigt. **(4 BE)**

Aufgabe 7. Analysis 2 Lösung S. 116

1. Bei einer Algenkultur wird das Wachstum für 54 Stunden beobachtet. Die Wachstumsgeschwindigkeit der Algen wird durch die reelle Funktion f mit

$$f(t) = \frac{1}{100} \cdot (t - 50) \cdot (t - 40) \cdot e^{\frac{t}{5}}$$

beschrieben (siehe Abbildung 5.10).

Dabei ist t die Zeit nach Beobachtungsbeginn in Stunden und $f(t)$ gibt die Wachstumsgeschwindigkeit in Algen pro Stunde an.

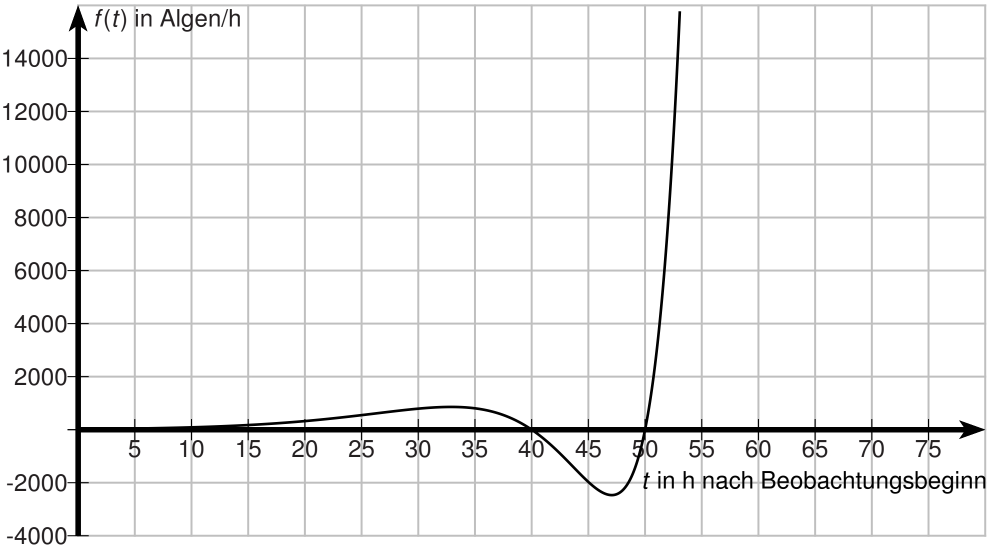


Abbildung 5.10

a) **Berechnen** Sie alle Zeitpunkte, an denen stündlich 100 Algen hinzukommen. **(2 BE)**

b) **Interpretieren** Sie anhand des Graphen die Bedeutung der Zeitpunkte $t = 40$ und $t = 50$ für die Anzahl der Algen.

Begründen Sie Ihre Aussagen. **(3 BE)**

c) **Bestätigen** Sie, dass die Funktion F mit

$$F(t) = \left(0{,}05t^2 - 5t + 125\right) \cdot e^{\frac{t}{5}} + 1$$

eine Stammfunktion von f ist. **(2 BE)**

d) **Berechnen** Sie, wie viele Algen 10 Stunden nach Beobachtungsbeginn hinzugekommen sind. **(3 BE)**

2. Gegeben ist die ganzrationale Funktion u mit

$$u(x) = -2x^3 + 6x^2 - 5x + 2$$

und der Punkt $A(1\,|5)$ (siehe Abbildung 5.11).

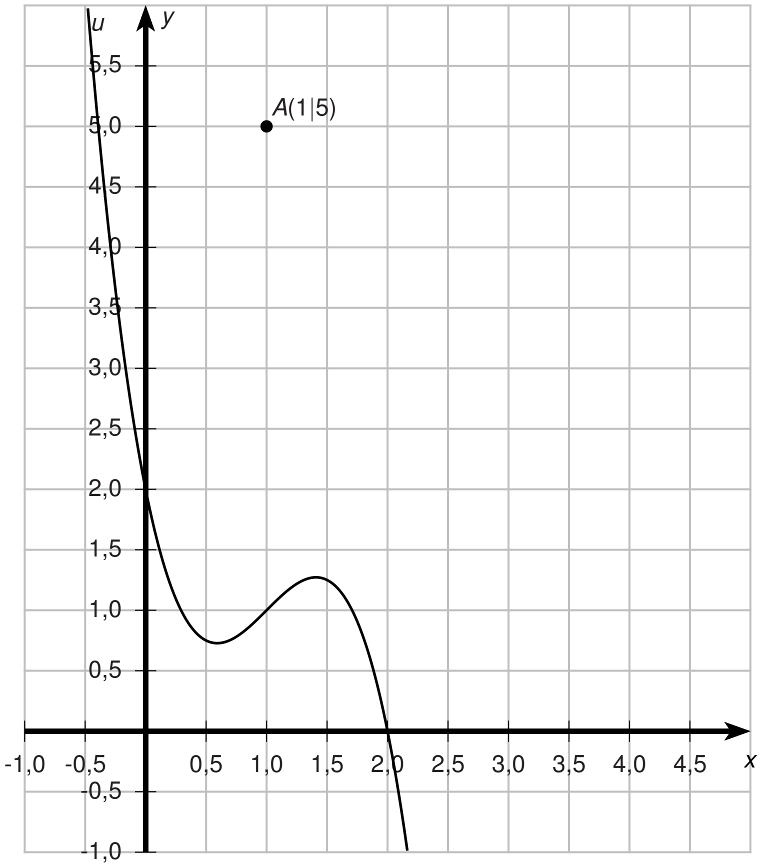


Abbildung 5.11

Die Funktion u ist durch geeignete Verschiebungen aus der Funktion v mit

$$v(x) = -2x^3 + x$$

hervorgegangen, die punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

a) **Geben** Sie **an**, welche der folgenden Funktionsgleichungen für u richtig ist:

I) $u(x) = -2(x+1)^3 + x + 1$
II) $u(x) = -2(x-1)^3 + x$
III) $u(x) = -2(x+1)^3 + x + 2$

(2 BE)

b) **Begründen** Sie ohne weitere Berechnung, dass die Fläche, die der Graph der Funktion u im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt, genau zwei Flächeneinheiten beträgt.

(3 BE)

c) **Bestimmen** Sie den Wendepunkt der Funktion u.

Zeichnen Sie in Abbildung 5.11 die Wendetangente **ein**. **(3 BE)**

d) **Bestimmen** Sie den Abstand des Punktes $A(1\,|5)$ von der Wendetangente von u.

Geben Sie **an**, wie die Funktion u längs der x-Achse verschoben werden muss, damit der Abstand Null beträgt. **(7 BE)**

Aufgabe 8. Lineare Algebra Lösung S. 119

Bei einer Insektenart verläuft die Entwicklung eines Insekts in vier Stadien: Aus einem Ei entwickelt sich über ein erstes und ein zweites Larvenstadium ein ausgewachsenes Insekt. Die Zusammensetzung einer Population dieser Insektenart kann durch Vektoren $\overrightarrow{v_n}$ der Form

$$\overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} E \\ L_1 \\ L_2 \\ A \end{pmatrix}$$

dargestellt werden, wobei E die Anzahl der Eier, L_1 die Anzahl der Larven des ersten Larvenstadiums, L_2 die Anzahl der Larven des zweiten Larvenstadiums und A die Anzahl der ausgewachsenen Insekten ist. Die Entwicklung einer solchen Population von einer Woche n zur nächsten wird modellhaft durch die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+1}} = M \cdot \overrightarrow{v_n}$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

a) **Stellen** Sie die beschriebene Entwicklung der Population in einem Übergangsdiagramm **dar**.

(3 BE)

b) Unter den Larven des ersten Larvenstadiums gibt es solche, die das zweite Larvenstadium nicht erreichen.

Geben Sie deren prozentualen Anteil unter allen Larven des ersten Larvenstadiums **an** und **begründen** Sie Ihre Angabe. **(2 BE)**

Zu Beginn der Beobachtung beträgt die Größe der Population, d. h. die Summe der Anzahlen der Eier, Larven und ausgewachsenen Insekten, 8 500. Zwei Wochen nach Beobachtungsbeginn wird die Zusammensetzung der Population durch

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 16\,000 \\ 24\,000 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$$

dargestellt.

c) **Bestimmen** Sie, die Größe der Population vier Wochen nach Beobachtungsbeginn. **(2 BE)**

d) Die Größe der Population reduziert sich im Abstand von vier Wochen jeweils um denselben Faktor.

Bestimmen Sie einen Term, mit dem die Größe der Population ausgehend vom Beobachtungsbeginn für Zeitpunkte im Abstand von jeweils vier Wochen berechnet werden kann.

(3 BE)

e) Um das Überleben der Population zu sichern, werden Maßnahmen ergriffen, die ausschließlich die Überlebensraten der Larven beeinflussen.

Untersuchen Sie, wie groß die Überlebensrate y der Larven des zweiten Larvenstadiums in Abhängigkeit von der Überlebensrate x der Larven des ersten Larvenstadiums sein müsste, damit sich die Größe der Population dauerhaft im Abstand von jeweils vier Wochen wiederholt.

Geben Sie für diesen Fall alle möglichen Werte von y **an**. **(5 BE)**

Aufgabe 9. Analytische Geometrie Lösung S. 121

Abbildung 5.12 zeigt die Pyramide *ABCDS* mit

$$A\,(0|0|0),\ B\,(2|0|0),\ C\,(2|2|0),\ D\,(0|4|0) \text{ und } S\,(0|0|3{,}5).$$

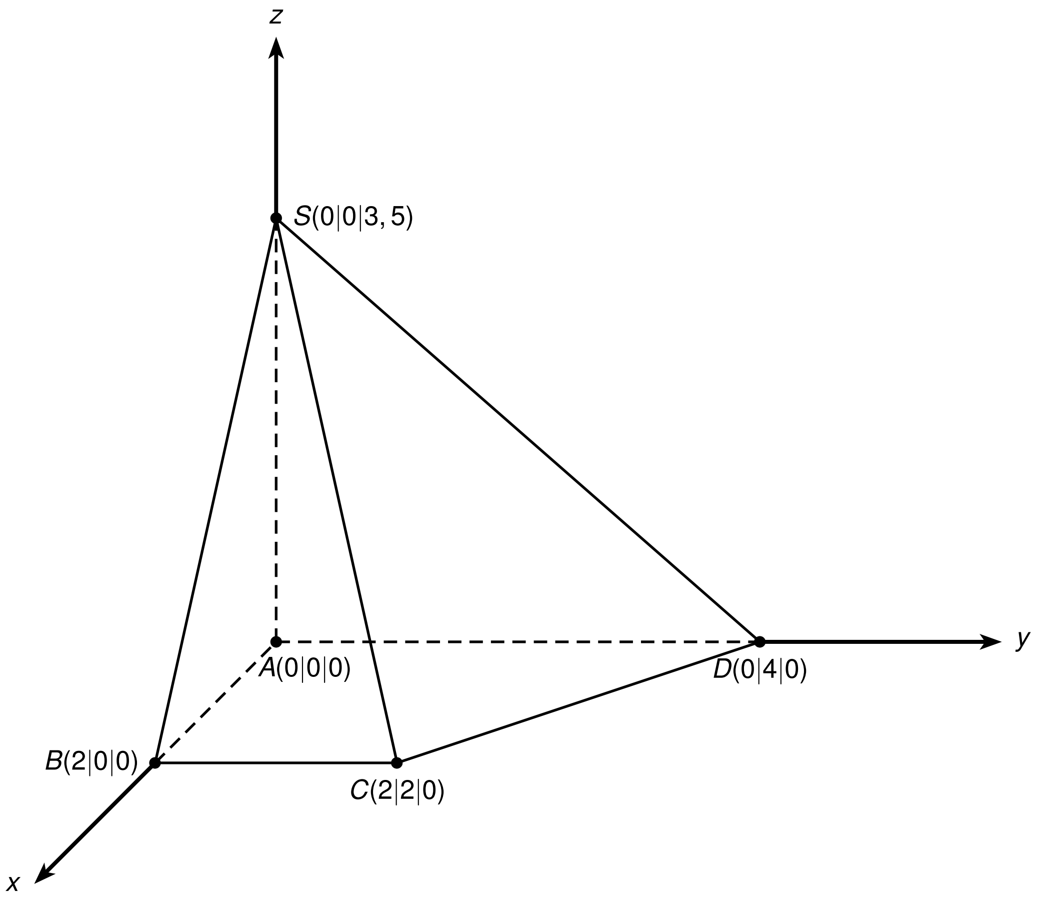


Abbildung 5.12

a) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide. **(3 BE)**

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck *CDS* rechtwinklig ist. **(2 BE)**

Die Seitenfläche *CDS* der Pyramide liegt in der Ebene *E*.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung von *E* in Koordinatenform.

(Zur Kontrolle: $7x + 7y + 8z = 28$*)* **(3 BE)**

d) **Berechnen** Sie die Größe des Winkels zwischen der Ebene E und der Ebene F, in der die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt. **(3 BE)**

e) Betrachtet werden die Würfel, von denen drei Seitenflächen in den drei Koordinatenebenen liegen. Abbildung 5.13 zeigt einen dieser Würfel. Unter diesen Würfeln gibt es einen, bei dem ein Eckpunkt auf der Kante $\overline{CS}$ der Pyramide liegt.

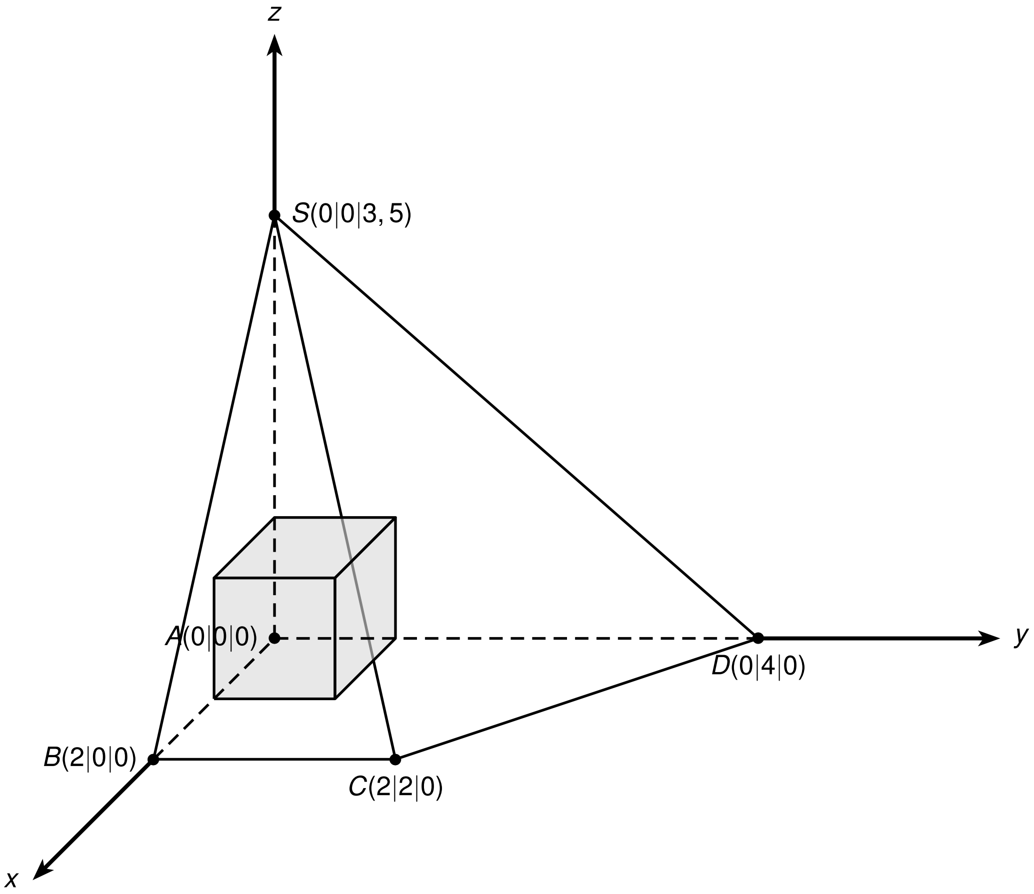


Abbildung 5.13

Berechnen Sie die Kantenlänge dieses Würfels und **begründen** Sie, dass kein Punkt dieses Würfels außerhalb der Pyramide liegt. **(4 BE)**

Aufgabe 10. Stochastik Lösung S. 122

Hinweis: In den folgenden Aufgaben sollen die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden.

1. Eine umfassende Studie zu den Arbeits- und Lebensbedingungen von Studierenden einer Universität ergab, dass 56 % der Studierenden einen Laptop und 33 % einen Desktop-PC besitzen. 72 % der Studierenden haben mindestens eines dieser beiden Endgeräte.
Unter den Studierenden der Universität wird eine Person zufällig ausgewählt und zum Besitz von digitalen Endgeräten befragt. Folgende Ereignisse werden betrachtet:

L: Die Person besitzt einen Laptop.
D: Die Person besitzt einen Desktop-PC.

a) **Zeigen** Sie, dass

$$P\left(\overline{L}\cap\overline{D}\right) = 0{,}28$$

gilt, und **geben** Sie das zugrundeliegende Ereignis im Sachzusammenhang **an**. **(3 BE)**

b) **Stellen** Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel **dar**.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür **an**, dass die zufällig ausgewählte Person zwar einen Laptop, jedoch keinen Desktop-PC besitzt. **(4 BE)**

2. In derselben Studie wurde auch festgestellt, dass 68 % der Besitzer von Endgeräten bei einem Software-Problem versuchen, dieses selbstständig zu lösen.
Unter den Besitzern dieser Endgeräte werden 900 Personen zufällig ausgewählt.
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl derjenigen unter diesen 900 Personen, die versuchen, ein Software-Problem selbstständig zu lösen.
Dabei wird X als binomialverteilt angenommen.

Berechnen Sie den Erwartungswert μ von X und **ermitteln** Sie die kleinste mögliche natürliche Zahl k, sodass

$$P(\mu - k \leq X \leq \mu) \geq 30\ \%$$

gilt. **(4 BE)**

3. Für binomialverteilte Zufallsgrößen mit den Parametern $n = 15\,000$ und p ist in der Abbildung 5.14 die Standardabweichung σ in Abhängigkeit von p dargestellt.

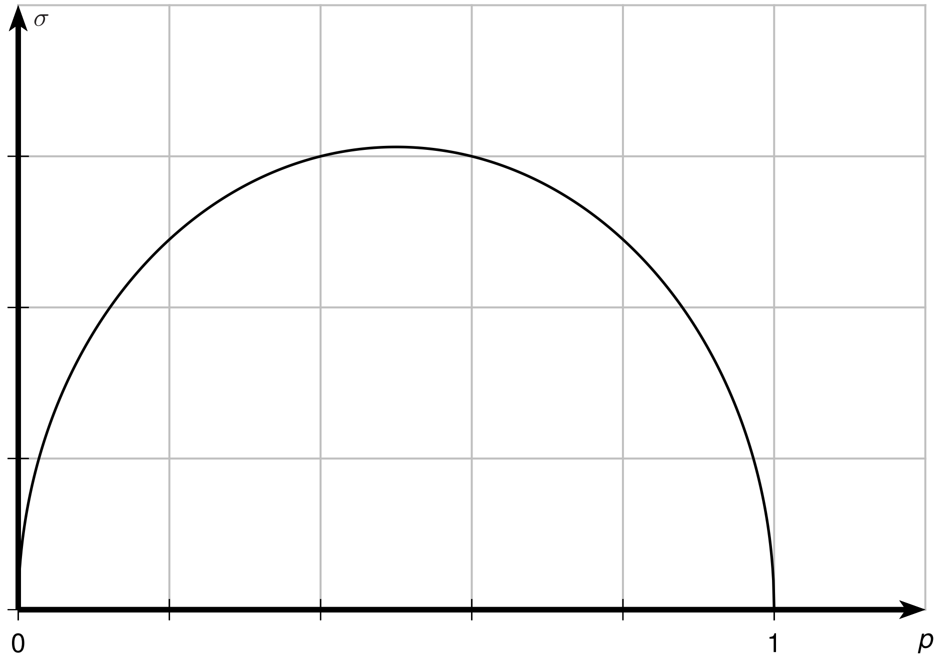


Abbildung 5.14

Ergänzen Sie im dargestellten Koordinatensystem die Skalierungen der y-Achse und **erläutern** Sie Ihr Vorgehen. **(4 BE)**

6 Erhöhtes Anforderungsniveau

6.1 wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR)

Aufgabe 11. Analysis 1 Lösung S. 124

1. Die Leitung eines großen Unternehmens versendet an jedem Arbeitstag um 7:00 Uhr eine E-Mail mit tagesaktuellen Informationen an alle Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter. Diese wurden gebeten, nach dem Lesen der E-Mail eine Lesebestätigung zu versenden.
Auf der Grundlage der über viele Tage erfassten Lesebestätigungen wurde mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen u und v mit

$$\begin{aligned} u(x) &= 100x^3 - 900x^2 + 2\,300x \quad \text{und} \\ v(x) &= 20x^2 - 520x + 2\,880 \end{aligned}$$

die Funktion k entwickelt mit:

$$k(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } 0 \leq x < 3 \\ v(x) & \text{für } 3 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Die Funktion k beschreibt modellhaft für einen Zeitraum von acht Stunden eines Arbeitstages die zeitliche Entwicklung der momentanen Änderungsrate der Anzahl der eingegangenen Lesebestätigungen. Dabei ist x die seit 7:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $k(x)$ die momentane Änderungsrate der Anzahl der seit 7:00 Uhr eingegangenen Lesebestätigungen in der Einheit $^1/_\text{h}$.

a) **Berechnen** Sie $k(2)$ und **interpretieren** Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. **(3 BE)**

b) Es gilt

$$v(x) = 20 \cdot (x - 18) \cdot (x - 8)\,.$$

Begründen Sie, dass die Funktion v nicht geeignet ist, die momentane Änderungsrate auch für den Zeitraum nach 15:00 Uhr zu beschreiben. **(3 BE)**

c) **Berechnen** Sie mithilfe der Funktion k die Anzahl der im Zeitraum von 10:00 Uhr bis 15:00 Uhr eines Arbeitstages eingegangenen Lesebestätigungen. **(4 BE)**

2. Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_{a;b}$ mit

$$f_{a;b}(x) = ax^3 - bx$$

mit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Die Abbildung 6.1 zeigt den Graphen einer der Funktionen der Schar.

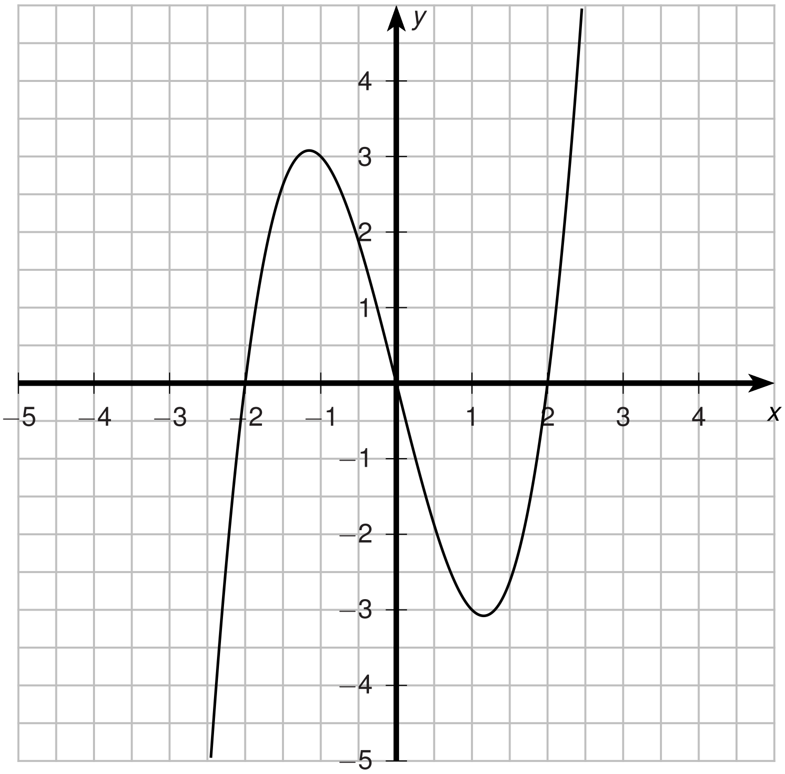


Abbildung 6.1

a) **Beweisen** Sie, dass jeder Graph der Schar $f_{a;b}$ symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. **(4 BE)**

b) **Bestimmen** Sie die von a und b abhängige x-Koordinate der Tiefpunkte der Graphen von $f_{a;b}$. **(3 BE)**

c) Es gibt eine Funktion der Schar, die bei $x = 3$ eine Nullstelle hat und deren Graph im vierten Quadranten mit der x-Achse ein Flächenstück mit dem Inhalt 40,5 einschließt.

Geben Sie die genannten Bedingungen in Form einer mathematischen Gleichung **an**. Die Lösung einer der beiden Gleichungen hat das Ergebnis $b = 9a$.

Berechnen Sie a und b. **(5 BE)**

Die Funktion der Schar, deren Graph in der Abbildung 6.1 dargestellt ist, wird mit f bezeichnet; ihr Funktionsterm ist

$$f(x) = x^3 - 4x.$$

d) Die Tangente t an den Graphen von f im Punkt $A(2|0)$, die x-Achse und die Gerade g mit

$$g(x) = -x - 2$$

schließen ein Dreieck ein.

Beschreiben Sie, wie man die Fläche dieses Dreiecks bestimmen könnte. Veranschaulichen Sie Ihre Lösung. **(4 BE)**

e) **Begründen** Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Ist P ein beliebiger Punkt auf dem Graphen von f, so liegt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von P und dem Koordinatenursprung auf dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit

$$h(x) = 4x^3 - 4x.$$

(4 BE)

Aufgabe 12. Analysis 2 Lösung S. 127

1. Bei einer Algenkultur wird das Wachstum für 54 Stunden beobachtet. Die Wachstumsgeschwindigkeit der Algen wird durch die reelle Funktion *f* mit

$$f(t) = \frac{1}{100} \cdot (t - 50) \cdot (t - 40) \cdot e^{\frac{t}{5}}$$

beschrieben (siehe Abbildung 6.2).
Dabei ist *t* die Zeit nach Beobachtungsbeginn in Stunden und $f(t)$ gibt die Wachstumsgeschwindigkeit in Algen pro Stunde an.

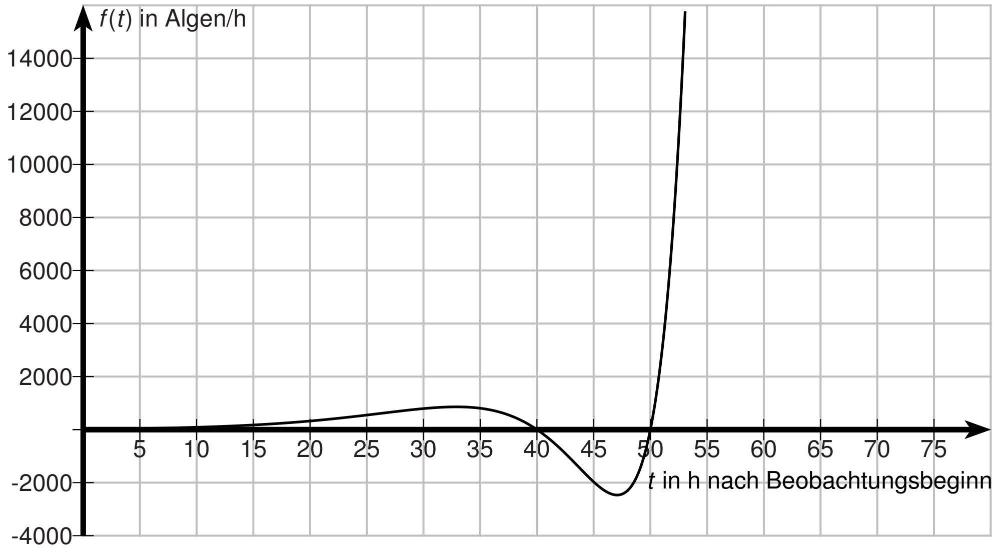


Abbildung 6.2

a) **Berechnen** Sie die Wachstumsgeschwindigkeit der Algen 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

(3 BE)

b) **Bestätigen** Sie, dass die Funktion *F* mit

$$F(t) = \left(0{,}05t^2 - 5t + 125\right) \cdot e^{\frac{t}{5}} + 1$$

eine Stammfunktion von *f* ist. **(3 BE)**

c) **Bestimmen** Sie den Zeitpunkt, an dem der Algenbestand am stärksten abnimmt.

Berechnen Sie die Abnahmegeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt. **(4 BE)**

d) Es gilt:

$$\int_{0}^{50} f(t)\,\mathrm{d}t = -125$$

Untersuchen Sie die Bedeutung dieser Gleichung im Sachkontext. **(2 BE)**

2. Gegeben ist die ganzrationale Funktion u mit

$$u(x) = -2x^3 + 6x^2 - 5x + 2$$

und der Punkt $A(1\,|5)$ (siehe Abbildung 6.3).

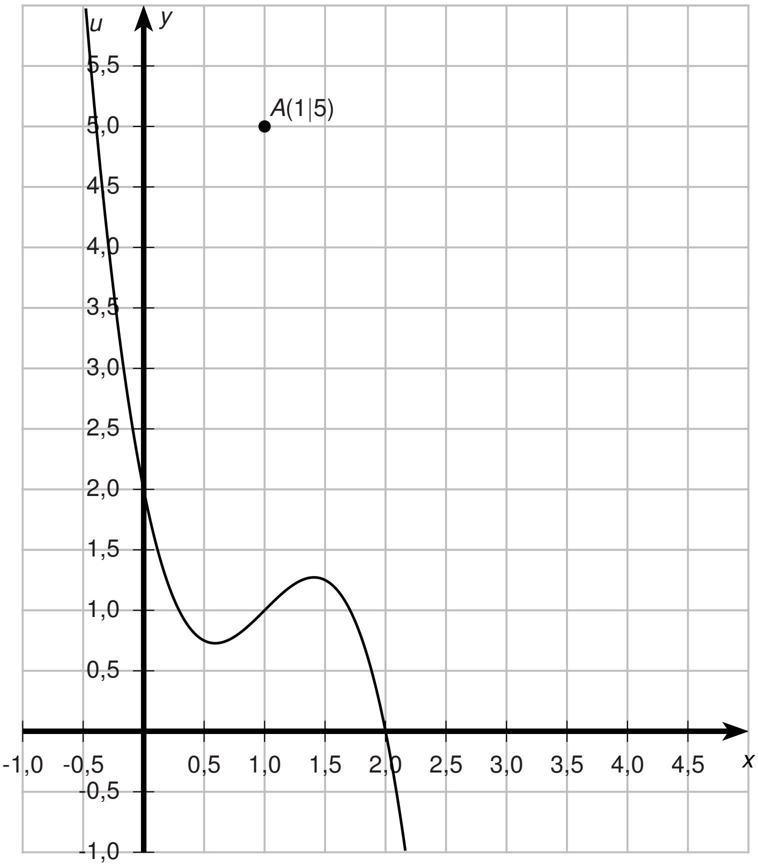


Abbildung 6.3

Die Funktion u ist durch geeignete Verschiebungen aus der Funktion v mit

$$v(x) = -2x^3 + x$$

hervorgegangen, die punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

a) **Geben** Sie **an**, welche der folgenden Funktionsgleichungen für u richtig ist und **erläutern** Sie für eine anderen Funktion, warum diese nicht geeignet ist.

I) $u(x) = -2(x+1)^3 + x + 1$
II) $u(x) = -2(x-1)^3 + x$
III) $u(x) = -2(x-1)^3 + x + 1$
IV) $u(x) = -2(x+1)^3 + x + 2$

(3 BE)

b) **Begründen** Sie ohne weitere Berechnung, dass die Fläche, die der Graph der Funktion u im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt, genau zwei Flächeneinheiten beträgt. **(3 BE)**

c) **Bestimmen** Sie, den Wendepunkt der Funktion u.

Zeichnen Sie in Abbildung 6.3 die Wendetangente **ein**. **(5 BE)**

d) **Bestimmen** Sie den Abstand des Punktes $A(1\,|5)$ von der Wendetangente von u.

Geben Sie **an**, wie die Funktion u längs der x-Achse verschoben werden muss, damit der Abstand Null beträgt. **(7 BE)**

Aufgabe 13. Lineare Algebra Lösung S. 130

1. Betrachtet wird die Entwicklung einer Population von Tieren. Die Zusammensetzung der Population kann durch Vektoren $\overrightarrow{v_n}$ der Form

$$\overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} J \\ M \\ A \end{pmatrix}$$

dargestellt werden, dabei ist J die Anzahl der jungen Tiere (bis ein Jahr alt), M die Anzahl der mittelalten Tiere (mehr als ein Jahr bis zwei Jahre alt) und A die Anzahl der alten Tiere (mehr als zwei Jahre alt).
Die Entwicklung der Population von einem Jahr n zum nächsten lässt sich für $k \geq 0$ modellhaft durch die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} k & 0{,}4 & 0{,}05 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

und die Gleichung

$$\overrightarrow{v_{n+1}} = P \cdot \overrightarrow{v_n}$$

beschreiben.

a) **Stellen** Sie die Entwicklung der Population in einem Übergangsdiagramm **dar**. **(3 BE)**

b) Die Population besteht zu Beginn der Beobachtung ausschließlich aus 200 jungen Tieren. Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn beträgt die Anzahl der jungen Tiere 66.

Ermitteln Sie den Wert von k. **(4 BE)**

c) Die Entwicklung einer anderen Population der oben beschriebenen Tierart kann von einem Jahr n zum nächsten mithilfe der Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Für diese Entwicklung gilt:

Die Größe der Gesamtpopulation sinkt von einem Jahr zum nächsten um 10 %.

Bestimmen Sie, wie viele Jahre nach Beobachtungsbeginn die Größe der Population, d. h. die Summe der Anzahlen der Tiere jeden Alters, erstmals auf unter 20 % ihres Werts zu Beobachtungsbeginn gesunken ist. **(5 BE)**

2. Die Abbildung 6.4 zeigt das Dreieck ABC mit

$$A\,(0|0|0),\ B\,(-3|-4|0) \text{ und } C\,(0|0|12).$$

Der Umfang des Dreiecks beträgt 30.

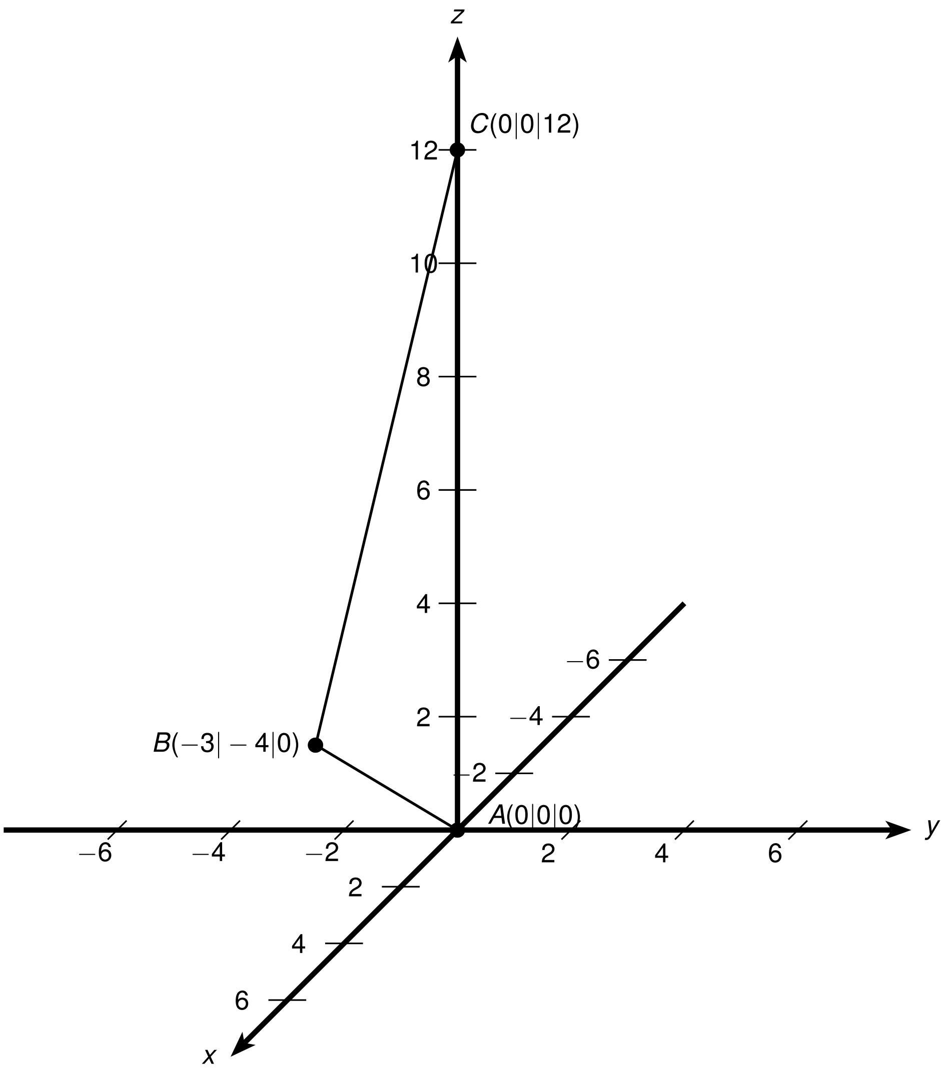


Abbildung 6.4

a) **Begründen** Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist. **(2 BE)**

b) Der Umfang des Dreiecks ABC^* mit $C^*\,(0|0|z)$ und $z > 0$ ist halb so groß wie der Umfang des Dreiecks ABC.

Bestimmen Sie die z-Koordinate von C^*. **(5 BE)**

c) Das Dreieck ABC wird um die Seite $\overline{AC}$ gedreht. Dabei entstehen Dreiecke AB^*C.

Geben Sie einen Punkt B^* **an**, bei dem eine der Koordinaten den Wert 3 hat. **(1 BE)**

Aufgabe 14. Analytische Geometrie Lösung S. 132

Abbildung 6.5 zeigt die Pyramide *ABCDS* mit den Eckpunkten

$$A\,(-3|-3|0),\ B\,(3|-3|0),\ C\,(3|3|0),\ D\,(-3|3|0) \text{ und } S\,(0|0|4)$$

sowie den Punkt $O\,(0|0|0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt.

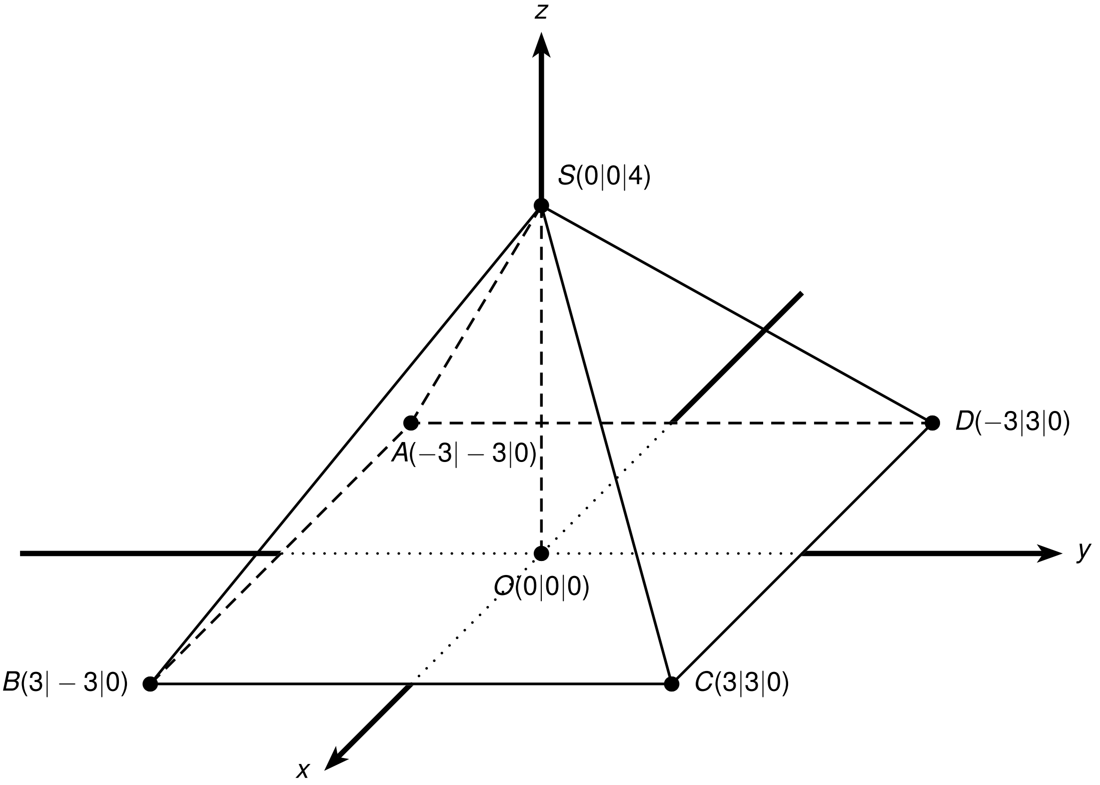


Abbildung 6.5

a) **Berechnen** Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide. **(4 BE)**

b) Genau eine der folgenden Gleichungen 1. bis 3. beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide.

Geben Sie diese Gleichung **an** und **begründen** Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist.

1. $x - z = 0$
2. $x + y + z = 4$
3. $x + y = 0$

(3 BE)

c) Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E.

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(Zur Kontrolle: $4y + 3z = 12$*)* **(3 BE)**

d) Es gibt einen Punkt $P\,(0|0|p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat.

Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen:

I. $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

II. $4 \cdot 4t + 3 \cdot (p + 3t) = 12$

III. $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = p$

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen. **(5 BE)**

Die Ebene $E : 4y + 3z = 12$ gehört zur Schar der Ebenen

$$E_k : 4k \cdot x + \; 4\sqrt{1 - k^2} \cdot y + 3 \cdot z = 12$$

mit $k \in [-1\,;1]$. Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1.

e) **Zeigen** Sie, dass der Punkt $S(0|0|4)$ in allen Ebenen der Schar enthalten ist. **(1 BE)**

f) **Weisen** Sie **nach**, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist. **(4 BE)**

Aufgabe 15. Stochastik Lösung S. 134

Hinweis: Zur Bearbeitung der folgenden Aufgabe können nach Bedarf die Tabellen in der Anlage genutzt werden.
In den folgenden Aufgaben sollen die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden.

Ein bekannter Video-Streamingdienst bietet einen kostenpflichtigen Zugang zu Spielfilmen und Serien an. Personen, die davon gegen Zahlung einer monatlichen Gebühr Gebrauch machen, werden im Folgenden als Abonnenten bezeichnet. Sie haben sich entweder für das Spielfilmpaket oder für das Komplettpaket entschieden, das neben den Spielfilmen auch noch Serien enthält.

1. Unter den Abonnenten sind 70 % höchstens 40 Jahre alt. Von diesen haben 80 % das Komplettpaket gewählt.
Unter denjenigen Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind, haben sich 50 % für das Komplettpaket entschieden.

a) **Stellen** Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm **dar**. **(4 BE)**

b) Eine unter allen Abonnenten zufällig ausgewählte Person hat sich für das Komplettpaket entschieden.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie höchstens 40 Jahre alt ist. **(2 BE)**

c) **Bestimmen** Sie die Anzahl der Abonnenten, die man mindestens zufällig auswählen müsste, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mehr als fünf Personen älter als 40 Jahre sind. **(4 BE)**

2. Der Anteil der zufriedenen Abonnenten von derzeit 60 % soll gesteigert werden. Dazu wird ein Algorithmus entwickelt, der jedem Abonnenten täglich individuell einen Spielfilm vorschlägt. Als Basis für die Entscheidung über den dauerhaften Einsatz des Algorithmus plant das Management einen Probebetrieb. Im Anschluss soll die Nullhypothese

Der Anteil der zufriedenen Abonnenten beträgt höchstens 60 %.

mithilfe einer Stichprobe von 200 zufällig ausgewählten Abonnenten auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

a) Das Management möchte vermeiden, dass der Algorithmus eingesetzt wird, obwohl dadurch die Zufriedenheit unter den Abonnenten nicht erhöht wird.

Entscheiden Sie begründet, ob die angegebene Nullhypothese dafür geeignet ist.

(2 BE)

Für den beschriebenen Test ergibt sich $\{132; 133; ...; 200\}$ als Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

b) Zur Bestimmung der unteren Grenze dieses Ablehnungsbereichs wurden zunächst folgende Lösungsschritte ausgeführt:

- Y: Anzahl der zufriedenen Abonnenten in der Stichprobe
- $P_{0,6}^{200}(Y \geq 132) \approx 0,047$

Begründen Sie, dass die beiden Lösungsschritte zur Bestimmung der unteren Grenze nicht ausreichend sind, und **ergänzen** Sie diese geeignet. **(4 BE)**

c) **Bestimmen** Sie, bei welchen Wahrscheinlichkeiten für die Zufriedenheit der Abonnenten die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zweiter Art kleiner als 90 % ist.
Hinweis: Für die Wahrscheinlichkeit für die Zufriedenheit der Abonnenten sollen nur ganzzahlige Prozentzahlen betrachtet werden. **(4 BE)**

Anlage zur Aufgabe „Stochastik“

n	$P(X \leq 4)$	$P(X \leq 5)$	$P(X \leq 6)$
...			
4	0,9999	0,9999	0,9999
5	0,9975	0,9999	0,9999
6	0,9890	0,9992	0,9999
7	0,9712	0,9962	0,9997
8	0,9426	0,9887	0,9987
9	0,9011	0,9747	0,9957
10	0,8497	0,9526	0,9894
...			
34	0,0116	0,0334	0,0705
35	0,0091	0,0268	0,0649
36	0,0071	0,0215	0,0535
37	0,0055	0,0172	0,0439
38	0,0042	0,0137	0,0359
39	0,0033	0,0108	0,0292
40	0,0025	0,0086	0,0237
41	0,0019	0,0068	0,0192
42	0,0015	0,0053	0,0154
43	0,0011	0,0042	0,0124
44	0,0008	0,0032	0,0099
...			

Tabelle 6.1: *Summierte Binomialverteilungen für* $p = 0{,}3$

						p						
k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	1/6	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	
0	0,0023	0,0001										299
1	0,0166	0,0011	0,0001									298
2	0,0602	0,0057	0,0004									297
3	0,1485	0,0199	0,0020	0,0002								296
4	0,2824	0,0524	0,0068	0,0007								295
5	0,4441	0,1120	0,0186	0,0023								294
6	0,6063	0,2026	0,0428	0,0066								293
7	0,7454	0,3203	0,0851	0,0160								292
8	0,8493	0,4536	0,1497	0,0341								291
9	0,9182	0,5874	0,2370	0,0650								290
10	0,9590	0,7078	0,3429	0,1123								289
11	0,9810	0,8060	0,4593	0,1780								288
12	0,9918	0,8791	0,5760	0,2612	0,0001							287
13	0,9967	0,9292	0,6837	0,3583	0,0002							286
14	0,9988	0,9610	0,7758	0,4630	0,0006							285
15	0,9996	0,9797	0,8489	0,5681	0,0013							284
16	0,9999	0,9900	0,9031	0,6666	0,0027							283
17		0,9954	0,9409	0,7533	0,0052							282
18		0,9979	0,9657	0,8250	0,0097							281
19		0,9991	0,9810	0,8810	0,0171							280
20		0,9997	0,9899	0,9224	0,0287							279
21		0,9999	0,9949	0,9514	0,0458							278
22			0,9975	0,9708	0,0699							277
23			0,9989	0,9832	0,1024							276
24			0,9995	0,9907	0,1439							275
25			0,9998	0,9950	0,1949							274
26			0,9999	0,9974	0,2548							273
27				0,9987	0,3224	0,0001						272
28				0,9994	0,3956	0,0002						271
29				0,9997	0,4719	0,0004						270
30				0,9999	0,5484	0,0007						269
31				0,9999	0,6225	0,0013						268
32					0,6917	0,0022						267
33					0,7542	0,0038						266
34					0,8086	0,0062						265
35					0,8547	0,0099	0,0001					264
36					0,8923	0,0154	0,0002					263
37					0,9221	0,0232	0,0003					262
38					0,9451	0,0340	0,0006					261
39					0,9622	0,0486	0,0010					260
	0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	5/6	0,75	0,7	2/3	0,6	0,5	k
						p						

Tabelle 6.2: *Summierte Binomialverteilung* $P(X \leq k)$ *für* $n = 300$. *Alle freien Plätze, die unterhalb der Zahlenkolonnen liegen, würden durch das Runden auf 4 Dezimalen den Wert* 1,0000 *enthalten.*

						p						
k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	1/6	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	
40					0,9746	0,0675	0,0017					259
41					0,9834	0,0916	0,0028					258
42					0,9894	0,1212	0,0044					257
43					0,9934	0,1568	0,0069					256
44					0,9959	0,1984	0,0106					255
45					0,9976	0,2457	0,0158					254
46					0,9986	0,2981	0,0230					253
47					0,9992	0,3548	0,0328					252
48					0,9996	0,4145	0,0457					251
49					0,9998	0,4760	0,0622					250
50					0,9999	0,5377	0,0830					249
51					0,9999	0,5982	0,1084					248
52						0,6561	0,1388					247
53						0,7103	0,1745					246
54						0,7599	0,2152					245
55						0,8043	0,2607					244
56						0,8431	0,3106					243
57						0,8763	0,3639					242
58						0,9042	0,4197					241
59						0,9270	0,4770					240
60						0,9454	0,5345	0,0001				239
61						0,9598	0,5910	0,0001				238
62						0,9709	0,6455	0,0002				237
63						0,9793	0,6970	0,0003				236
64						0,9856	0,7447	0,0005				235
65						0,9901	0,7879	0,0008				234
66						0,9933	0,8264	0,0012				233
67						0,9956	0,8600	0,0018				232
68						0,9971	0,8888	0,0028				231
69						0,9982	0,9131	0,0042	0,0001			230
70						0,9988	0,9330	0,0061	0,0001			229
71						0,9993	0,9492	0,0088	0,0002			228
72						0,9996	0,9621	0,0125	0,0003			227
73						0,9997	0,9721	0,0174	0,0004			226
74						0,9998	0,9798	0,0239	0,0007			225
75						0,9999	0,9856	0,0322	0,0011			224
76						0,9999	0,9899	0,0429	0,0017			223
77							0,9930	0,0561	0,0025			222
78							0,9953	0,0723	0,0037			221
79							0,9968	0,0918	0,0053			220
	0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	5/6	0,75	0,7	2/3	0,6	0,5	k
						p						

Tabelle 6.2: *Summierte Binomialverteilung* $P(X \leq k)$ *für* $n = 300$. *Alle freien Plätze, die unterhalb der Zahlenkolonnen liegen, würden durch das Runden auf 4 Dezimalen den Wert* 1,0000 *enthalten.*

	p											
k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	1/6	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	
80							0,9979	0,1149	0,0076			219
81							0,9986	0,1418	0,0108			218
82							0,9991	0,1726	0,0150			217
83							0,9995	0,2072	0,0204			216
84							0,9997	0,2456	0,0275			215
85							0,9998	0,2874	0,0365			214
86							0,9999	0,3321	0,0478			213
87							0,9999	0,3793	0,0617			212
88								0,4283	0,0784	0,0001		211
89								0,4782	0,0984	0,0001		210
90								0,5284	0,1218	0,0002		209
91								0,5781	0,1488	0,0003		208
92								0,6264	0,1794	0,0005		207
93								0,6728	0,2137	0,0008		206
94								0,7165	0,2515	0,0012		205
95								0,7572	0,2924	0,0017		204
96								0,7944	0,3362	0,0025		203
97								0,8279	0,3821	0,0037		202
98								0,8577	0,4297	0,0052		201
99								0,8837	0,4783	0,0074		200
100								0,9061	0,5271	0,0102		199
101								0,9251	0,5754	0,0140		198
102								0,9410	0,6226	0,0189		197
103								0,9541	0,6679	0,0252		196
104								0,9648	0,7108	0,0331		195
105								0,9733	0,7509	0,0429		194
106								0,9800	0,7877	0,0550		193
107								0,9852	0,8211	0,0697		192
108								0,9892	0,8510	0,0871		191
109								0,9922	0,8772	0,1075		190
110								0,9945	0,9001	0,1312		189
111								0,9961	0,9196	0,1582		188
112								0,9973	0,9361	0,1886		187
113								0,9982	0,9498	0,2223		186
114								0,9988	0,9610	0,2592		185
115								0,9992	0,9701	0,2990		184
116								0,9995	0,9774	0,3412	0,0001	183
117								0,9996	0,9831	0,3855	0,0001	182
118								0,9998	0,9875	0,4314	0,0001	181
119								0,9999	0,9909	0,4781	0,0002	180
	0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	5/6	0,75	0,7	2/3	0,6	0,5	*k*
	p											

Tabelle 6.2: *Summierte Binomialverteilung* $P(X \leq k)$ *für* $n = 300$. *Alle freien Plätze, die unterhalb der Zahlenkolonnen liegen, würden durch das Runden auf 4 Dezimalen den Wert* 1,0000 *enthalten.*

						p						
k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	1/6	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	
120								0,9999	0,9934	0,5250	0,0003	179
121								0,9999	0,9953	0,5716	0,0005	178
122									0,9967	0,6172	0,0007	177
123									0,9977	0,6612	0,0011	176
124									0,9984	0,7030	0,0016	175
125									0,9989	0,7423	0,0023	174
126									0,9993	0,7786	0,0033	173
127									0,9995	0,8118	0,0046	172
128									0,9997	0,8418	0,0065	171
129									0,9998	0,8684	0,0089	170
130									0,9999	0,8917	0,0121	169
131									0,9999	0,9119	0,0162	168
132										0,9291	0,0216	167
133										0,9436	0,0283	166
134										0,9557	0,0367	165
135										0,9655	0,0470	164
136										0,9735	0,0594	163
137										0,9799	0,0744	162
138										0,9849	0,0921	161
139										0,9888	0,1126	160
140										0,9918	0,1363	159
141										0,9941	0,1632	158
142										0,9958	0,1933	157
143										0,9970	0,2265	156
144										0,9979	0,2627	155
145										0,9986	0,3017	154
146										0,9990	0,3431	153
147										0,9993	0,3864	152
148										0,9996	0,4313	151
149										0,9997	0,4770	150
150										0,9998	0,5230	149
151										0,9999	0,5687	148
152										0,9999	0,6136	147
153											0,6569	146
154											0,6983	145
155											0,7373	144
156											0,7735	143
157											0,8067	142
158											0,8368	141
159											0,8637	140
	0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	5/6	0,75	0,7	2/3	0,6	0,5	k
						p						

Tabelle 6.2: *Summierte Binomialverteilung* $P(X \leq k)$ *für* $n = 300$. *Alle freien Plätze, die unterhalb der Zahlenkolonnen liegen, würden durch das Runden auf 4 Dezimalen den Wert* 1,0000 *enthalten.*

	p											
k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	1/6	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	
160											0,8874	139
161											0,9079	138
162											0,9256	137
163											0,9406	136
164											0,9530	135
165											0,9633	134
166											0,9717	133
167											0,9784	132
168											0,9838	131
169											0,9879	130
170											0,9911	129
171											0,9935	128
172											0,9954	127
173											0,9967	126
174											0,9977	125
175											0,9984	124
176											0,9989	123
177											0,9993	122
178											0,9995	121
179											0,9997	120
180											0,9998	119
181											0,9999	118
182											0,9999	117
183											0,9999	116
	0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	5/6	0,75	0,7	2/3	0,6	0,5	*k*
	p											

Tabelle 6.2: *Summierte Binomialverteilung* $P(X \leq k)$ *für* $n = 300$*. Alle freien Plätze, die unterhalb der Zahlenkolonnen liegen, würden durch das Runden auf 4 Dezimalen den Wert* 1,0000 *enthalten.*

Beachte: Wenn Werte über den zweiten, dunkelgrau unterlegten Eingang der Tabelle abgelesen werden sollen, d. h. $p \geq 0{,}5$, muss die Differenz $1 -$ (abgelesener Wert) ermittelt werden.

6.2 Modulares Mathematiksystem (MMS)

Aufgabe 16. Analysis 1 Lösung S. 136

1. Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = \frac{1}{a^3}x^3 - \frac{1}{a}x^2 + x$$

und $a \in \mathbb{R}^+$.

a) **Berechnen** Sie die Stellen, an denen der Graph von f_4 eine Steigung von $-\frac{1}{4}$ hat. **(3 BE)**

b) **Ermitteln** Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen von f_1 und f_2.

Weisen Sie **nach**, dass es genau einen Punkt gibt, der auf jedem Graphen der Schar f_a liegt.

(5 BE)

c) Der Graph jeder Funktion f_a hat genau einen Wendepunkt.

Bestimmen Sie den Wert von a zu dem Wendepunkt mit der größten y-Koordinate. **(5 BE)**

d) Im Folgenden gilt $0 < a < 4$.

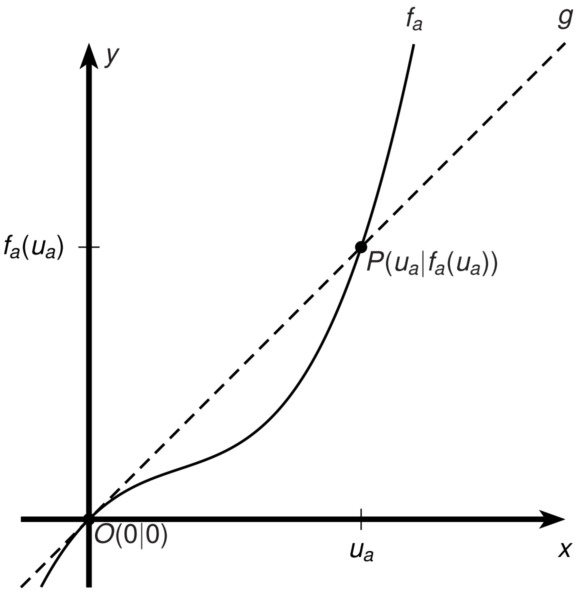


Abbildung 6.6

Abbildung 6.6 zeigt beispielhaft den Graphen einer Funktion f_a sowie die Gerade g mit $g(x) = x$, die den Graphen in den Punkten $O(0|0)$ und $P(u_a|f_a(u_a))$ schneidet. Die Gerade g, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = u_a$ begrenzen ein rechtwinkliges Dreieck.

Die folgenden Schritte stellen die Lösung einer Aufgabe dar:

$$\begin{aligned} &\textbf{1)} & f_a(x) &= g(x) \\ &\Leftrightarrow & x &= 0 \quad \vee\ x = a^2 \\ &\textbf{2)} & \tfrac{1}{2}\cdot a^2 \cdot f_a\left(a^2\right) &= 3\cdot \int\limits_0^{a^2} (x - f_a(x))\,\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow & a &= 2 \end{aligned}$$

Erläutern Sie diese Schritte und **interpretieren** Sie die Lösung $a = 2$ geometrisch. **(5 BE)**

2. Für ein Umweltschutzprojekt sollen zwei Unterwasserdrohnen U1 und U2 in einem See Messungen in unterschiedlichen Tiefen vornehmen. Sie bewegen sich nur in vertikaler Richtung, d. h. senkrecht zur Wasseroberfläche des Sees. Ihre Geschwindigkeiten lassen sich für $0 \leq t \leq 30$ mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen v bzw. w beschreiben, wobei gilt:

$$v(t) = -\frac{6}{25}t\cdot(4t-25)\cdot e^{-\frac{1}{5}t}$$

$$w(t) = \frac{1}{216}t^3 - \frac{1}{6}t^2 + t$$

Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten, $v(t)$ die Geschwindigkeit von U1 in Meter pro Minute und $w(t)$ die Geschwindigkeit von U2 in Meter pro Minute. Wenn die Geschwindigkeit in diesem Modell negativ ist, sinkt die Unterwasserdrohne. Wenn die Geschwindigkeit positiv ist, steigt die Unterwasserdrohne.

a) **Bestimmen** Sie die Koordinaten des Tiefpunktes des Graphen von v und **interpretieren** Sie die Werte im Sachkontext. **(3 BE)**

b) Im Beobachtungszeitraum beträgt der geringste Abstand von U1 zur Wasseroberfläche des Sees 10 Meter.

Ermitteln Sie den Abstand von U1 zur Wasseroberfläche zu Beobachtungsbeginn. **(5 BE)**

c) U2 ist zu Beobachtungsbeginn 5 Meter tiefer als U1 und steigt langsamer als U1. Der Graph in Abbildung 6.7 zeigt für die ersten Minuten des Beobachtungszeitraums die zeitliche Entwicklung des vertikalen Abstands der beiden Unterwasserdrohnen zueinander. Im dargestellten Bereich hat der Graph nur einen Hochpunkt $H\,(t_H|y_H)$.

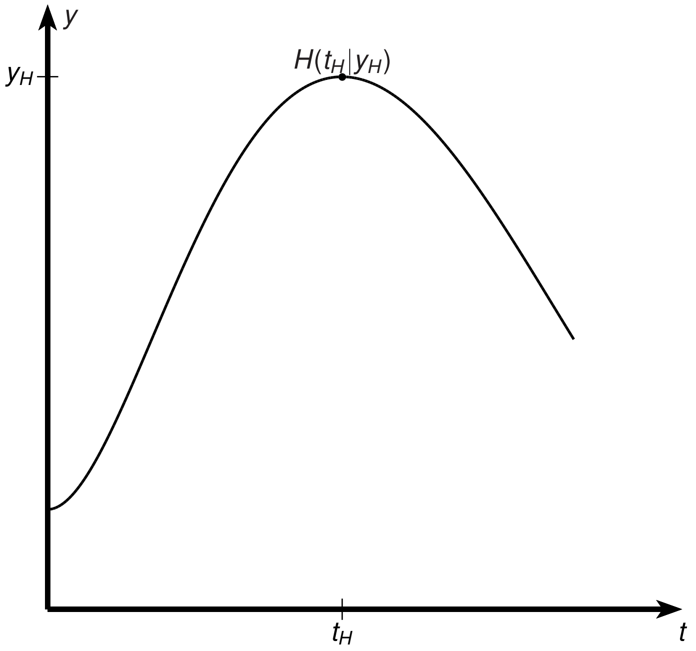


Abbildung 6.7

Erläutern Sie, wie man t_H anhand der Graphen von v und w ermitteln kann. **(4 BE)**

Aufgabe 17. Analysis 2 Lösung S. 138

1. Bei einer Algenkultur wird das Wachstum für 54 Stunden beobachtet. Die Wachstumsgeschwindigkeit der Algen wird durch die reelle Funktion f mit

$$f(t) = \frac{1}{100} \cdot (t - 50) \cdot (t - 40) \cdot e^{\frac{t}{5}}$$

beschrieben (siehe Abbildung 6.8).
Dabei ist t die Zeit nach Beobachtungsbeginn in Stunden und $f(t)$ gibt die Wachstumsgeschwindigkeit in Algen pro Stunde an.

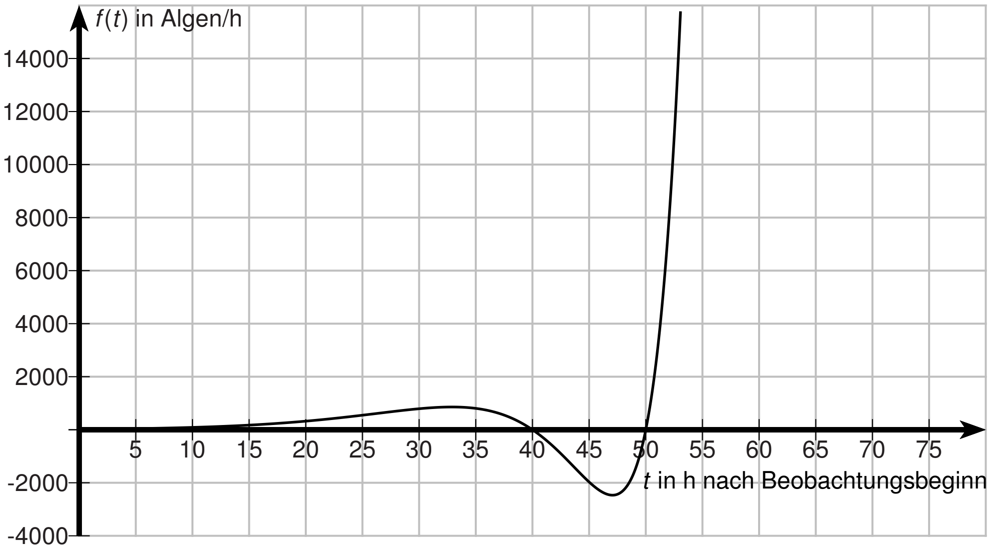


Abbildung 6.8

a) **Berechnen** Sie die Wachstumsgeschwindigkeit der Algen 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn. **(2 BE)**

b) **Bestätigen** Sie, dass die Funktion F mit

$$F(t) = \left(0{,}05t^2 - 5t + 125\right) \cdot e^{\frac{t}{5}} + 1$$

eine Stammfunktion von f ist. **(2 BE)**

c) **Bestimmen** Sie den Zeitpunkt, an dem der Algenbestand am stärksten abnimmt.

Berechnen Sie die Abnahmegeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt. **(4 BE)**

d) Es gilt:

$$\int_0^{50} f(t)\,\mathrm{d}t = -125$$

Untersuchen Sie die Bedeutung dieser Gleichung im Sachkontext. **(4 BE)**

e) **Bestimmen** Sie ein dreistündiges Zeitintervall, für das das bestimmte Integral der Funktion f Null ist. **(3 BE)**

2. Gegeben ist die ganzrationale Funktion u mit

$$u(x) = -2x^3 + 6x^2 - 5x + 2$$

und der Punkt $A(1\,|5)$ (siehe Abbildung 6.9).

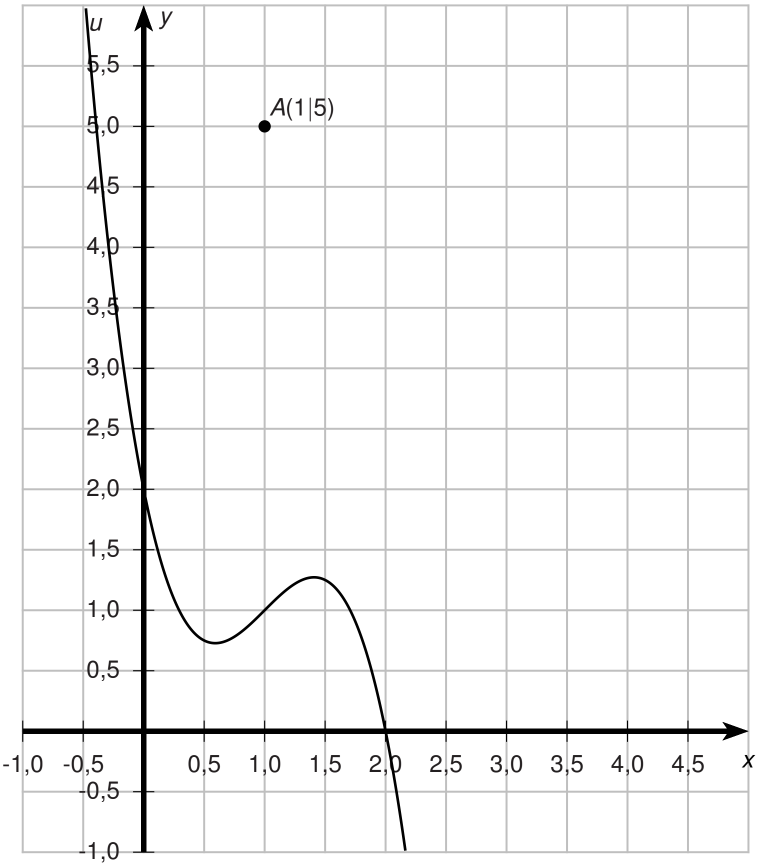


Abbildung 6.9

Die Funktion u ist durch geeignete Verschiebungen aus der Funktion v mit

$$v(x) = -2x^3 + x$$

hervorgegangen, die punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

a) **Geben** Sie **an**, welche der folgenden Funktionsgleichungen für u richtig ist und **erläutern** Sie für eine anderen Funktion, warum diese nicht geeignet ist.

I) $u(x) = -2(x+1)^3 + x + 1$
II) $u(x) = -2(x-1)^3 + x$
III) $u(x) = -2(x-1)^3 + x + 1$
IV) $u(x) = -2(x+1)^3 + x + 2$

(2 BE)

b) **Begründen** Sie ohne weitere Berechnung, dass die Fläche, die der Graph der Funktion u im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt, genau zwei Flächeneinheiten beträgt.

(3 BE)

c) **Bestimmen** Sie, den Wendepunkt der Funktion u.

Zeichnen Sie in Abbildung 6.9 die Wendetangente **ein**. **(5 BE)**

d) **Bestimmen** Sie den Abstand des Punktes $A(1\,|5)$ von der Wendetangente von u.

Geben Sie **an**, wie die Funktion u längs der x-Achse verschoben werden muss, damit der Abstand Null beträgt. **(5 BE)**

Aufgabe 18. Lineare Algebra Lösung S. 141

1. Betrachtet wird die Entwicklung einer Population von Tieren. Die Zusammensetzung der Population kann durch Vektoren $\overrightarrow{v_n}$ der Form

$$\overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} J \\ M \\ A \end{pmatrix}$$

dargestellt werden, dabei ist J die Anzahl der jungen Tiere (bis ein Jahr alt), M die Anzahl der mittelalten Tiere (mehr als ein Jahr bis zwei Jahre alt) und A die Anzahl der alten Tiere (mehr als zwei Jahre alt).

Die Entwicklung der Population von einem Jahr n zum nächsten lässt sich für $k \geq 0$ modellhaft durch die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} k & t & 0{,}05 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

und die Gleichung

$$\overrightarrow{v_{n+1}} = P \cdot \overrightarrow{v_n}$$

beschreiben.

a) **Stellen** Sie die Entwicklung der Population in einem Übergangsdiagramm **dar**. **(3 BE)**

b) Die Population besteht zu Beginn der Beobachtung ausschließlich aus 200 jungen Tieren. Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn hat sich die Anzahl der jungen Tiere halbiert und die Zahl der mittelalten Tiere beträgt 50.

Ermitteln Sie die Werte von k und t sowie die Anzahl der alten Tiere nach zwei Jahren. **(4 BE)**

c) Die Entwicklung einer anderen Population der oben beschriebenen Tierart kann von einem Jahr n zum nächsten mithilfe der Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Für diese Entwicklung gilt:

Die Größe der Gesamtpopulation sinkt von einem Jahr zum nächsten um 10 %.

Bestimmen Sie, wie viele Jahre nach Beobachtungsbeginn die Größe der Population, d. h. die Summe der Anzahlen der Tiere jeden Alters, erstmals auf unter 20 % ihres Werts zu Beobachtungsbeginn gesunken ist. **(5 BE)**

2. Die Abbildung 6.10 zeigt das Dreieck ABC mit

$$A\,(0|0|0),\ B\,(-3|-4|0) \text{ und } C\,(0|0|12).$$

Der Umfang des Dreiecks beträgt 30.

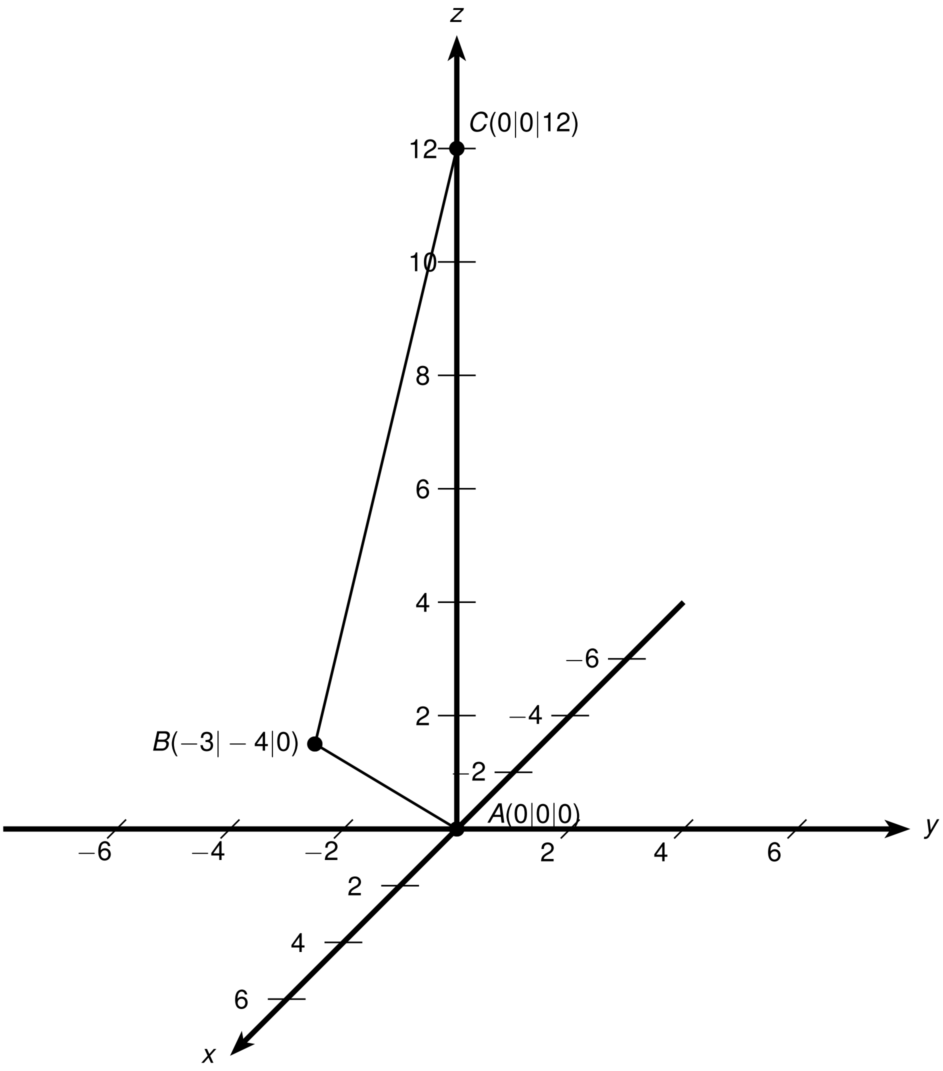


Abbildung 6.10

a) **Begründen** Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist. **(2 BE)**

b) Der Umfang des Dreiecks ABC^* mit $C^*\,(0|0|z)$ und $z > 0$ ist halb so groß wie der Umfang des Dreiecks ABC.

Bestimmen Sie die z-Koordinate von C^*. **(5 BE)**

c) Das Dreieck ABC wird um die Seite $\overline{AC}$ gedreht. Dabei entstehen Dreiecke AB^*C.

Geben Sie einen Punkt B^* **an**, bei dem eine der Koordinaten den Wert 3 hat. **(1 BE)**

Aufgabe 19. Analytische Geometrie Lösung S. 143

Abbildung 6.11 zeigt die Pyramide *ABCDS* mit den Eckpunkten

$$A\,(-3|-3|0),\ B\,(3|-3|0),\ C\,(3|3|0),\ D\,(-3|3|0) \text{ und } S\,(0|0|4)$$

sowie den Punkt $O\,(0|0|0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt. Die Seitenfläche *CDS* der Pyramide liegt in der Ebene *E*.

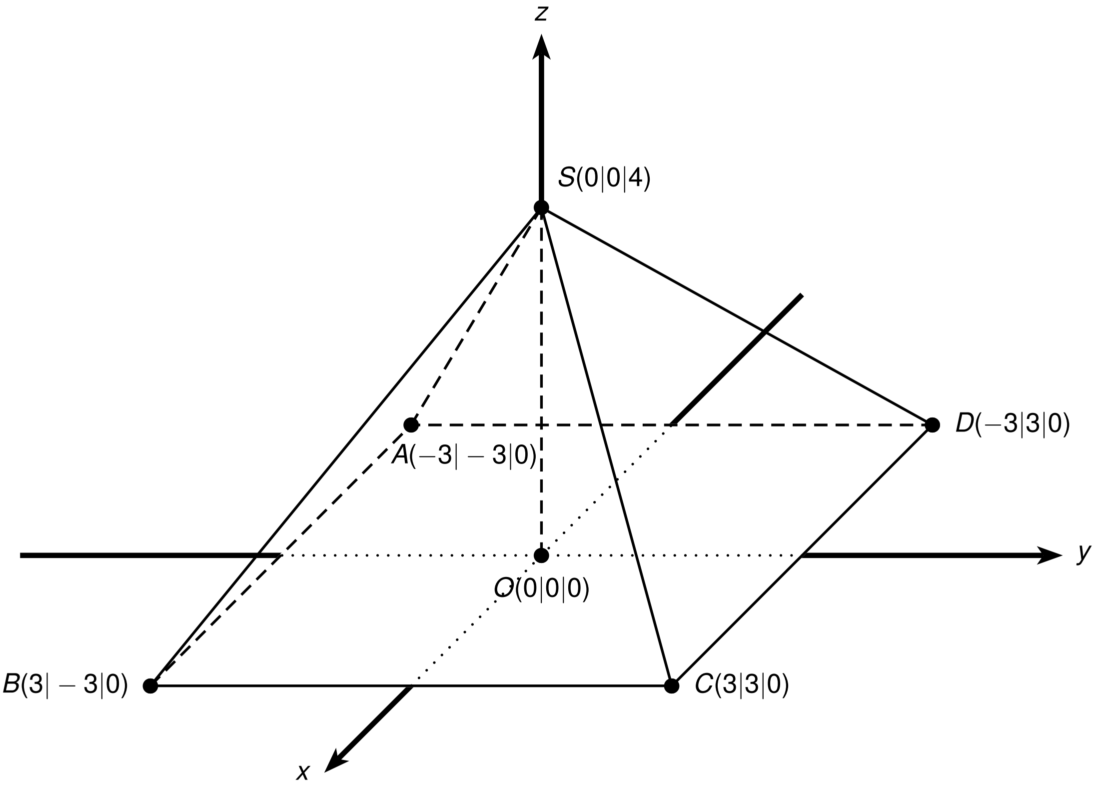


Abbildung 6.11

a) **Berechnen** Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide. **(4 BE)**

b) Genau eine der folgenden Gleichungen 1. bis 3. beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide.

Geben Sie diese Gleichung **an** und **begründen** Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist.

1. $x - z = 0$
2. $x + y + z = 4$
3. $x + y = 0$

(3 BE)

c) Die Seitenfläche *CDS* der Pyramide liegt in der Ebene *E*.

Bestimmen Sie eine Gleichung von *E* in Koordinatenform.

(Zur Kontrolle: $4y + 3z = 12$*)* **(3 BE)**

d) Es gibt einen Punkt $P\,(0|0|p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat.

Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen:

I. $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

II. $4 \cdot 4t + 3 \cdot (p + 3t) = 12$

III. $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = p$

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen. **(5 BE)**

Die Ebene $E : 4y + 3z = 12$ gehört zur Schar der Ebenen

$$E_k : 4k \cdot x + \; 4\sqrt{1 - k^2} \cdot y + 3 \cdot z = 12$$

mit $k \in [-1\,;1]$. Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1.

e) **Zeigen** Sie, dass der Punkt $S(0|0|4)$ in allen Ebenen der Schar enthalten ist. **(1 BE)**

f) **Weisen** Sie **nach**, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist, und **bestimmen** Sie diese Größe. **(4 BE)**

Aufgabe 20. Stochastik Lösung S. 145

Hinweis: In den folgenden Aufgaben sollen die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden.

Ein bekannter Video-Streamingdienst bietet einen kostenpflichtigen Zugang zu Spielfilmen und Serien an. Personen, die davon gegen Zahlung einer monatlichen Gebühr Gebrauch machen, werden im Folgenden als Abonnenten bezeichnet. Sie haben sich entweder für das Spielfilmpaket oder für das Komplettpaket entschieden, das neben den Spielfilmen auch noch Serien enthält.

1. Unter den Abonnenten sind 70 % höchstens 40 Jahre alt. Von diesen haben 80 % das Komplettpaket gewählt.
Unter denjenigen Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind, haben sich 50 % für das Komplettpaket entschieden.

a) **Stellen** Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm **dar**. **(4 BE)**

b) Eine unter allen Abonnenten zufällig ausgewählte Person hat sich für das Komplettpaket entschieden.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie höchstens 40 Jahre alt ist. **(2 BE)**

c) **Bestimmen** Sie die Anzahl der Abonnenten, die man mindestens zufällig auswählen müsste, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mehr als 20 Personen älter als 40 Jahre sind. **(4 BE)**

2. Der Anteil der zufriedenen Abonnenten von derzeit 60 % soll gesteigert werden. Dazu wird ein Algorithmus entwickelt, der jedem Abonnenten täglich individuell einen Spielfilm vorschlägt. Als Basis für die Entscheidung über den dauerhaften Einsatz des Algorithmus plant das Management einen Probebetrieb. Im Anschluss soll die Nullhypothese

Der Anteil der zufriedenen Abonnenten beträgt höchstens 60 %.

mithilfe einer Stichprobe von 200 zufällig ausgewählten Abonnenten auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

a) Das Management möchte vermeiden, dass der Algorithmus eingesetzt wird, obwohl dadurch die Zufriedenheit unter den Abonnenten nicht erhöht wird.

Entscheiden Sie begründet, ob die angegebene Nullhypothese dafür geeignet ist.

(2 BE)

Für den beschriebenen Test ergibt sich $\{132; 133; ...; 200\}$ als Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

b) Zur Bestimmung der unteren Grenze dieses Ablehnungsbereichs wurden zunächst folgende Lösungsschritte ausgeführt:

- Y: Anzahl der zufriedenen Abonnenten in der Stichprobe
- $P_{0,6}^{200}(Y \geq 132) \approx 0{,}047$

Begründen Sie, dass die beiden Lösungsschritte zur Bestimmung der unteren Grenze nicht ausreichend sind, und **ergänzen** Sie diese geeignet. **(4 BE)**

c) **Bestimmen** Sie, bei welchen Wahrscheinlichkeiten für die Zufriedenheit der Abonnenten die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zweiter Art kleiner als 90 % ist.
Hinweis: Für die Wahrscheinlichkeit für die Zufriedenheit der Abonnenten sollen nur ganzzahlige Prozentzahlen betrachtet werden. **(4 BE)**

Teil III

Erwartungshorizonte zum hilfsmittelfreien Teil und zu den komplexen Aufgaben

7 Erwartungshorizonte zum hilfsmittelfreien Teil

7.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

I.1 Analysis

	Lösungsskizze	BE
a)	4 Kästchen sind eine FE. Der Flächeninhalt beträgt etwa 2 FE. $\int\limits_{-3}^{-1{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$	2
b)	Der Graph von *u* kann aus G_f durch Spiegelung an der *x*-Achse und anschließender Verschiebung um 2 in positive *y*-Richtung erzeugt werden. Hochpunkt: $(0\|2)$	3
		5

I.2.1 Lineare Algebra

	Lösungsskizze	BE
a)	$D(3\|0\|5)$, $E(3\|4\|5)$	1
b)	$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left\|\overrightarrow{CA}\right\| = 3$ $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left\|\overrightarrow{CB}\right\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 4$ Umfang: $u = 3 + 5 + 4 = 12$ Der Umfang beträgt 12 LE.	4
		5

I.2.2 Analytische Geometrie

	Lösungsskizze	BE
a)	Es gibt keinen solchen Wert von t, da P und Q_t für alle $t \in \mathbb{R}$ verschiedene z-Koordinaten haben.	2
b)	$\overrightarrow{Q_tO} \circ \overrightarrow{Q_tP} = 0$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 \\ -t \\ -20 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ -t \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ $\Leftrightarrow t^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow t = -6 \vee t = 6$	3
		5

I.3 Stochastik

	Lösungsskizze	BE
a)	$0{,}4^3 = 0{,}064 < 0{,}1$	2
b)	Zufallsexperiment: Vier Kinder erhalten jeweils einen Ball. Ereignis: Mindestens drei dieser Bälle haben keine Glitzerfärbung.	3
		5

I.4.1 Analysis

	Lösungsskizze	BE
a)	Das Polynom $f(x)$ enthält ausschließlich Potenzen von x mit ungeraden Exponenten.	1
b)	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(x^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$ $2 \cdot \int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0} = 2 \cdot (0 - (4 - 8)) = 8$	4
		5

I.4.2.1 Lineare Algebra

	Lösungsskizze	**BE**
a)	$\vec{u} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\ 12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\ 10\end{pmatrix}$	2
b)	Zu zeigen ist $A \cdot A^{-1} = E$ $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0{,}5 & a\\ -0{,}5 & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & a-a\\ 0 & 4a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ Es muss gelten $4a = 1$, also ist $a = \frac{1}{4}$.	3
		5

I.4.2.2 Analytische Geometrie

	Lösungsskizze	**BE**
a)	$G\,(4 \mid 7 \mid 4)$	1
b)	Schnittpunkt der Raumdiagonalen: $S\,(2{,}5 \mid 4 \mid 2)$ $\overrightarrow{OH'} = \begin{pmatrix}1\\ 7\\ 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2{,}5\\ -4\\ -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1{,}5\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$ Also ist $H'(-1{,}5 \mid 3 \mid 2)$.	3
c)	G'	1
		5

I.4.3 Stochastik

	Lösungsskizze	**BE**
a)	$0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}18$	2
b)	Wegen $20 \cdot \frac{1}{100} + 10 \cdot \frac{18}{100} = 2$ ist der Erwartungswert für die Auszahlung bei diesem Spiel 2 €. Der Einsatz ist größer.	3
		5

I.5.1 Analysis

	Lösungsskizze	BE
a)	$t_4(x) = 4x - 8$	1
b)	Gleichung der Tangente: $t_u(x) = mx + n$ $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ $m = f'(u) = u$ $\frac{1}{2}u^2 = u \cdot u + n \Leftrightarrow n = -\frac{1}{2}u^2$ $t_u(x) = u \cdot x - \frac{1}{2}u^2$	4
		5

I.5.2.1 Lineare Algebra

	Lösungsskizze	BE
a)	Das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert $x = 0$ und $y = z$. Neben dem Nullvektor erfüllt beispielsweise $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die geforderten Eigenschaften.	2
b)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + y - z \\ x \end{pmatrix}$ Es gilt: $\begin{pmatrix} x \\ x + y - z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = z$ Damit bilden die Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ s \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge von $M \cdot \vec{b} = \vec{b}$.	3
		5

I.5.2.2 Analytische Geometrie

	Lösungsskizze	BE
	$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert $\lambda = 2$. Schnittpunkt M der Diagonalen: $M\,(3\|4\|0)$ $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ Flächeninhalt des Quadrats: $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5^2 = 50$	5
		5

I.5.3 Stochastik

	Lösungsskizze	BE
a)	0,9 · 0,99 = 0,891 = 89,1 %	2
b)	Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der Endkontrolle von 100 Geräten mindestens 90 als fehlerfrei eingestuft werden, ist größer als 50 %.	3
		5

Standardbezug zur Aufgabe „hilfsmittelfreier Teil - grundlegendes Anforderungsniveau“

Teilaufgabe		**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**							**Anforderungsbereich**		
			K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
I.1	**a)**	2			I		I			2		
	b)	3		I	II		II				3	
I.2.1	**a)**	1					I			1		
	b)	4	II	I	II	II		I		2	2	
I.2.2	**a)**	2	I		II		I			1	1	
	b)	3	I		II			II		1	2	
I.3	**a)**	2	I		I	I		I		2		
	b)	3		II		I	II			1	2	
I.4.1	**a)**	1	I				I			1		
	b)	4			II			II		2	2	
I.4.2.1	**a)**	2			I			I		2		
	b)	3			II			II			3	
I.4.2.2	**a)**	1					I			1		
	b)	3			II		I	II		1	2	
	c)	1	II	I			II				1	
I.4.3	**a)**	2			I	I		I		2		
	b)	3	II		II	II		I		1	2	
I.5.1	**a)**	1			I		I			1		
	b)	4	III		II			II			1	3
I.5.2.1	**a)**	2	II		II			I		1	1	
	b)	3	III		III			I				3
I.5.2.2		5	II		III			II			2	3
I.5.3	**a)**	2		I	II	II		I		1	1	
	b)	3		II	III	III	III					3

7.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

I.1 Analysis

	Lösungsskizze	BE
a)	$a = 3$	1
b)	$\begin{aligned} & f_a(x) &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & ax^2(x+1) &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x &&= -1 \quad \vee\, x = 0 \end{aligned}$ $\left\| \int\limits_{-1}^{0} \left(ax^3 + ax^2\right) \mathrm{d}x \right\| = \left\| \left[\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}ax^3\right]_{-1}^{0} \right\| = \frac{1}{12}a$	4
		5

I.2 Analysis

	Lösungsskizze	BE
a)	Der Graph G_f, die x-Achse sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = -2$ und $x = 8$ schließen eine Fläche ein, deren Teil unterhalb der x-Achse einen kleineren Inhalt besitzt als deren Teil oberhalb. Deshalb ist der Wert des Integrals nicht negativ.	2
b)	Wegen $f'(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$, $f'(0) = 1$ und $f(0) = 0$ besitzt die Tangente an G_f im Koordinatenursprung die Gleichung $y = x$, die auch die Gerade durch die beiden gegebenen Punkte beschreibt.	3
		5

I.3.1 Lineare Algebra

	Lösungsskizze	BE
a)	$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 44 \end{pmatrix}$	1
b)	M hat die Form $\begin{pmatrix} a & a & a \\ 2 & 2 & b \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} a & a & a \\ 2 & 2 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$ liefert $5a = 5 \Leftrightarrow a = 1$ sowie $6 + 2b = 12 \Leftrightarrow b = 3$. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	4
		5

I.3.2 Analytische Geometrie

	Lösungsskizze	**BE**
a)	$\begin{pmatrix} 2a \\ -4 \\ a-2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ $-2a + a - 2 = 0$ $a = -2$	2
b)	$\begin{pmatrix} 2a \\ -4 \\ a-2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt $k = 0{,}5$. Das Gleichungssystem I $2a = 3$ II $a - 2 = 0{,}5$ besitzt keine Lösung und damit gehört die Ebene nicht zur Schar.	3
		5

I.4 Stochastik

	Lösungsskizze	**BE**
a)	Ist beim einmaligen Drehen p die Wahrscheinlichkeit dafür, „Blau“ zu erzielen, dann ist $1 - p$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dabei „Gelb“ zu erzielen. Somit ist $\sqrt{100 \cdot p \cdot (1 - p)}$ die Standardabweichung sowohl von X als auch von Y.	2
b)	Der Abbildung ist zu entnehmen, dass 75 der Erwartungswert von X ist. Ist b die Anzahl der blau eingefärbten Sektoren, so ist $75 = 100 \cdot \frac{b}{20} \Leftrightarrow b = 15$.	3
		5

I.5.1 Analysis

	Lösungsskizze	**BE**
a)	$t_4(x) = 4x - 8$	1
b)	Gleichung der Tangente: $t_u(x) = m \cdot x + n$ $f_a(u) = a \cdot u^2$; $m = f_a'(u) = 2a \cdot u$ $a \cdot u^2 = 2a \cdot u \cdot u + n \Leftrightarrow n = -a \cdot u^2$ $t_u(x) = 2a \cdot u \cdot x - a \cdot u^2$	4
		5

I.5.2 Analysis

	Lösungsskizze	**BE**
a)	$A = \int\limits_0^1 (f_1(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(x^5 - x^3 + 2x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + x^2\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{11}{12}$	2
b)	$f_a'(x) = 5x^4 - 3x^2 + a$ $f_a'(1) = 5 - 3 + a = 1 \Rightarrow a = -1$	3
		5

I.5.3.1 Lineare Algebra

	Lösungsskizze	**BE**
	Die Multiplikation mit M von rechts bewirkt eine Vertauschung der letzten beiden Spalten. Die Multiplikation mit M von links bewirkt eine Vertauschung der letzten beiden Zeilen. Erfüllt die vorgegebene Matrix A die geforderte Eigenschaft, so ändert sie sich beim Vertauschen der letzten beiden Zeilen und beim anschließenden Vertauschen der letzten beiden Spalten nicht. Es folgen $a = 2$ und $b = 1$, sowie $2c = c - a$ und $2d - b = d$, d. h. $c = -2$ und $d = 1$.	5
		5

I.5.3.2 Analytische Geometrie

	Lösungsskizze	BE
a)	Kantenlänge des Würfels: $\left\lvert\overrightarrow{AC}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}-4\\-8\\8\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{144} = 12$	2
b)	Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AC}$: $M(-1\mid-2\mid5)$ Normalenvektor von H: $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ mit $\left\lvert\vec{n}\right\rvert = 3$ Damit ergeben sich die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte, die nicht in H liegen, zu $\overrightarrow{OM} + 2\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\0\\9\end{pmatrix}$.	3
		5

I.5.4.1 Lineare Algebra

	Lösungsskizze	BE
	$\begin{pmatrix}0 & a & 2a\\0{,}2 & 0 & 0\\0{,}2 & 0{,}2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3ax\\0{,}2x\\0{,}4x\end{pmatrix}$ Daraus folgt: $3x \leq (3a+0{,}6)x \leq 3{,}6x$ $3 \leq 3a+0{,}6 \leq 3{,}6$ $3 \leq 3a+0{,}6 \quad\Rightarrow\quad 0{,}8 \leq a$ $3a+0{,}6 \leq 3{,}6 \quad\Rightarrow\quad a \leq 1$ Also folgt $0{,}8 \leq a \leq 1$.	5
		5

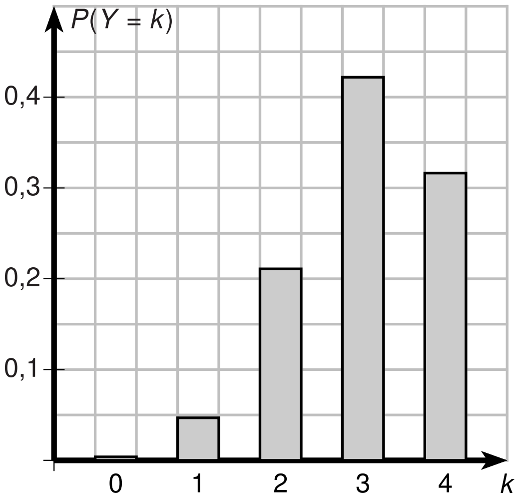
I.5.4.2 Analytische Geometrie

	Lösungsskizze	BE
a)	Alle Geraden der Schar haben denselben Vektor als Richtungsvektor.	1
b)	Da $\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $s \in \mathbb{R}$ nicht lösbar ist, sind O und P keine benachbarten Eckpunkte, die auf derselben Gerade der Schar liegen. Da $\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 44 + 32 + 5 \neq 0$, sind O und P keine benachbarten Eckpunkte, die auf verschiedenen Geraden der Schar liegen.	4
		5

I.5.5 Stochastik

	Lösungsskizze	BE
	Aus dem angegebenen Erwartungswert von 4 ergibt sich für die Summe der drei Zahlen auf den nicht sichtbaren Seiten der Wert 13. Werden diese mit den Zahlen 3, 5 und 5 beschriftet, treffen die ersten zwei Aussagen zu und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim zweimaligen Werfen des Würfels zweimal die gleiche Zahl erzielt wird, beträgt $\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.	5
		5

I.5.6 Stochastik

<table>
<tr><th></th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>


</td><td>2</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Z: Anzahl der Würfe, bei denen keine der beiden erzielten Zahlen größer als drei ist.
Begründung: Beim einmaligen Werfen der beiden Würfel gibt es bei Verwendung des Ergebnisraums $\{(1;1),(1;2),...,(2;1),...,(6;6)\}$ insgesamt 36 Ergebnisse, die alle gleich wahrscheinlich sind. Bei neun dieser Ergebnisse ist keine der beiden erzielten Zahlen größer als drei. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Keine der beiden erzielten Zahlen ist größer als drei.“ beträgt somit $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Damit sind X und Z beide binomialverteilt mit den Parametern $p = \frac{1}{4}$ und $n = 4$.</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>5</td></tr>
</table>

Standardbezug zur Aufgabe „hilfsmittelfreier Teil - erhöhtes Anforderungsniveau“

Teilaufgabe		**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**							**Anforderungsbereich**		
			K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
I.1	**a)**	1			I			I		1		
	b)	4			II			II		1	3	
I.2	**a)**	2	I		II		I			1	1	
	b)	3	I		II			II		1	2	
I.3	**a)**	1				I	I	I		1		
	b)	4		II	II	II	I	II		1	3	
I.3	**a)**	2	II		II			I		1	1	
	b)	3	II		II			II			3	
I.4	**a)**	2	II		II	I		I		1	1	
	b)	3	II		II	I	I	I		1	2	
I.5.1	**a)**	1			I		I			1		
	b)	4	III		II			III			1	3
I.5.2	**a)**	2			II						2	
	b)	3					II	III				3
I.5.3.1		5	III	II	II		II	III			2	3
I.5.3.2	**a)**	2	II		II		II	II			2	
	b)	3		II	III		III	II				3
I.5.4.1		5	III	II	II		II	III			2	3
I.5.4.2	**a)**	1	I	I	I					1		
	b)	4	II		III			II			1	3
I.5.5		5	III	III	III	II		II			2	3
I.5.6	**a)**	2	II			II	II				2	
	b)	3	III	III	III	III						3

8 Erwartungshorizonte zu den komplexen Aufgaben

8.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

8.1.1 wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR)

Aufgabe 1. Analysis 1

	Lösungsskizze	BE
1.a)	$T\,(0\|0)$ $f'\,(x) = \frac{12}{1000} \cdot x^3 - \frac{24}{100} \cdot x^2 + \frac{12}{10} \cdot x$ $f'\,(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(x^2 - 20x + 100\right) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 10$ Nur bei 0 und 10 können Extrempunkte vorliegen. An der Stelle 10 ändert sich das Vorzeichen von $f'\,(x)$ nicht; somit besitzt der Graph von f keine weiteren Extrempunkte.	6
b)	$f'(5) = \frac{3}{2}$ $\frac{55}{8} = \frac{3}{2} \cdot 5 + n \Leftrightarrow n = -\frac{5}{8}$ $t(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}$	4
c)	Der Graph von g wird durch Streckung in y-Richtung mit dem Faktor a und durch Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ aus dem Graphen von f erzeugt. $g\,(12) = a \cdot f\,(10) \Leftrightarrow 12 = a \cdot 10 \Leftrightarrow a = \frac{6}{5}$	3
2.a)	$t_s \approx 6$ Zeitraum: Vom Zeitpunkt des Starts bis zum Zeitpunkt t_s Sekunden nach dem Start	3
b)	$d\,(t)$ gibt für den Zeitpunkt t Sekunden nach dem Start an, um wie viele Meter pro Sekunde Radfahrer A schneller ist als Radfahrer B.	3

	Lösungsskizze	**BE**
c)	$\int\limits_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{3}{5\,000}t^5 - \frac{1}{50}t^4 + \frac{1}{5}t^3\right]_0^{10} = 60 - 200 + 200 = 60$ Die Länge der zurückgelegten Strecke beträgt 60 m.	4
d)	Zum Zeitpunkt, der im Modell durch *z* angegeben ist, haben beide Radfahrer die gleiche Strecke zurückgelegt.	2
	Insgesamt	25

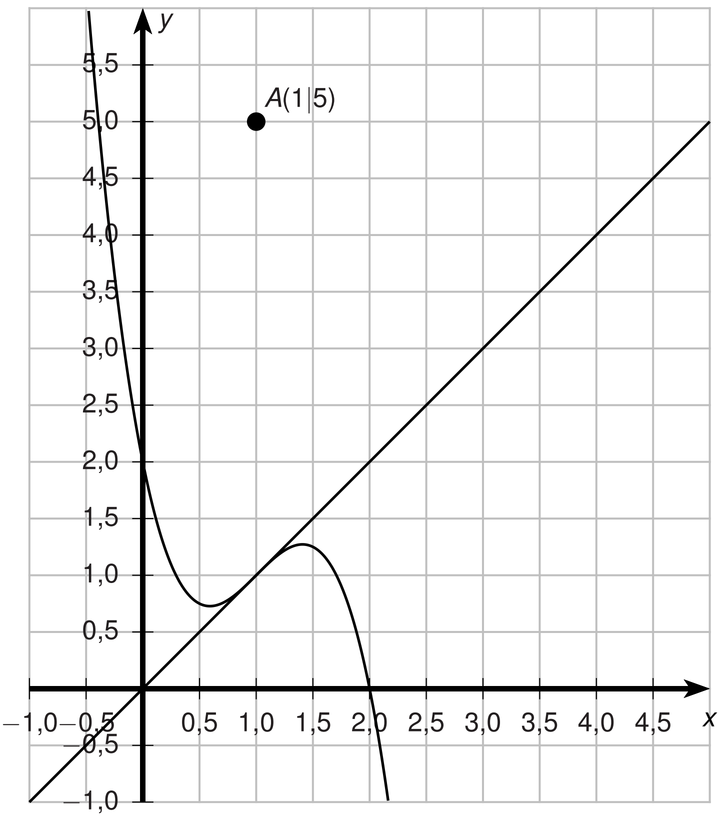
Standardbezug zur Aufgabe „Analysis 1“

Teilaufgabe		**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**							**Anforderungsbereich**		
			K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1.	**a)**	6	II				I	II			X	
	b)	4						I		X		
	c)	3		II	III		III					X
2.	**a)**	3		I	I	I	I			X		
	b)	3	II	II	II	II					X	
	c)	4			II	II		II			X	
	d)	2	III	II	II	III	II					X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (7 - 9)	**Anforderungsbereich II (10 - 13)**	**Anforderungsbereich III (5 - 6)**
7	13	5

Aufgabe 2. Analysis 2

	Lösungsskizze	BE
1.a)	$f(20) \approx 328$ Die Wachstumsgeschwindigkeit beträgt 328 Algen pro Stunde.	3
b)	Bis $t = 40$ ist das Wachstum positiv. Bei $t = 40$ liegt also ein lokales Maximum des Bestandes vor. Zwischen $t = 40$ und $t = 50$ ist das Wachstum negativ. Daher liegt bei $t = 50$ ein lokales Minimum des Bestandes vor.	3
c)	$F'(t) = (0{,}1t - 5) \cdot e^{\frac{t}{5}} + \left(0{,}01t^2 - t + 25\right) \cdot e^{\frac{t}{5}}$ $= \left(0{,}01t^2 - 0{,}9t + 20\right) \cdot e^{\frac{t}{5}}$ $= \frac{1}{100} \cdot (t - 50) \cdot (t - 40) \cdot e^{\frac{t}{5}}$ $= f(t)$	3
d)	$F(10) - F(0) \approx 466$ 10 Stunden nach Beobachtungsbeginn sind ca. 466 Algen hinzugekommen.	3
2.a)	II)	2
b)	Der Graph der Funktion u ist punktsymmetrisch zum Punkt $(1\|1)$. Daher teilt der Graph die Fläche des Quadrats, das durch $y = 2$ und $x = 2$ begrenzt wird, in zwei gleiche Teile, denn $(1\|1)$ ist der Mittelpunkt dieses Quadrats. Die Fläche des Quadrats beträgt 4 FE. Somit beträgt die gesuchte Fläche 2 FE.	3

	Lösungsskizze	**BE**
c)	 $u'(x) = -6x^2 + 12x - 5$ $u''(x) = -12x + 12$ $u'''(x) = -12$ Bestätigung der Wendestelle: $u''(1) = -12 + 12 = 0$ $u'''(1) = -12 \neq 0$ Daher liegt die Wendestelle bei $x = 1$ vor.	3

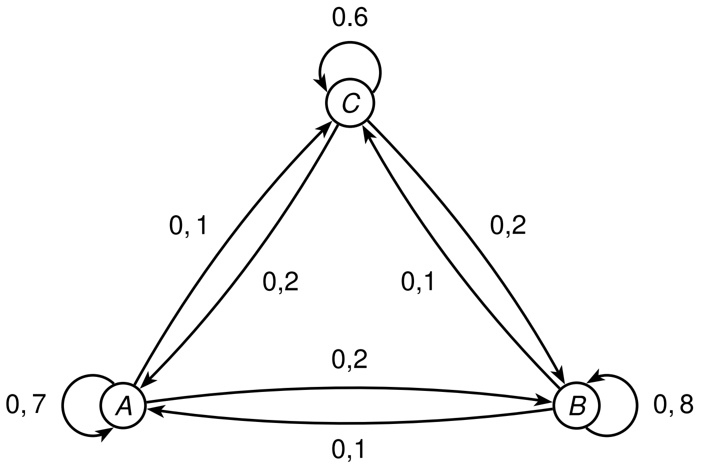
	Lösungsskizze	**BE**
d)	Die Funktion der Senkrechten zu t durch A lautet: $s(x) = -x + d$ Bestimmung von d: $s(1) = -1 + d = 5$ $d = 6$ $s(x) = -x + 6$ Bestimmung des Schnittpunktes S zwischen $t(x)$ und $s(x)$: $-x + 6 = x$ $6 = 2x$ $x = 3$ $t(3) = 3$ $S(3 \mid 3)$ Entfernung zum Punkt A: $\overline{AS} = \sqrt{(1-3)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$	5
	Insgesamt	25

Standardbezug zur Aufgabe „Analysis 2“

Teilaufgabe		**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**							**Anforderungsbereich**		
			K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1.	**a)**	3			I			I		X		
	b)	3	II	II			II				X	
	c)	3			II			II			X	
	d)	3				I		I		X		
2.	**a)**	2			II		II				X	
	b)	3	II				II	II			X	
	c)	3			I		I	I		X		
	d)	5			III		III	III				X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (7 - 9)	**Anforderungsbereich II (10 - 13)**	**Anforderungsbereich III (5 - 6)**
9	11	5

Aufgabe 3. Lineare Algebra

<table>
<tr><th></th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>a)</td><td> </td><td>3</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$y = 0{,}2 \cdot 300 + 0{,}8 \cdot 200 + 0{,}2 \cdot 400 = 300$
Am Ende des nächsten Tages befinden sich 300 E-Scooter im Bereich <i>B</i>.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Es ist $M^3 \cdot \vec{v_0} = \begin{pmatrix} 296{,}5 \\ 396 \\ 207{,}5 \end{pmatrix}$.
Am Ende des dritten Tages sind im Bereich <i>A</i> 296 E-Scooter.
Im Bereich <i>B</i> sind 396 E-Scooter und im Bereich <i>C</i> sind 207 E-Scooter.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Am Ende des Tages kann die Verteilung durch einen Vektor der Form $\begin{pmatrix} 300 \\ b \\ 600 - b \end{pmatrix}$ mit $0 \leq b \leq 600$ beschrieben werden. Somit ergibt sich für die Anzahl der E-Scooter im Bereich <i>A</i> am Ende des nächsten Tages:
$a = 0{,}7 \cdot 300 + 0{,}1 \cdot b + 0{,}2 \cdot (600 - b) = 330 - 0{,}1 \cdot b$
Mit $0 \leq b \leq 600$ folgt, dass am Ende des nächsten Tages mindestens 270 und höchstens 330 E-Scooter im Bereich <i>A</i> zu erwarten sind.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>In jedem Bereich werden am Ende des Dienstags 20 % der E-Scooter entnommen.
Nach 48 Stunden werden 20 E-Scooter in den Bereich <i>C</i> gebracht.</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt</td><td>15</td></tr>
</table>

Standardbezug zur Aufgabe „Lineare Algebra“

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen							Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
a)	3				I	I			X		
b)	2		I		I		I		X		
c)	2		II		II		II			X	
d)	4	II		II	II		II			X	
e)	4		II		III	III					X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (4 - 5)	**Anforderungsbereich II (6 - 8)**	**Anforderungsbereich III (3 - 4)**
5	6	4

Aufgabe 4. Analytische Geometrie

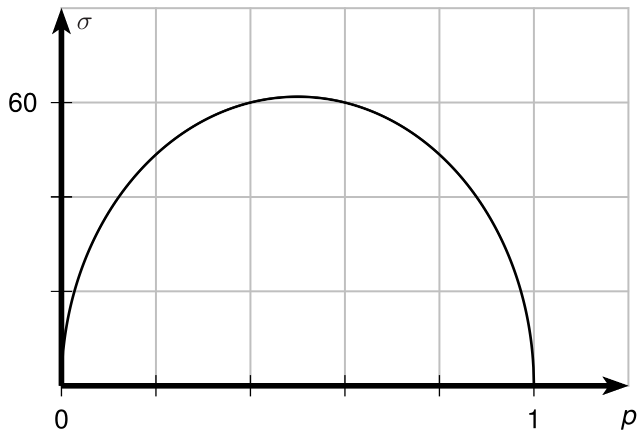
	Lösungsskizze	BE
a)	Oberflächeninhalt: $6 \cdot 8 + 5 \cdot \left(6 + 8 + \sqrt{6^2 + 8^2}\right) = 168$	4
b)	$W : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ für $r, s \in \mathbb{R}$.	2
c)	**Bestimmen** Sie die Koordinaten des Punkts der Strecke $\overline{AD}$, der in der Ebene W liegt.	2
d)	$\overrightarrow{MF} \circ \overrightarrow{MS_t} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} t-3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3t + 9 + 16 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{25}{3}$	3
e)	Es handelt sich um ein Quadrat. Der Schnittpunkt der Kante AB mit der Ebene ist $(3 \vert 4 \vert 0)$ und somit haben alle Kanten die Kantenlänge 5 und die gegenüberliegenden Seiten sind parallel. Ein rechter Winkel liegt z. B. bei F vor.	4
	Insgesamt	15

Standardbezug zur Aufgabe „Analytische Geometrie“

Teilaufgabe	**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**							**Anforderungsbereich**		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
a)	4					I	I		X		
b)	2			II			II			X	
c)	2	II	II			II	II			X	
d)	3			II			II			X	
e)	4		III	III		III					X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (4 - 5)	**Anforderungsbereich II (6 - 8)**	**Anforderungsbereich III (3 - 4)**
4	7	4

Aufgabe 5. Stochastik

<table>
<tr><th></th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>**1.a)**</td><td>$P\left(\overline{L}\cap\overline{D}\right) = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$
Ereignis: Die ausgewählte Person besitzt weder einen Laptop noch einen Desktop-PC.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>**b)**</td><td><table>
<tr><th></th><th>D</th><th>$\overline{D}$</th><th></th></tr>
<tr><td>L</td><td>0,17</td><td>0,39</td><td>0,56</td></tr>
<tr><td>$\overline{L}$</td><td>0,16</td><td>0,28</td><td>0,44</td></tr>
<tr><td></td><td>0,33</td><td>0,67</td><td>1</td></tr>
</table>
$P\left(L\cap\overline{D}\right) = 0{,}39$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>**2.**</td><td>$\mu = 0{,}68 \cdot 900 = 612$
Aus $P_{0,68}^{900}(601 \le X \le 612) \approx 0{,}307$ und $P_{0,68}^{900}(602 \le X \le 612) \approx 0{,}287$ folgt $k = 11$.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>**3.**</td><td>

Zu jedem Wert von p lässt sich die Standardabweichung σ berechnen, beispielsweise für $p = 0{,}4$:
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{15\,000 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = 60$</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt</td><td>15</td></tr>
</table>

Standardbezug zur Aufgabe „Stochastik“

Teilaufgabe		BE	allgemeine mathematische Kompetenzen							Anforderungsbereich		
			K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1.	**a)**	3	II	II		II					X	
	b)	4		I			I	I		X		
2.		4			II		II	II			X	
3.		4	III	II	III		II					X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I **(4 - 5)**	**Anforderungsbereich II** **(6 - 8)**	**Anforderungsbereich III** **(3 - 4)**
4	7	4

8.1.2 Modulares Mathematiksystem (MMS)

Aufgabe 6. Analysis 1

	Lösungsskizze	BE
1.a)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 10$ Nur bei 0 und 10 können Extrempunkte vorliegen. $f''(10) = 0$, $f'''(10) = \frac{6}{25} \neq 0$ Somit besitzt der Graph von f keine weiteren Extrempunkte.	3
b)	Gleichung von t: $t(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}$ Nachweis: $f'(5) = \frac{3}{2}$; $f(5) = \frac{3}{2} \cdot 5 - \frac{5}{8}$	4
c)	Die Gleichung $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}$ hat die drei Lösungen $x_a = \frac{25-5\sqrt{22}}{3}$, $x_b = 5$ und $x_c = \frac{25+5\sqrt{22}}{3}$. Inhalt der Fläche: $\int\limits_{x_a}^{x_c} \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{8} - f(x)\right) \mathrm{d}x = \frac{770}{81}\sqrt{22}$	5
d)	Der Parameter a skaliert die Höhe des Graphen von f in vertikaler Richtung. Es gilt $g(12) = 12$ und $f(10) = 10$. Mit $g(12) = a \cdot 10 = 12$ erhält man $a = 1{,}2$.	3
2.a)	$f(3) = 3{,}483$, d. h. drei Sekunden nach dem Start beträgt die Geschwindigkeit von Radfahrer A etwa 3,5 $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$. $f(t) = 8$ hat im betrachteten Zeitraum die Lösung $t \approx 5{,}82$, d. h. etwa 5,8 Sekunden nach dem Start erreicht der Radfahrer eine Geschwindigkeit von 8 $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$.	3
b)	$h(12) = 12$, d. h. die konstante Geschwindigkeit beträgt 12 $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$. $h'(12) = 0$	3
c)	$\int\limits_{0}^{z} (f(t) - h(t))\,\mathrm{d}t = 0$ hat für $0 < z < 10$ die Lösung $z_1 = \frac{1\,100-20\sqrt{295}}{91} \approx 8{,}31$. $\frac{h(z_1)-f(z_1)}{f(z_1)} \approx 0{,}11 = 11\ \%$	4
	Insgesamt	25

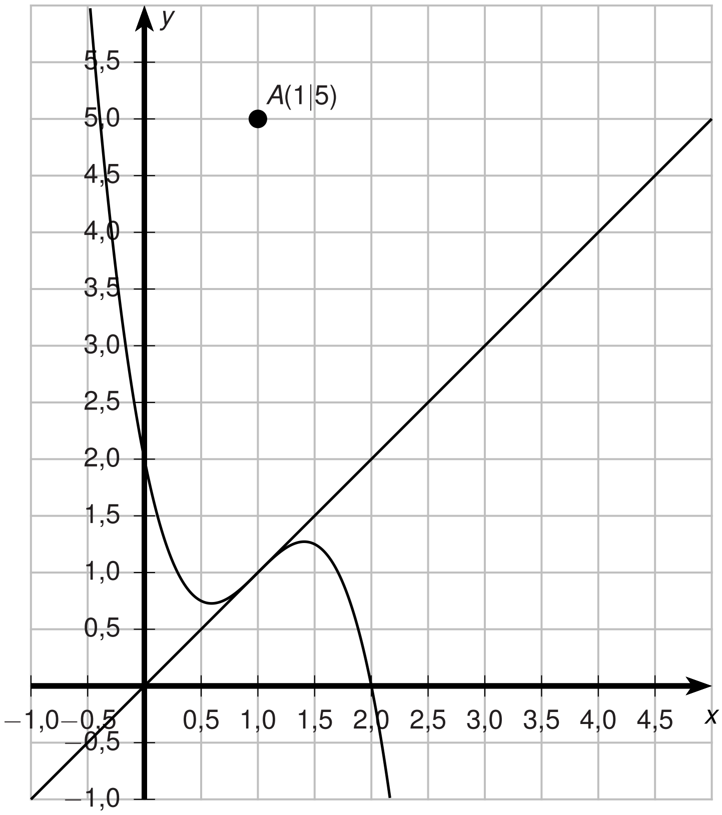
Standardbezug zur Aufgabe „Analysis 1“

Teilaufgabe	**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**							**Anforderungsbereich**		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1. a)	3	II					II			X	
b)	4	I					I		X		
c)	5			II		II	II			X	
d)	3		II	III		III					X
2. a)	3				I		I		X		
b)	3	II			II	II				X	
c)	4			III	III		II				X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (7 - 9)	**Anforderungsbereich II (10 - 13)**	**Anforderungsbereich III (5 - 6)**
7	11	7

Aufgabe 7. Analysis 2

	Lösungsskizze	BE
1.a)	$f(t) = \frac{1}{100} \cdot (t-50) \cdot (t-40) \cdot e^{\frac{t}{5}} = 100$ $t_1 \approx 10{,}86$ $t_2 \approx 39{,}65$ $t_3 \approx 50{,}05$	2
b)	Bis $t = 40$ ist das Wachstum positiv. Bei $t = 40$ liegt also ein lokales Maximum des Bestandes vor. Zwischen $t = 40$ und $t = 50$ ist das Wachstum negativ. Daher liegt bei $t = 50$ ein lokales Minimum des Bestandes vor.	3
c)	$F'(t) = (0{,}1t - 5) \cdot e^{\frac{t}{5}} + \left(0{,}01t^2 - t + 25\right) \cdot e^{\frac{t}{5}}$ $= \left(0{,}01t^2 - 0{,}9t + 20\right) \cdot e^{\frac{t}{5}}$ $= \frac{1}{100} \cdot (t-50) \cdot (t-40) \cdot e^{\frac{t}{5}}$ $= f(t)$	2
d)	$F(10) - F(0) \approx 466$ 10 Stunden nach Beobachtungsbeginn sind ca. 466 Algen hinzugekommen.	3
2.a)	II)	2
b)	Der Graph der Funktion u ist punktsymmetrisch zum Punkt $(1\|1)$. Daher teilt der Graph die Fläche des Quadrats, das durch $y = 2$ und $x = 2$ begrenzt wird, in zwei gleiche Teile, denn $(1\|1)$ ist der Mittelpunkt dieses Quadrats. Die Fläche des Quadrats beträgt 4 FE. Somit beträgt die gesuchte Fläche 2 FE.	3

	Lösungsskizze	**BE**
c)	$u''(x) = 0$ $x = 1$ $u(1) = 1$ Der Wendepunkt ist $(1\|1)$. 	3

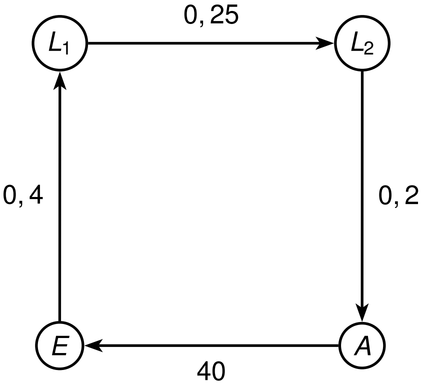
	Lösungsskizze	**BE**
d)	Steigung am Wendepunkt: $u'(1) = 1$ Die Funktion der Tangente lautet: $t(x) = x + b$ Bestimmung von b: $u(1) = 1 \rightarrow b = 0$ $t(x) = x$ Die Funktion der Senkrechten zu t durch A lautet: $s(x) = -x + d$ Bestimmung von d: $s(1) = -1 + d = 5$ $d = 6$ $s(x) = -x + 6$ Bestimmung des Schnittpunktes S zwischen $t(x)$ und $s(x)$: $-x + 6 = x$ $x = 3$ $t(3) = 3$ $S(3\|3)$ Entfernung zum Punkt A: $\overline{AS} = \sqrt{(1-3)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ Die Funktion u muss um vier Einheiten auf der x-Achse nach links verschoben werden.	7
	Insgesamt	25

Standardbezug zur Aufgabe „Analysis 2“

Teilaufgabe	**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**							**Anforderungsbereich**		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1. a)	2			I	I		I		X		
b)	3	II	II			II				X	
c)	2			II			II			X	
d)	3				I		I		X		
2. a)	2			II		II				X	
b)	3	II				II	II			X	
c)	3			I		I	I		X		
d)	7			III		III	III				X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (7 - 9)	**Anforderungsbereich II (10 - 13)**	**Anforderungsbereich III (5 - 6)**
8	10	7

Aufgabe 8. Lineare Algebra

	Lösungsskizze	**BE**
a)		3
b)	Der Eintrag 0,25 in der zweiten Spalte von M gibt an, dass sich 25 % der Larven des ersten Larvenstadiums von einer Woche zur nächsten zu Larven des zweiten Larvenstadiums entwickeln. Damit beträgt der gesuchte Anteil 75 %.	2
c)	$M^2 \cdot \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1\,600 \\ 2\,400 \\ 1\,600 \\ 1\,200 \end{pmatrix}$, $1\,600 + 2\,400 + 1\,600 + 1\,200 = 6\,800$ Vier Wochen nach Beobachtungsbeginn ist die Größe der Population 6 800.	2
d)	Ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Wochen, so gilt für $t \in \{0{,}4{,}8{,}12, ...\}$: $f(t) = 8500 \cdot b^t$ Wegen $f(4) = 6\,800$ folgt $b = \sqrt[4]{\frac{6\,800}{8\,500}} \approx 0{,}95$.	3
e)	Mit $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich $N^4 \cdot \begin{pmatrix} E \\ L_1 \\ L_2 \\ A \end{pmatrix} = 16 \cdot x \cdot y \cdot \begin{pmatrix} E \\ L_1 \\ L_2 \\ A \end{pmatrix}$. Es muss also gelten $16 \cdot x \cdot y = 1$. Für x und y kommen nur Werte des Intervalls $]0; 1]$ infrage, wobei $y = \frac{1}{16x}$ gilt. Damit: $\frac{1}{16} \leq y \leq 1$	5
	Insgesamt	15

Standardbezug zur Aufgabe „Lineare Algebra“

Teilaufgabe	**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**							**Anforderungsbereich**		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
a)	3	I	I		I	I			X		
b)	2	I	I		I	I			X		
c)	2				II		II			X	
d)	3		I	II	II		II			X	
e)	5	II	II	II	III	II	II				X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (4 - 5)	**Anforderungsbereich II (6 - 8)**	**Anforderungsbereich III (3 - 4)**
5	5	5

Aufgabe 9. Analytische Geometrie

	Lösungsskizze	BE
a)	Volumen: $\frac{1}{3} \cdot \frac{4+2}{2} \cdot 2 \cdot 3{,}5 = 7$	3
b)	$\overrightarrow{CS} \circ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$	2
c)	$\vec{n} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \land \vec{n} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} = 0$ liefert $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor von E. Somit hat E eine Gleichung der Form $7x + 7y + 8z = c$. Mit $S \in E$ ergibt sich $c = 28$.	3
d)	$\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind Normalenvektoren von E bzw. F. $\cos \alpha = \frac{\vec{n} \circ \vec{m}}{\lvert\vec{n}\rvert \cdot \lvert\vec{m}\rvert}$ liefert $\alpha \approx 56{,}6°$.	3
e)	Die Gleichung $\begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$ liefert $k = \frac{14}{11}$. Die Kantenläge des Würfels ist somit $\frac{14}{11}$. In Verbindung mit der Abbildung genügt es zu prüfen, ob der Eckpunkt $\left(\frac{14}{11} \middle\vert 0 \middle\vert \frac{14}{11}\right)$ des Würfels außerhalb der Pyramide liegt. Da die Gleichung $\begin{pmatrix} \frac{14}{11} \\ 0 \\ \frac{14}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$ mit $t = \frac{4}{11}$ eine Lösung besitzt, ist dies nicht der Fall.	4
	Insgesamt	15

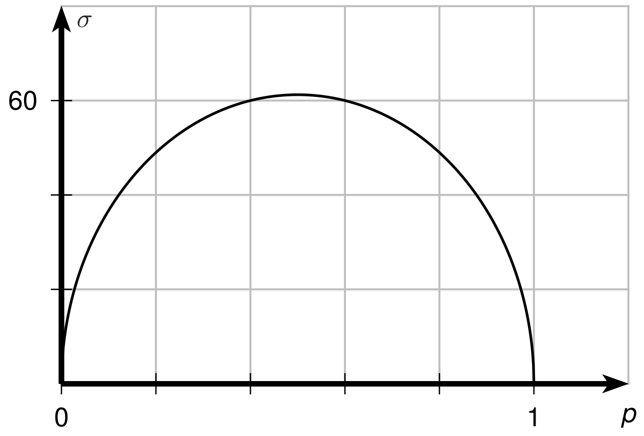
Standardbezug zur Aufgabe „Analytische Geometrie“

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen							Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
a)	3	I	I			I	I		X		
b)	2	I				I	I		X		
c)	3			II			II			X	
d)	3			II			II			X	
e)	4	III	II	III		II	II				X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (4 - 5)	**Anforderungsbereich II (6 - 8)**	**Anforderungsbereich III (3 - 4)**
5	6	4

Aufgabe 10. Stochastik

<table>
<tr><th></th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>1.a)</td><td>$P\left(\overline{L}\cap\overline{D}\right) = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$
Ereignis: Die ausgewählte Person besitzt weder einen Laptop noch einen Desktop-PC.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>D</th><th>$\overline{D}$</th><th></th></tr>
<tr><td>L</td><td>0,17</td><td>0,39</td><td>0,56</td></tr>
<tr><td>$\overline{L}$</td><td>0,16</td><td>0,28</td><td>0,44</td></tr>
<tr><td></td><td>0,33</td><td>0,67</td><td>1</td></tr>
</table>

$P\left(L\cap\overline{D}\right) = 0{,}39$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$\mu = 0{,}68 \cdot 900 = 612$
Aus $P_{0{,}68}^{900}(601 \le X \le 612) \approx 0{,}307$ und $P_{0{,}68}^{900}(602 \le X \le 612) \approx 0{,}287$ folgt $k = 11$.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>

Zu jedem Wert von p lässt sich die Standardabweichung σ berechnen, beispielsweise für $p = 0{,}4$:
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{15\,000 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = 60$</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt</td><td>15</td></tr>
</table>

Standardbezug zur Aufgabe „Stochastik“

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen							Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1. a)	3	II	II		II					X	
b)	4		I			I	I		X		
2.	4			II		II	II			X	
3.	4	III	II	III		II					X

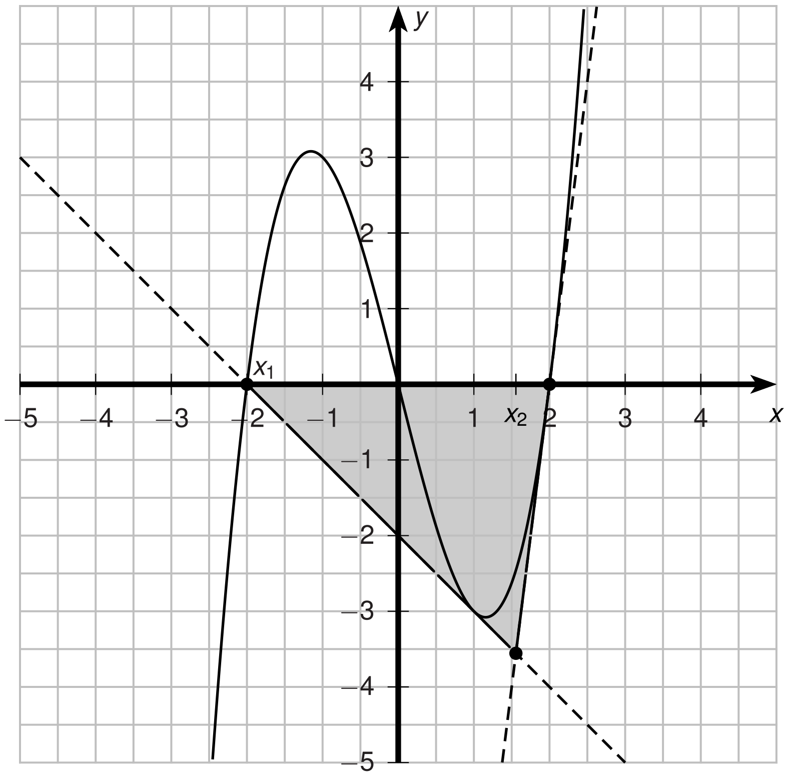
Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (4 - 5)	**Anforderungsbereich II (6 - 8)**	**Anforderungsbereich III (3 - 4)**
4	7	4

8.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

8.2.1 wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR)

Aufgabe 11. Analysis 1

	Lösungsskizze	**BE**
1.a)	$k\,(2) = 1800$, d. h. um 9:00 Uhr beträgt die momentane Änderungsrate der Anzahl der seit 7:00 Uhr eingegangenen Lesebestätigungen laut Modell 1 800 $^{1}/_{\mathrm{h}}$.	3
b)	Da $v\,(x)$ an der Stelle 8 sein Vorzeichen von plus nach minus ändert, würden sich unmittelbar nach 15:00 Uhr negative Änderungsraten ergeben, was in diesem Sachzusammenhang unmöglich ist.	3
c)	Anzahl der Lesebestätigungen: $\int\limits_3^8 k\,(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{20}{3}x^3 - 260x^2 + 2\,880x\right]_3^8 \approx 3\,333$	4
2.a)	Es ist $f_{a;b}(-x) = -ax^3 + bx$ und $-f_{a;b}(x) = -(ax^3 - bx) = -ax^3 + bx$. Damit gilt $f_{a;b}(-x) = -f_{a;b}(x)$ und somit ist $f_{a;b}$ symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.	4
b)	Es ist $f'_{a;b} = 3ax^2 - b$ und $f''_{a;b} = 6ax$. $f'_{a;b} = 0$ liefert $x = \pm\sqrt{\frac{b}{3a}}$. Einsetzen in $f'_{a;b}(\sqrt{\frac{b}{3a}}) > 0$ und $f'_{a;b}(-\sqrt{\frac{b}{3a}}) < 0$. Damit liegen für $x = \sqrt{\frac{b}{3a}}$ Tiefpunkte vor.	3
c)	Es gilt: I $f_{a;b}\,(3) = 0$ II $\int\limits_0^3 f_{a;b}\,(x)\,\mathrm{d}x = -40{,}5$ Aus I ergibt sich: $27a - 3b = 0 \Leftrightarrow b = 9a$ In II: $\int\limits_0^3 \left(ax^3 - 9ax\right)\mathrm{d}x = -40{,}5 \Leftrightarrow a \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_0^3 = -40{,}5 \Leftrightarrow -\frac{81}{4}a = -40{,}5 \Leftrightarrow$ $a = 2$ In I: $b = 18$	5

	Lösungsskizze	**BE**
d)	1. Bestimmung der Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $(2\vert 0)$. 2. Bestimmung des Schnittpunkts $(x_1\vert 0)$ der Geraden g mit der x-Achse. Bestimmung des x_2-Werts des Schnittpunkts zwischen der Tangente t und der Geraden g. 3. Die Fläche ergibt sich mit $\lvert \int\limits_{x_1}^{x_2} g(x)\,\mathrm{d}x \rvert + \lvert \int\limits_{x_2}^{2} t(x)\,\mathrm{d}x \rvert$. 	4
e)	Bezeichnet p die x-Koordinate eines beliebigen Punkts P auf dem Graphen von f, so ist nachzuweisen, dass der Punkt $\left(\frac{p}{2}\middle\vert \frac{f(p)}{2}\right)$ auf dem Graphen von h liegt: $h\left(\frac{p}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^3 - 4 \cdot \frac{p}{2} = \frac{1}{2}\left(p^3 - 4p\right) = \frac{1}{2} f\left(p\right)$	4
	Insgesamt	30

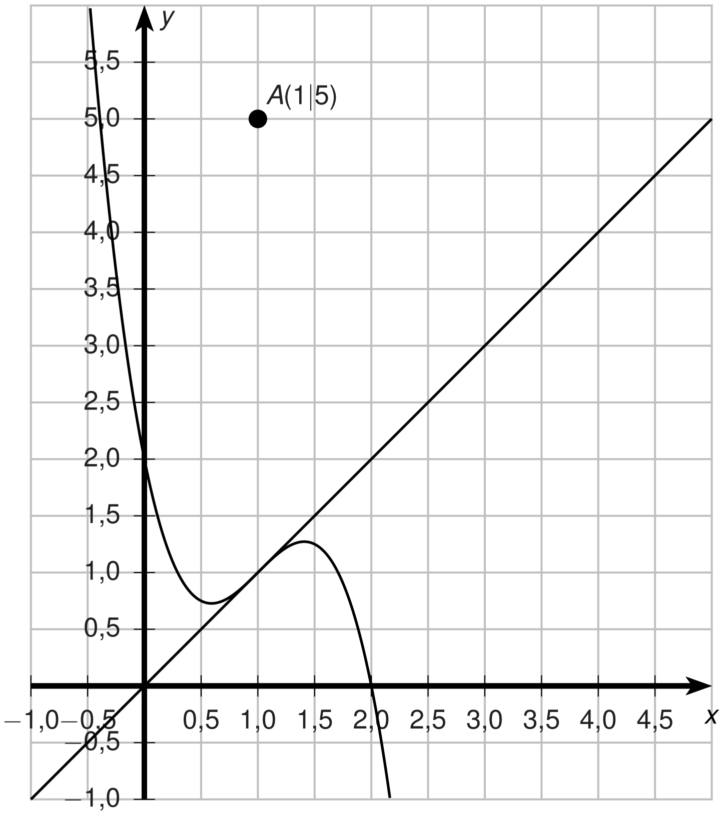
Standardbezug zur Aufgabe „Analysis 1“

Teilaufgabe		BE	allgemeine mathematische Kompetenzen							Anforderungsbereich		
			K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1.	**a)**	3	I	I				I		X		
	b)	3	II	II		II					X	
	c)	4	I	I	II	II		II			X	
2.	**a)**	4			I			I		X		
	b)	3	I					II			X	
	c)	5	II		III		II	II				X
	d)	4			II		I	II			X	
	e)	4	III	II	III		III	II				X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (6 - 8)	**Anforderungsbereich II (13 - 16)**	**Anforderungsbereich III (8 - 9)**
7	14	9

Aufgabe 12. Analysis 2

	Lösungsskizze	BE
1.a)	$f(20) \approx 328$ Die Wachstumsgeschwindigkeit beträgt 328 Algen pro Stunde.	3
b)	$F'(t) = (0{,}1t - 5) \cdot e^{\frac{t}{5}} + \left(0{,}01t^2 - t + 25\right) \cdot e^{\frac{t}{5}}$ $= \left(0{,}01t^2 - 0{,}9t + 20\right) \cdot e^{\frac{t}{5}}$ $= \frac{1}{100} \cdot (t - 50) \cdot (t - 40) \cdot e^{\frac{t}{5}}$ $= f(t)$	3
c)	Die stärkste Abnahme entspricht dem Minimum von f: $f'(x) = \frac{1}{500} \cdot e^{\frac{1}{5} \cdot x} \cdot (x^2 - 80 \cdot x + 1\,550)$ Mit $f'(x) = 0$ erhält man $x_1 \approx 32{,}93$ und $x_2 \approx 47{,}07$. Mithilfe der Abbildung erkennt man, dass für x_2 das Minimum von f vorliegt, also beträgt die Abnahmegeschwindigkeit $f(x_2) = -2\,539{,}42$.	4
d)	In den ersten 50 Stunden nach Beobachtungsbeginn nimmt die Anzahl der Algen um 125 ab. Der Anfangsbestand muss also mindestens 126 Algen sein, damit 50 Stunden nach Beobachtungsbeginn noch eine Alge vorhanden ist, die sich weiter teilen kann. $F(0) = 126$. F erfüllt diese Bedingung.	2
2.a)	II) III) ist die Funktion v um eine Einheit nach oben verschoben.	3
b)	Der Graph der Funktion u ist punktsymmetrisch zum Punkt $(1\|1)$. Daher teilt der Graph die Fläche des Quadrats, das durch $y = 2$ und $x = 2$ begrenzt wird, in zwei gleiche Teile, denn $(1\|1)$ ist der Mittelpunkt dieses Quadrats. Die Fläche des Quadrats beträgt 4 FE. Somit beträgt die gesuchte Fläche 2 FE.	3

	Lösungsskizze	**BE**
c)	$u'(x) = -6x^2 + 12x - 5$ $u''(x) = -12x + 12$ $u'''(x) = -12$ $u''(1) = -12 + 12 = 0$ $u'''(1) = -12 \neq 0$ $u(1) = 1$ Der Wendepunkt ist $(1\|1)$. 	5

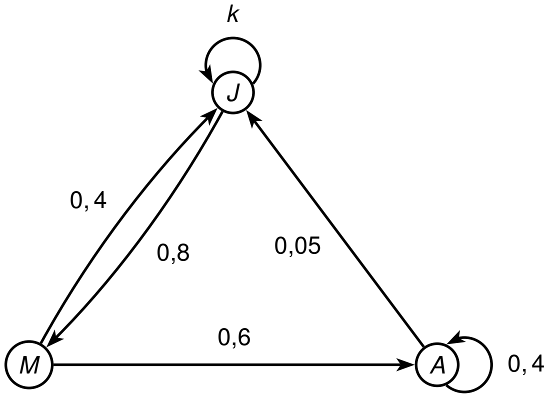
	Lösungsskizze	**BE**
d)	Steigung am Wendepunkt: $u'(1) = 1$ Die Funktion der Tangente lautet: $t(x) = x + b$ Bestimmung von b: $u(1) = 1 \rightarrow b = 0$ $t(x) = x$ Die Funktion der Senkrechten zu t durch A lautet: $s(x) = -x + d$ Bestimmung von d: $s(1) = -1 + d = 5$ $d = 6$ $s(x) = -x + 6$ Bestimmung des Schnittpunktes S zwischen $t(x)$ und $s(x)$: $-x + 6 = x$ $x = 3$ $t(3) = 3$ $S(3\|3)$ Entfernung zum Punkt A: $\overline{AS} = \sqrt{(1-3)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ Die Funktion u muss um vier Einheiten auf der x-Achse nach links verschoben werden.	7
	Insgesamt	30

Standardbezug zur Aufgabe „Analysis 2“

Teilaufgabe	**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**							**Anforderungsbereich**		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1. a)	3			I			I		X		
b)	3			II			II			X	
c)	4	II	II			II				X	
d)	2	III	II		III		II				X
e)	0			II	II		II				
f)	0			II	II		II				
2. a)	3			II		II				X	
b)	3	II				II	II			X	
c)	5			I		I	I		X		
d)	7			III		III	III				X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I **(6 - 8)**	**Anforderungsbereich II** **(13 - 16)**	**Anforderungsbereich III** **(8 - 9)**
8	13	9

Aufgabe 13. Lineare Algebra

	Lösungsskizze	**BE**
1.a)		3
b)	Für $k \geq 0$ gilt: $P^2 \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ M \\ A \end{pmatrix} \Leftrightarrow P \cdot \begin{pmatrix} 200 \cdot k \\ 160 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ M \\ A \end{pmatrix}$ $\Rightarrow 200k^2 + 64 = 66$ $\Rightarrow k = 0{,}1$	4
c)	Die Größe der Population nach n Jahren wird mit G_n bezeichnet. Es gilt: $G_{n+1} = 0{,}9 \cdot G_n$ Damit folgt $G_n = 0{,}9^n \cdot G_0$. $0{,}9^n \cdot G_0 < 0{,}2 \cdot G_0 \Leftrightarrow 0{,}9^n < 0{,}2$ Es folgt: $n > \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}9)} \approx 15{,}3$ Nach 16 Jahren ist dies also zum ersten Mal der Fall.	5
2.a)	Das Dreieck ABC hat einen rechten Winkel bei A, denn $\overline{AB}$ liegt in der xy-Ebene und C auf der z-Achse.	2
b)	$5 + z + \sqrt{3^2 + 4^2 + z^2} = \frac{1}{2} \cdot 30$ $\Rightarrow \sqrt{25 + z^2} = 10 - z$ $\Rightarrow 25 + z^2 = 100 - 20z + z^2$ $\Rightarrow z = 3{,}75$	5
c)	$B^*\ (3\|4\|0)$	1
	Insgesamt	20

Standardbezug zur Aufgabe „Lineare Algebra“

Teilaufgabe		**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**							**Anforderungsbereich**		
			K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1.	**a)**	3		I		I	I			X		
	b)	4	I		II			II			X	
	c)	5			III	II		II				X
2.	**a)**	2	I	I						X		
	b)	5			II			II			X	
	c)	1	II		II		I	I			X	

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (4 - 5)	**Anforderungsbereich II (9 - 11)**	**Anforderungsbereich III (5 - 6)**
5	10	5

Aufgabe 14. Analytische Geometrie

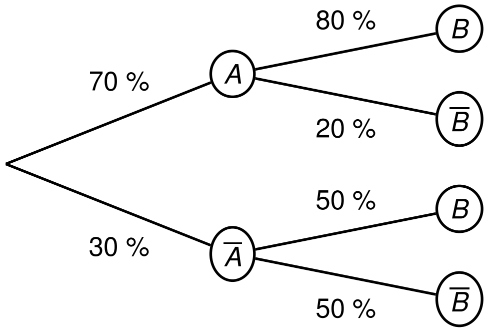
	Lösungsskizze	**BE**
a)	Inhalt einer Seitenfläche: $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{4^2+3^2}=15$ Inhalt der Oberfläche der Pyramide: $6\cdot 6+4\cdot 15=96$	4
b)	3. beschreibt eine Ebene, die Symmetrieebene der Pyramide ist. Die Koordinaten von S erfüllen Gleichung 1. nicht.	3
c)	$\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0$ liefert $n_1=0$, $\begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0$ liefert $n_3=\frac{3}{4}n_2$. Damit ist $\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E. Somit hat E eine Gleichung der Form $4y+3z=d$. Aus $C\in E$ ergibt sich $d=12$.	3
d)	I Q ist ein Punkt der Lotgerade zu E durch P. II Q liegt außerdem in E und ist damit der Schnittpunkt der Lotgerade mit E. III Der Abstand von P zu Q stimmt mit dem Abstand von P zur Grundfläche überein.	5
e)	Wegen $4k\cdot 0+4\sqrt{1-k^2}\cdot 0+3\cdot 4=12$, gilt $S\in E_k$.	1
f)	$\cos\alpha=\frac{\begin{pmatrix}4k\\4\sqrt{1-k^2}\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}4k\\4\sqrt{1-k^2}\\3\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rvert}=\frac{3}{\sqrt{16k^2+16-16k^2+9}}=\frac{3}{5}$ Damit ist die Größe des Winkels unabhängig von k.	4
	Insgesamt	20

Standardbezug zur Aufgabe „Analytische Geometrie“

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen							Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
a)	4					I	I		X		
b)	3	II		II		II	II			X	
c)	3						II			X	
d)	5	III	II	III		II	II				X
e)	1	I					I		X		
f)	4	II		II			II			X	

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (4 - 5)	**Anforderungsbereich II (9 - 11)**	**Anforderungsbereich III (5 - 6)**
5	10	5

Aufgabe 15. Stochastik

	Lösungsskizze	BE
1.a)	 A: „Ein Abonnent ist höchstens 40 Jahre alt.“ B: „Ein Abonnent hat das Komplettpaket.“	4
b)	$\frac{0{,}7\cdot 0{,}8}{0{,}7\cdot 0{,}8+0{,}3\cdot 0{,}5} \approx 79\ \%$	2
c)	X: Anzahl der Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind $P_{0,3}^{39}(X > 5) \approx 98{,}92\ \%$ $P_{0,3}^{40}(X > 5) \approx 99{,}14\ \%$ Mindestens 40 Personen müssen zufällig ausgewählt werden.	4
2.a)	Ja, die angegebene Nullhypothese ist geeignet. Der Fehler 1. Art soll vermieden werden, er soll mit höchstens 5 % Wahrscheinlichkeit auftreten, d. h. man möchte möglichst nicht in die Situation kommen, den Algorithmus anzuwenden, sofern er keine Wirkung hat.	2
b)	Es könnte eine natürliche Zahl k mit $k < 132$ geben, für die $P_{0,6}^{200}(Y \geq k) \leq 0{,}05$ gilt. $P_{0,6}^{200}(Y \geq 131) \approx 0{,}064$ Damit ist 132 die untere Grenze des Ablehnungsbereichs.	4
c)	Es ist $P_{0,61}^{200}(Y \leq 131) \approx 91{,}7\ \%$ und $P_{0,62}^{200}(Y \leq 131) \approx 86{,}3\ \%$. Die Wahrscheinlichkeit für die Zufriedenheit müsste sich auf mindestens 62 % erhöhen, damit die Fehlerwahrscheinlichkeit von 90 % für den Fehler 2. Art unterschritten wird.	4
	Insgesamt	20

Standardbezug zur Aufgabe „Stochastik“

Teilaufgabe		**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**							**Anforderungsbereich**		
			K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1.	**a)**	4		I		I	I			X		
	b)	2				II		I			X	
	c)	4	II		III			II				X
2.	**a)**	2	II	II		II					X	
	b)	4	II	II	II			II			X	
	c)	4	III	II	II			II				X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (4 - 5)	**Anforderungsbereich II (9 - 11)**	**Anforderungsbereich III (5 - 6)**
4	8	8

8.2.2 Modulares Mathematiksystem (MMS)

Aufgabe 16. Analysis 1

	Lösungsskizze	**BE**
1.a)	$f_4'(x) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = \frac{20}{3}$	3
b)	$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{7}$. $(0\mid 0)$ und $\left(\frac{4}{7}\mid\frac{148}{343}\right)$ sind die gemeinsamen Punkte der Graphen von f_1 und f_2. $f_a(0) = 0$ gilt unabhängig von a. Wegen $f_3\left(\frac{4}{7}\right) \neq f_1\left(\frac{4}{7}\right)$ liegt ausschließlich der Koordinatenursprung auf allen Graphen der Schar.	5
c)	$f_a''(x) = 0$ liefert $x = \frac{a^2}{3}$. Der Term $f_a\left(\frac{a^2}{3}\right)$ ist für $a = 3$ maximal.	5
d)	Zunächst werden die Schnittstellen der Gerade g mit dem Graphen von f_a berechnet. Die Lösung der Gleichung im zweiten Schritt gibt denjenigen Wert von a an, für den das rechtwinklige Dreieck den dreifachen Flächeninhalt besitzt wie das Flächenstück, das von g und dem Graphen von f_a eingeschlossen ist. Dies ist für $a = 2$ der Fall.	5
2.a)	Tiefpunkt $(t_1\mid y_1)$ mit $t_1 \approx 14$ und $y_1 \approx -6{,}3$ U1 hat etwa 14 Minuten nach Beobachtungsbeginn eine Geschwindigkeit von $-6{,}3$ Meter pro Minute.	3
b)	Es gilt $v(t) > 0$ für $0 < t < 6{,}25$ und $v(t) < 0$ für $6{,}25 < t \leq 30$. U1 hat somit 6,25 Minuten nach Beobachtungsbeginn den kleinsten Abstand zur Wasseroberfläche. Abstand von U1 zur Wasseroberfläche zu Beobachtungsbeginn in Metern: $10 + \int\limits_0^{6{,}25} v(t)\,\mathrm{d}t \approx 31{,}7$	5
c)	Bei der t-Koordinate t_s des einzigen Schnittpunkts der Graphen von v und w innerhalb der ersten Minuten wechselt $w(t) < v(t)$ zu $v(t) < w(t)$. Somit nimmt der vertikale Abstand von U1 und U2 bis zum Zeitpunkt t_s zu und danach wieder ab. Folglich ist $t_H = t_s$.	4
	Insgesamt	30

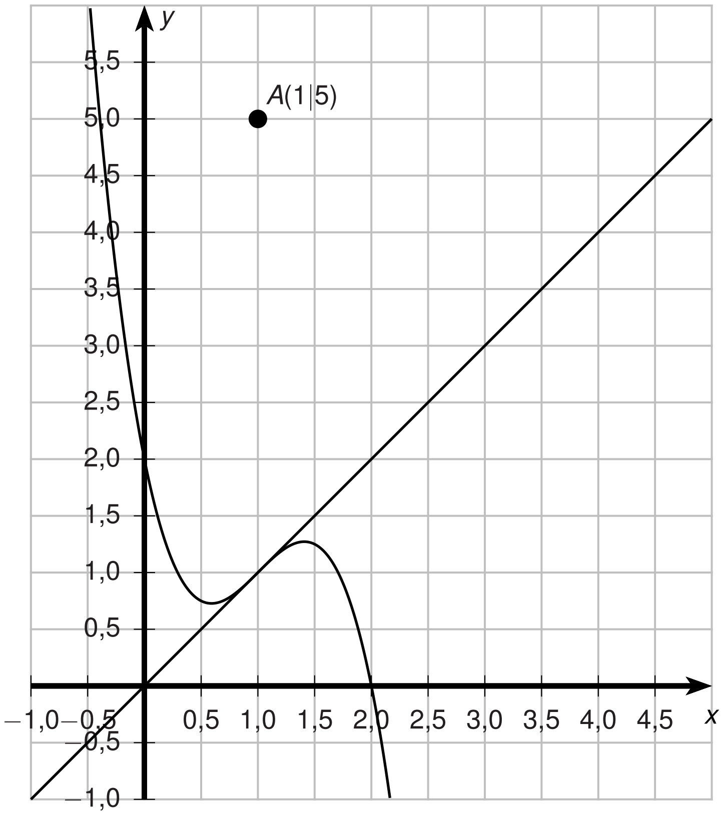
Standardbezug zur Aufgabe „Analysis 1“

Teilaufgabe	**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**							**Anforderungsbereich**		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1. a)	3						I		X		
b)	5	II		II			I			X	
c)	5	II		II			II			X	
d)	5		II	II		II				X	
2. a)	3			I	I		I		X		
b)	5			III	III		II				X
c)	4	II	III		III	III					X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (6 - 8)	**Anforderungsbereich II (13 - 16)**	**Anforderungsbereich III (8 - 9)**
6	15	9

Aufgabe 17. Analysis 2

	Lösungsskizze	BE
1.a)	$f(20) \approx 328$ Die Wachstumsgeschwindigkeit beträgt 328 Algen pro Stunde.	2
b)	$F'(t) = (0{,}1t - 5) \cdot e^{\frac{t}{5}} + \left(0{,}01t^2 - t + 25\right) \cdot e^{\frac{t}{5}}$ $= \left(0{,}01t^2 - 0{,}9t + 20\right) \cdot e^{\frac{t}{5}}$ $= \frac{1}{100} \cdot (t - 50) \cdot (t - 40) \cdot e^{\frac{t}{5}}$ $= f(t)$	2
c)	Die stärkste Abnahme entspricht dem Minimum von f: $f'(x) = \frac{1}{500} \cdot e^{\frac{1}{5} \cdot x} \cdot (x^2 - 80 \cdot x + 1\,550)$ Mit $f'(x) = 0$ erhält man $x_1 \approx 32{,}93$ und $x_2 \approx 47{,}07$. Mithilfe der Abbildung erkennt man, dass für x_2 das Minimum von f vorliegt, also beträgt die Abnahmegeschwindigkeit $f(x_2) = -2\,539{,}42$.	4
d)	In den ersten 50 Stunden nach Beobachtungsbeginn nimmt die Anzahl der Algen um 125 ab. Der Anfangsbestand muss also mindestens 126 Algen sein, damit 50 Stunden nach Beobachtungsbeginn noch eine Alge vorhanden ist, die sich weiter teilen kann. $F(0) = 126$. F erfüllt diese Bedingung.	4
e)	$\int_a^{a+3} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ $I_1 \approx [38{,}4; 41{,}4]$; $I_2 \approx [48{,}27; 51{,}27]$ *Hinweis: Eines der Intervalle ist anzugeben.*	3
2.a)	II)	2
b)	Der Graph der Funktion u ist punktsymmetrisch zum Punkt $(1\|1)$. Daher teilt der Graph die Fläche des Quadrats, das durch $y = 2$ und $x = 2$ begrenzt wird, in zwei gleiche Teile, denn $(1\|1)$ ist der Mittelpunkt dieses Quadrats. Die Fläche des Quadrats beträgt 4 FE. Somit beträgt die gesuchte Fläche 2 FE.	3

	Lösungsskizze	**BE**
c)	$u''(x) = 0$ $x = 1$ $u(1) = 1$ Der Wendepunkt ist (1|1). 	5

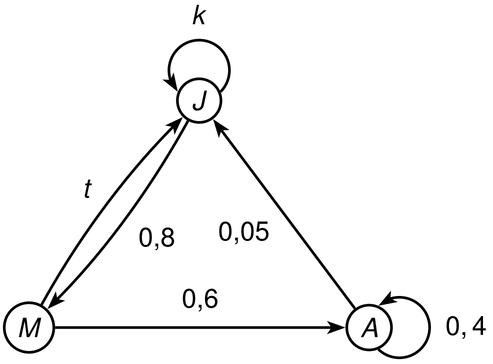
	Lösungsskizze	**BE**
d)	Steigung am Wendepunkt: $u'(1) = 1$ Die Funktion der Tangente lautet: $t(x) = x + b$ Bestimmung von b: $u(1) = 1 \rightarrow b = 0$ $t(x) = x$ Die Funktion der Senkrechten zu t durch A lautet: $s(x) = -x + d$ Bestimmung von d: $s(1) = -1 + d = 5$ $d = 6$ $s(x) = -x + 6$ Bestimmung des Schnittpunktes S zwischen $t(x)$ und $s(x)$: $-x + 6 = x$ $x = 3$ $t(3) = 3$ $S(3\|3)$ Entfernung zum Punkt A: $\overline{AS} = \sqrt{(1-3)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ Die Funktion u muss um vier Einheiten auf der x-Achse nach links verschoben werden.	5
	Insgesamt	30

Standardbezug zur Aufgabe „Analysis 2“

Teilaufgabe	**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**							**Anforderungsbereich**		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1. a)	2			I			I		X		
b)	4	II	II			II				X	
c)	2			II			II			X	
d)	4	III	II		III		II				X
e)	3			II			II			X	
2. a)	2			II		II				X	
b)	3	II				II	II			X	
c)	5			I		I	I		X		
d)	5			III		III	III				X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (6 - 8)	**Anforderungsbereich II (13 - 16)**	**Anforderungsbereich III (8 - 9)**
7	14	9

Aufgabe 18. Lineare Algebra

	Lösungsskizze	**BE**
1.a)		3
b)	Für $k \geq 0$ gilt: $P^2 \cdot \begin{pmatrix}200\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}100\\50\\A\end{pmatrix}$ $k = 0{,}3125$ $t = \frac{515}{1024}$ $A = 96$ Nach zwei Jahren gibt es 96 alte Tiere.	4
c)	Die Größe der Population nach n Jahren wird mit G_n bezeichnet. Es gilt: $G_{n+1} = 0{,}9 \cdot G_n$ Damit folgt $G_n = 0{,}9^n \cdot G_0$. $0{,}9^n \cdot G_0 < 0{,}2 \cdot G_0 \Leftrightarrow 0{,}9^n < 0{,}2$ Es folgt: $n > \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}9)} \approx 15{,}3$ Nach 16 Jahren ist dies also zum ersten Mal der Fall.	5

	Lösungsskizze	**BE**
2.a)	Das Dreieck ABC hat einen rechten Winkel bei A, denn $\overline{AB}$ liegt in der xy-Ebene und C auf der z-Achse.	2
b)	$5 + z + \sqrt{3^2 + 4^2 + z^2} = \frac{1}{2} \cdot 30$ $\Rightarrow \sqrt{25 + z^2} = 10 - z$ $\Rightarrow 25 + z^2 = 100 - 20z + z^2$ $\Rightarrow z = 3{,}75$	5
c)	$B^*\ (3\|4\|0)$	1
	Insgesamt	20

Standardbezug zur Aufgabe „Lineare Algebra“

Teilaufgabe		**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**							**Anforderungsbereich**		
			K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1.	**a)**	3		I		I	I			X		
	b)	4	I		II			II			X	
	c)	5			III	II		II				X
2.	**a)**	2	I	I						X		
	b)	5			II			II			X	
	c)	1	II		II		I	I			X	

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I **(4 - 5)**	**Anforderungsbereich II** **(9 - 11)**	**Anforderungsbereich III** **(5 - 6)**
5	10	5

Aufgabe 19. Analytische Geometrie

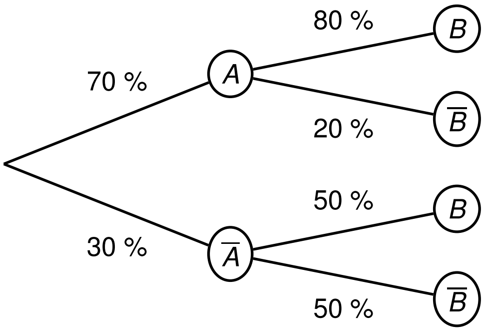
	Lösungsskizze	**BE**
a)	Inhalt einer Seitenfläche: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} = 15$ Inhalt der Oberfläche der Pyramide: $6 \cdot 6 + 4 \cdot 15 = 96$	4
b)	3. beschreibt eine Ebene, die Symmetrieebene der Pyramide ist. Die Koordinaten von S erfüllen Gleichung 1. nicht.	3
c)	$\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ liefert $n_1 = 0$, $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ liefert $n_3 = \frac{3}{4} n_2$. Damit ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E. Somit hat E eine Gleichung der Form $4y + 3z = d$. Aus $C \in E$ ergibt sich $d = 12$.	3
d)	I Q ist ein Punkt der Lotgerade zu E durch P. II Q liegt außerdem in E und ist damit der Schnittpunkt der Lotgerade mit E. III Der Abstand von P zu Q stimmt mit dem Abstand von P zur Grundfläche überein.	5
e)	Wegen $4k \cdot 0 + 4\sqrt{1 - k^2} \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$, gilt $S \in E_k$.	1
f)	$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 4k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 4k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{3}{\sqrt{16k^2+16-16k^2+9}} = \frac{3}{5}$ Damit ist die Größe des Winkels unabhängig von k. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ liefert 36,9°.	4
	Insgesamt	20

Standardbezug zur Aufgabe „Analytische Geometrie“

Teilaufgabe	**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**							**Anforderungsbereich**		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
a)	4					I	I		X		
b)	3	II		II		II	II			X	
c)	3						II			X	
d)	5	III	II	III		II	II				X
e)	1	I					I		X		
f)	4	II		II			II			X	

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (4 - 5)	**Anforderungsbereich II (9 - 11)**	**Anforderungsbereich III (5 - 6)**
5	10	5

Aufgabe 20. Stochastik

	Lösungsskizze	**BE**
1.a)	 A: „Ein Abonnent ist höchstens 40 Jahre alt.“ B: „Ein Abonnent hat das Komplettpaket.“	4
b)	$\frac{0{,}7\cdot 0{,}8}{0{,}7\cdot 0{,}8+0{,}3\cdot 0{,}5} \approx 79\ \%$	2
c)	X: Anzahl der Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind Wegen $P_{0{,}3}^{103}\,(X > 20) \approx 98{,}95\ \%$ und $P_{0{,}3}^{104}\,(X > 20) \approx 99{,}10\ \%$ müssten mindestens 104 Personen zufällig ausgewählt werden.	4
2.a)	Ja, die angegebene Nullhypothese ist geeignet. Der Fehler 1. Art soll vermieden werden, er soll mit höchstens 5 % Wahrscheinlichkeit auftreten, d. h. man möchte möglichst nicht in die Situation kommen, den Algorithmus anzuwenden, sofern er keine Wirkung hat.	2
b)	Es könnte eine natürliche Zahl k mit $k < 132$ geben, für die $P_{0{,}6}^{200}\,(Y \geq k) \leq 0{,}05$ gilt. $P_{0{,}6}^{200}\,(Y \geq 131) \approx 0{,}064$ Damit ist 132 die untere Grenze des Ablehnungsbereichs.	4
c)	Es ist $P_{0{,}61}^{200}\,(Y \leq 131) \approx 91{,}7\ \%$ und $P_{0{,}62}^{200}\,(Y \leq 131) \approx 86{,}3\ \%$. Die Wahrscheinlichkeit für die Zufriedenheit müsste sich auf mindestens 62 % erhöhen, damit die Fehlerwahrscheinlichkeit von 90 % für den Fehler 2. Art unterschritten wird.	4
	Insgesamt	20

Standardbezug zur Aufgabe „Stochastik“

Teilaufgabe		**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**							**Anforderungsbereich**		
			K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1.	**a)**	4		I		I	I			X		
	b)	2				II		I			X	
	c)	4	II		III			II				X
2.	**a)**	2	II	II		II					X	
	b)	4	II	II	II			II			X	
	c)	4	III	II	II			II				X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (4 - 5)	**Anforderungsbereich II (9 - 11)**	**Anforderungsbereich III (5 - 6)**
4	8	8

Teil IV

Anhang

9 Liste der Operatoren

Mehr noch als bei dezentralen Aufgaben, die immer im Kontext gemeinsamer Erfahrungen der Lehrkräfte und Schüler mit vorherigen Klausuren stehen, müssen zentrale Prüfungsaufgaben für die Abiturientinnen und Abiturienten eindeutig hinsichtlich des Arbeitsauftrages und der erwarteten Leistung formuliert sein. Die in den zentralen schriftlichen Abituraufgaben verwendeten Operatoren (Arbeitsaufträge) werden in der folgenden Tabelle definiert und inhaltlich gefüllt. Entsprechende Formulierungen in den Klausuren der Studienstufe sind ein wichtiger Teil der Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler auf das Abitur.
Diese Operatoren können hinsichtlich ihrer Bedeutung durch Zusätze (z. B. „rechnerisch“ oder „grafisch“) konkretisiert werden. Zugelassene Hilfsmittel dürfen zur Bearbeitung verwendet werden, sofern kein entsprechender Zusatz dem entgegensteht.
Die Verwendung eines Operators, der im Folgenden nicht genannt wird, ist möglich, wenn aufgrund der alltagssprachlichen Bedeutung dieses Operators in Verbindung mit der Aufgabenstellung davon auszugehen ist, dass die jeweilige Aufgabe im Sinne der Aufgabenstellung bearbeitet werden kann.

Operator	Erläuterung
angeben, nennen	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beschreiben	Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
erläutern	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.

Operator	**Erläuterung**
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.
bestimmen, ermitteln	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
untersuchen	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
grafisch darstellen, zeichnen	Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

10 Mathematische Schreibweisen

Analysis

Funktionen können auf viele verschiede Weisen definiert werden. Es sind z. B. die folgenden Schreibweisen gängig:

- Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$.
- Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto x^2$ mit dem Graphen G_f.
- Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}$. Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$	Summe über alle a_i von $i = 1$ bis n
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	Grenzwert der Funktion f für x gegen ∞, bzw. x_0
$f'(x_0)$	1. Ableitung von f an der Stelle x_0
$f''(x_0)$	2. Ableitung von f an der Stelle x_0
$f'''(x_0)$	3. Ableitung von f an der Stelle x_0
f', f'', f'''	erste, zweite, dritte Ableitungsfunktion von f
$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	Integral von a bis b über $f(x)$ dx
$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	Integral über $f(x)$ dx

Intervalle im Bereich der reellen Zahlen

$]a; b[$	offenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a; b]$	abgeschlossenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$[a; b[$	halboffenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$]a; b]$	halboffenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Mengen und Mengenoperationen

$\{x \mid ...\}$	Menge aller x, für die gilt ... . So können z. B. Definitionsbereiche D angegeben sein.
$\{a; b; ...\}$	Menge der Elemente $a; b; ...$
$\in$, $\notin$	Element von, nicht Element von
$\subset$, $\subseteq$	echte Teilmenge von; Teilmenge von
$\emptyset$, $\{\}$	leere Menge
$A \cap B$	Schnittmenge (A geschnitten B)
$A \cup B$	Vereinigungsmenge (A vereinigt B)
$A \backslash B$	Differenzmenge (A ohne B)

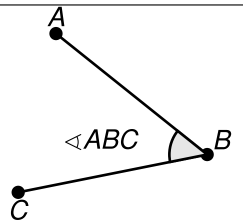
Zahlenbereiche

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}_{>0}$	Menge der positiven reellen Zahlen (ohne Null)
$\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$	Menge der positiven reellen Zahlen (mit Null)
$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	Menge der reellen Zahlen ohne Null
$[1;\infty[$, $\mathbb{R}_{\geq 1}$	Menge der reellen Zahlen größer gleich 1

Logik

$\neg$	nicht (Negation)
$\wedge$	und (Konjunktion, $A \wedge B$: die Aussage A und B)
$\vee$	oder auch (Disjunktion, $A \vee B$: die Aussage A oder B (oder beide))
$\Leftrightarrow$	logische Äquivalenz ($A \Leftrightarrow B$: Die Aussage folgt aus Aussage B und umgekehrt)
$\Rightarrow$	Implikation ($A \Rightarrow B$: Aus Aussage A folgt die Aussage B)

Geometrie

$\parallel$; $\perp$	parallel zu; senkrecht zu
AB	Gerade durch die Punkte A und B
$\overline{AB}$	Strecke mit den Endpunkten A und B, (Seite, Kante)
$\sphericalangle ABC$	Winkel zwischen den Schenkeln BA und BC, wobei im mathematisch positiven Drehsinn auf BC gedreht wird. 
$\lvert\overline{AB}\rvert$	Länge der Strecke $\overline{AB}$
$\triangle ABC$	Dreieck ABC, (weitere mögliche Bezeichnungen sind Viereck $ABCD$ und Pyramide $ABCS$)
$P \in \overline{AB}$	Der Punkt P liegt auf der Strecke $\overline{AB}$.

Vektoren und Matrizen

$\overrightarrow{AB}$	Vektor von A nach B
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	Betrag (Länge) des Vektors $\vec{AB}$
$L_{(m,n)}$	Matrix $L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & l_{mn} \end{pmatrix}$ mit m Zeilen und n Spalten
$\vec{a} \circ \vec{b}$	Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Stochastik

$P_p^n\,(X \leq k)$	Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ für eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p.
$B_{n;p}$-verteilt	binomialverteilt mit den Parametern n und p
$P_A(B)$; $P(B \mid A)$	Die Wahrscheinlichkeit von B, falls A eingetreten ist.
$[\mu - 1{,}96\sigma; \mu + 1{,}96\sigma]$	Intervallschreibweise in der Stochastik

Griechisches Alphabet

Die Prüflinge müssen in der Lage sein, griechische Buchstaben in der Formelsprache für Winkel und Parameter als Symbole für die bezeichneten Objekte zu erkennen und in ihren Lösungsdarstellungen zu verwenden.