

Teildruck

Die Verkaufsausgabe erscheint
unter der ISBN 978-3-12-735033-3

Lambacher Schweizer

Mathematik für Gymnasien

13



Lösungsheft

Bayern



Klett

Quellennachweis

Abbildungen: Alamy stock photo, Abingdon (Images & Stories), 00.1; imprint, Zusmarshausen, 1.1; 1.2; 1.3; 1.4; 1.5; 1.6; 1.7; 1.8; 1.9; 2.1; 2.2; 2.3; 2.4; 2.5; 3.1; 3.3; 3.4; 4.1; 4.2; 4.3; 4.4; 5.1; 5.2; 5.3; 5.4; 5.5; 5.6; 7.1; 8.1; 8.2; 8.3; 9.1; 9.2; 10.1; 10.2; 14.1; 14.2; 15.1; 15.2; 15.3; 15.4; 16.1; 16.2; 16.3; 17.1; 20.1; 20.2; 20.3; 21.1; 22.1; 22.2; 23.1; 23.2; 23.3; 23.4; 23.5; 23.6; 23.7; 24.1; 24.2; 24.3; 25.1; 25.2; 26.1; 26.2; 27.1; 27.2; 28.1; 28.2; 28.3; 28.4; 29.1; 29.2; 29.3; 29.4; 30.1; 30.2; 30.3; 31.1; Shutterstock.com RF, New York (Bachkova Natalia), 00.2; Uwe Alfer, Kråksmåla, Alsterbro, 3.2; 6.1; 7.2; 7.3; 11.1; 11.2; 12.1; 15.5; 15.6; 18.1; 18.2; 18.3; 18.4.

Die Reihenfolge und Nummerierung der Bild- und Textquellen im Quellennachweis erfolgt automatisch und entspricht u. U. nicht der Nummerierung der Bild- und Textquellen im Werk. Die automatische Vergabe der Positionsnummern erfolgt in der Regel von links oben nach rechts unten, ausgehend von der linken oberen Ecke der Abbildung.

1. Auflage

1 5 4 3 2 1 | 2029 28 27 26 25

Alle Drucke dieser Auflage sind unverändert und können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Druckes.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Das Gleiche gilt für die Software und das Begleitmaterial. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen oder in den Lizenzbestimmungen genannten Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und/oder in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Fotomechanische, digitale oder andere Wiedergabeverfahren nur mit Genehmigung des Verlages. Jede öffentliche Vorführung, Sendung oder sonstige gewerbliche Nutzung oder deren Duldung sowie Vervielfältigung (z. B. Kopieren, Herunterladen oder Streamen) und Verleih und Vermietung ist nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Ernst Klett Verlages erlaubt. Nutzungsvorbehalt: Alle Rechte, auch für Text- und Data-Mining (TDM), Training für künstliche Intelligenz (KI) und ähnliche Technologien, sind vorbehalten.

Lehrmedien/Lehrprogramm nach § 14 JuSchG

© Ernst Klett Verlag GmbH, Rotebühlstraße 77, 70178 Stuttgart 2025. Alle Rechte vorbehalten. www.klett.de
Das vorliegende Material dient ausschließlich gemäß § 60b UrhG dem Einsatz im Unterricht an Schulen.

Autorinnen und Autoren: Christine Altmann, Manfred Baum, Martin Bellstedt, Dr. Dieter Brandt, Gerhard Brüstle, Heidi Buck (†), Günther Dopfer, Prof. Rolf Dürr, Prof. Hans Freudigmann, Inga Giersemehl, Herbert Götz, Dieter Greulich, Dr. Frieder Haug, Manfred Herbst, Edmund Herd, Maren Herrmann, Prof. Detlef Hoche (†), Thomas Jörgens, Thorsten Jürgensen-Engl, Christine Kestler, Dr. Michael Kölle, Andreas König, Hans-Georg Kosuch, Prof. Dr. Detlef Lind, Peter Neumann, Dr. Johannes Novotný, Marion Rauscher, Rolf Reimer, Dr. Wolfgang Riemer, Dr. Rebecca Roy, Alexander Ruf, Kathrin Ruf-Oesterreicher, Rüdiger Sandmann, Prof. Dr. Torsten Schatz, Hartmut Schermuly (†), Prof. Reinhard Schmitt-Hartmann, Ulrich Schönbach, Caroline Seibold, Dr. Maximilian Selinka, Raphaela Sonntag, Heike Spielmans, Michael Stanzel, Jörg Stark, Andrea Stühler, Barbara Sy, Thomas Thiessen, Dr. Heike Tomaschek, Prof. Dr. Ingo Weidig, Alexander Wollmann, Dr. Peter Zimmermann, Prof. Manfred Zinser, Arnold Zitterbart

Entstanden in Zusammenarbeit mit dem Projektteam des Verlages.

Gestaltung: Petra Michel, Amberg

Titelbilder: Gebäude: Alamy stock photo, Abingdon (Images & Stories);
Vogel: Shutterstock.com RF, New York (Bachkova Natalia)

Satz: imprint, Zusmarshausen

Printed in Germany
ISBN 978-3-12-735033-3



Lambacher Schweizer

Mathematik für Gymnasien

13

Lösungen

Bayern

bearbeitet von
Manfred Herbst
Alexander Ruf
Caroline Seibold

Ernst Klett Verlag
Stuttgart · Leipzig · Dortmund

○ I Flächeninhalt und bestimmtes Integral	L1
1 Das bestimmte Integral	L1
2 Das bestimmte Integral als Flächenbilanz und die Integralfunktion	L4
3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	L7
4 Stammfunktionen und Integrale	L10
5 Flächeninhaltsberechnungen mit dem Integral	L14
6 Uneigentliche Integrale	L17
7 Das Integral als Gesamtänderung einer Größe	L19
8 Volumen von Rotationskörpern	L22
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen	L25
Exkursion: Partielle Integration	L31
○ II Normalverteilung	L33
1 Diskrete und stetige Zufallsgrößen	L33
2 Die Analysis der Gauß'schen Glockenfunktion	L34
3 Normalverteilung	L37
4 Die Sigma-Regeln	L41
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen	L43
Exkursion: Der Satz von de-Moivre-Laplace	L46
○ III Geraden und Ebenen im Raum	L48
1 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	L48
2 Parameterform von Geraden	L51
3 Gegenseitige Lage von Geraden	L54
4 Parameterform von Ebenen	L56
5 Normalen- und Koordinatenform von Ebenen	L59
6 Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene	L64
7 Gegenseitige Lage von Ebenen	L69
8 Abstandsbestimmungen	L73
9 Schnittwinkel	L80
10 Kugeln	L87
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen	L94
○ IV Anwendungen der Differential- und Integralrechnung	L100
1 Untersuchung verknüpfter Funktionen, Parameter	L100
2 Funktionsbestimmungen	L104
3 Extremwertprobleme	L107
4 Differential- und Integralrechnung in Sachzusammenhängen	L111
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen	L114
Exkursion: Interpolation mit Splines	L119

I Flächeninhalt und bestimmtes Integral

1 Das bestimmte Integral

Seite 6

Einstiegsaufgabe

Der Flächeninhalt A_g lässt sich mit der Formel für den Flächeninhalt eines Trapezes $A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$ bestimmen:

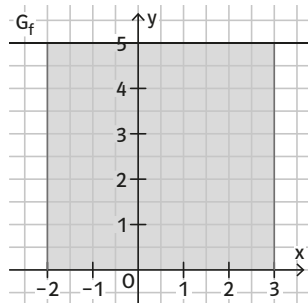
$$A_g = \frac{1}{2}(0,5 + 2) \cdot 2 = 2,5.$$

Der Flächeninhalt A_f lässt sich näherungsweise bestimmen, indem man den Flächeninhalt durch Abzählen von Kästchen abschätzt, oder durch Berechnung von Teilflächeninhalten mithilfe von Trapezen, Dreiecken oder Rechtecken.

Seite 8

1 a) $\int_{-2}^3 f(x) dx = 5 \cdot 5 = 25$

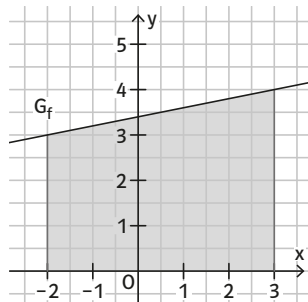
oder Abzählen von Kästchen



b) $\int_{-2}^3 f(x) dx$

$$= \frac{1}{2}(3 + 4) \cdot 5 = 17,5$$

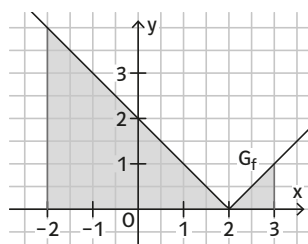
oder Abzählen von Kästchen



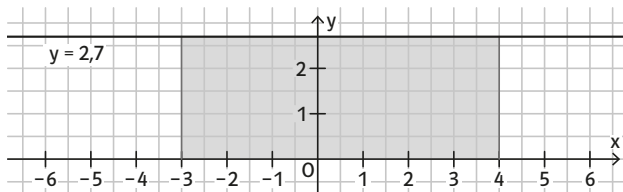
c) $\int_{-2}^3 f(x) dx$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 8,5$$

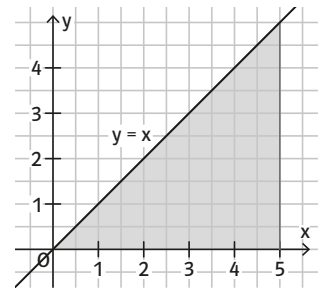
oder Abzählen von Kästchen



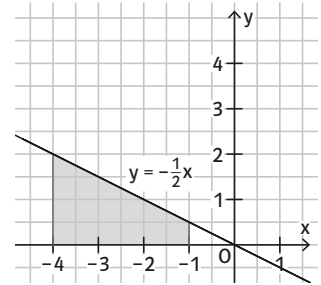
2 a) $\int_{-3}^4 2,7 dx = 7 \cdot 2,7 = 18,9$



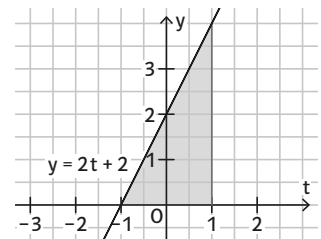
b) $\int_0^5 x dx = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 12,5$



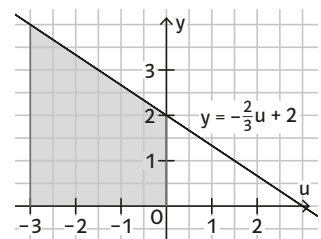
c) $\int_{-4}^{-1} \left(-\frac{1}{2}x\right) dx$
 $= \frac{1}{2}(2 + 0,5) \cdot 3 = 3,75$



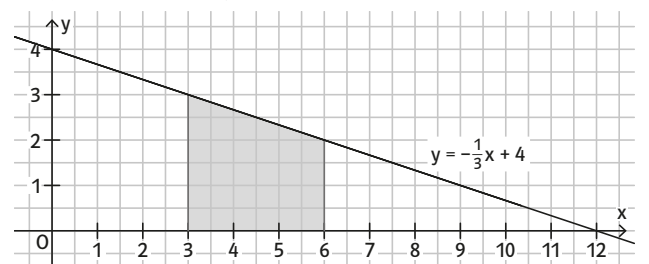
d) $\int_{-1}^1 (2t + 2) dt = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$



e) $\int_{-3}^0 \left(-\frac{2}{3}u + 2\right) du$
 $= \frac{1}{2}(4 + 2) \cdot 3 = 9$

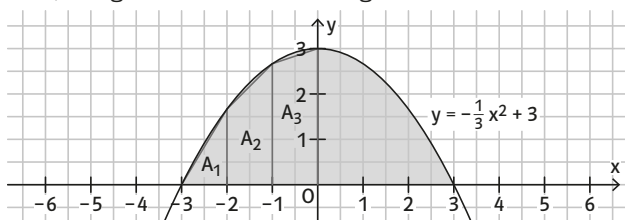


f) $\int_6^3 \left(4 - \frac{1}{3}x\right) dx = -\int_3^6 \left(4 - \frac{1}{3}x\right) dx = -\left(\frac{1}{2}(3 + 2) \cdot 3\right) = -7,5$



Seite 9

3 a) Mögliche Flächenaufteilung:



Aufgrund der Symmetrie des Graphen gilt

$$\int_{-3}^3 \left(-\frac{1}{3}x^2 + 3\right) dx \approx 2 \cdot (A_1 + A_2 + A_3).$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot (-2)^2 + 3\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} + \left[-\frac{1}{3} \cdot (-1)^2 + 3\right]\right) \cdot 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} + \frac{8}{3}\right) = \frac{13}{6}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} + 3\right) \cdot 1 = \frac{17}{6}$$

$$\int_{-3}^3 \left(-\frac{1}{3}x^2 + 3\right) dx \approx 2 \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{13}{6} + \frac{17}{6}\right) = \frac{35}{3} \approx 11,7$$

Eine Mathematiksoftware liefert $\int_{-3}^3 \left(-\frac{1}{3}x^2 + 3\right) dx = 12$.

b) Mögliche Flächenaufteilung: vgl. Abbildung.

Aufgrund der Symmetrie des Graphen gilt

$$\int_0^3 ((x-1)^2 + 2) dx \approx 2 \cdot A_1 + A_2.$$

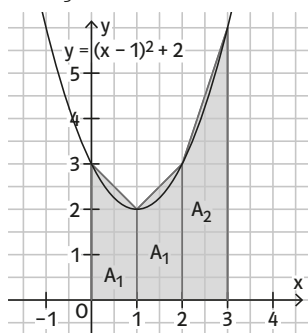
$$A_1 = \frac{1}{2} (2 + 3) \cdot 1 = 2,5$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (3 + 6) \cdot 1 = 4,5$$

$$\int_0^3 ((x-1)^2 + 2) dx$$

$$\approx 2 \cdot 2,5 + 4,5 = 9,5.$$

Eine Mathematiksoftware liefert $\int_0^3 ((x-1)^2 + 2) dx = 9$.



c) Mögliche Flächenaufteilung: vgl. Abbildung.

$$\text{Es gilt } \int_0^{-2} (-x^3) dx$$

$$= - \int_{-2}^0 (-x^3) dx$$

$$\approx - (A_1 + A_2 + A_3).$$

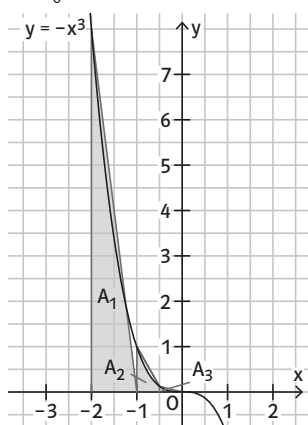
$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 = 4$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{32}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$

$$\int_0^{-2} (-x^3) dx \approx - \left(4 + \frac{9}{32} + \frac{1}{32}\right) = -\frac{69}{16} \approx -4,3.$$

Eine Mathematiksoftware liefert $\int_0^{-2} (-x^3) dx = -4$.



4 Das Integral B gehört zur Fläche unter dem Graphen G_f , denn G_f ist eine mit dem Faktor 0,5 gestreckte und um 1 nach links verschobene Normalparabel. Ein möglicher Term der zugehörigen Funktion ist $f(x) = 0,5(x+1)^2$. Die Fläche ist im Intervall $[-1; 1]$ markiert.

Das Integral G gehört zur Fläche unter dem Graphen G_g , denn G_g ist eine Gerade mit der Steigung $m = -\frac{3}{4} = -0,75$ und dem y-Achsenabschnitt $t = 1$. Ein möglicher Term der zugehörigen Funktion ist $g(x) = -\frac{3}{4}x + 1$. Die Fläche ist im Intervall $[-2; 0]$ markiert.

Das Integral J gehört zur Fläche unter dem Graphen G_h , denn G_h ist eine Hyperbel mit einer senkrechten Asymptote mit der Gleichung $x = 1,5$ und einer waagerechten Asymptote mit der Gleichung $y = 0,5$. Ein möglicher Term der zugehörigen Funktion ist $h(x) = \frac{0,5}{(x-1,5)^2} + 0,5$. Die Fläche ist im Intervall $[-1; 1]$ markiert.

Das Integral F gehört zur Fläche unter dem Graphen G_i , denn G_i ist der Graph einer Exponentialfunktion und schneidet die y-Achse in $S_y(0|1)$. Ein möglicher Term der zugehörigen Funktion ist $i(x) = e^{-0,5x}$. Die Fläche ist im Intervall $[-1,5; 0,5]$ markiert.

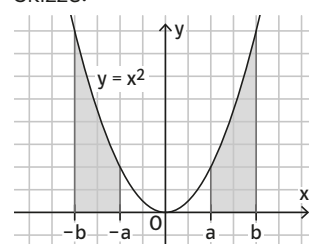
5 a) Es ist $\int_1^5 3x dx + \int_5^1 3x dx = 0$, denn es gilt

$$\int_1^5 3x dx = - \int_5^1 3x dx.$$

b) Es ist $\int_a^b x^2 dx = \int_b^a x^2 dx$

aufgrund der Symmetrie des Graphen zur y-Achse und der betrachteten Intervalle.

Skizze:



c) Es ist $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{3}x^4 dx = 0$, da $\int_a^a f(x) dx = 0$ gilt (untere Grenze des Integrals gleich obere Grenze).

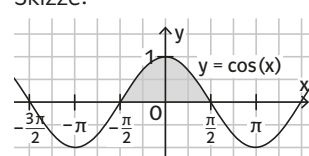
d) Es ist $\int_0^{\pi} \sin(x) dx = \int_{2\pi}^{3\pi} \sin(x) dx$, da die Funktion

$f: x \mapsto \sin(x)$ periodisch mit Periode 2π ist. Die Intervalle $[0; \pi]$ und $[2\pi; 3\pi]$ sind gleich groß und um 2π verschoben.

e) Es ist $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos(x) dx$

aufgrund der Symmetrie des Graphen zur y-Achse und der betrachteten Intervalle.

Skizze:



f) Es ist $\int_{-1}^5 3 dx - \int_2^5 3 dx = \int_{-1}^5 3 dx + \int_5^2 3 dx = \int_{-1}^2 3 dx$.

$$\begin{aligned}
 8 \text{ a) } & \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \dots + \frac{1}{4} \cdot 2^2 \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \dots + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{6}{3}\right)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^6 \frac{1}{4} \left(\frac{k}{3}\right)^2 \\
 \text{b) } & \sum_{k=0}^5 \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) = \frac{55}{16}
 \end{aligned}$$

Seite 10

9 a) Annäherung mit drei Rechteckflächen

$$(\text{Untersumme}): \int_0^3 x^2 dx \approx 1 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 = \sum_{k=0}^2 k^2 = 5.$$

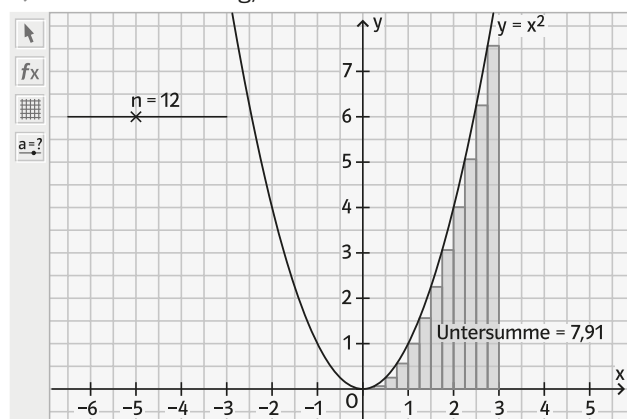
Annäherung mit sechs Rechteckflächen (Untersumme):

$$\int_0^3 x^2 dx \approx 0,5(0^2 + 0,5^2 + \dots + 2,5^2) = \sum_{k=0}^5 \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2}\right)^2 = 6,875.$$

Annäherung mit zwölf Rechteckflächen (Untersumme):

$$\int_0^3 x^2 dx \approx 0,25(0^2 + 0,25^2 + \dots + 2,75^2) = \sum_{k=0}^{11} \frac{1}{4} \left(\frac{k}{4}\right)^2 = \frac{253}{32} \approx 7,9.$$

b) Individuelle Lösung, z. B.:



$$10 \text{ a) (1) } \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^3 ((x-1)^2 + 0,5) dx$$

$$(2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(x) dx$$

$$(3) \int_0^{2\pi} h(x) dx = \int_0^{2\pi} (\sin(x) + 2) dx$$

b) (1) Der Graph G_f ist eine um 1 in x-Richtung und um 0,5 in y-Richtung verschobene Normalparabel und somit symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = 1$. Die markierte Fläche ist daher symmetrisch zu dieser Geraden und somit sind die beiden angegebenen Integrale gleich.

(2) Der Graph G_g ist symmetrisch zur y-Achse. Daher ist jedes Integral über $[-a; 0]$ gleich dem Integral über $[0; a]$ und somit sind die beiden angegebenen Integrale gleich.

(3) Der Graph G_h ist der um 2 in y-Richtung verschobene Graph der Funktion $f: x \mapsto \sin(x)$.

Da $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0$ gilt, kann der Integrand

$h: x \mapsto \sin(x) + 2$ durch den Integranden $x \mapsto 2$ ersetzt werden.

c) (1) Schätzung:

Zweimal etwa 14,5 Kästchen, also 29 Kästchen. Da eine Flächeneinheit vier Kästchen entspricht, erhält man

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = 2 \cdot \int_{-1}^3 f(x) dx \approx 29 : 4 = 7,25.$$

Näherungsweise Bestimmung:

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = 2 \cdot \int_{-1}^3 f(x) dx \approx 2 \cdot (A_1 + A_2 + A_3)$$

$$A_1 = \frac{1}{2} (0,5 + 0,75) \cdot 0,5 = 0,3125$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (0,75 + 1,5) \cdot 0,5 = 0,5625$$

$$A_3 = \frac{1}{2} (1,5 + 4,5) \cdot 1 = 3$$

$$\int_{-1}^3 f(x) dx \approx 2 \cdot (0,3125 + 0,5625 + 3) = 7,75$$

(2) Schätzung:

Zweimal etwa 5 Kästchen, also 10 Kästchen. Da ein Kästchen einer Fläche von $\frac{\pi}{8}$ entspricht, erhält man

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx = 2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx \approx 10 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{5}{4} \pi \approx 3,93.$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx = 2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx \approx 2 \cdot (A_1 + A_2)$$

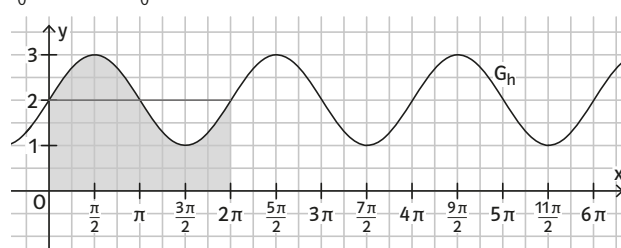
$$A_1 = \frac{1}{2} (2 + 1,5) \cdot \frac{\pi}{4} = 0,4375 \pi$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1,5 = 0,1875 \pi$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx \approx 2 \cdot (0,4375 \pi + 0,1875 \pi) = 1,25 \pi \approx 3,93$$

(3) Schätzung: $8 \cdot 4 = 32$ Kästchen. Da ein Kästchen einer Fläche von $\frac{\pi}{8}$ entspricht, erhält man

$$\int_0^{2\pi} h(x) dx = \int_0^{2\pi} 2 dx \approx 32 \cdot \frac{\pi}{8} = 4 \pi \approx 12,4 \quad (\text{mit } \pi \approx 3,1).$$



$$\int_0^{2\pi} h(x) dx = \int_0^{2\pi} 2 dx = 2 \pi \cdot 2 = 4 \pi \approx 12,57$$

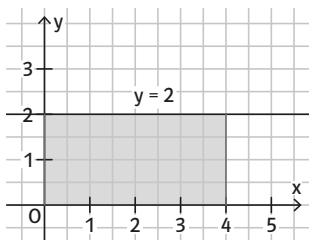
d) Eine Mathematiksoftware liefert:

$$(1) \int_{-1}^3 f(x) dx \approx 7,33, \quad (2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx = 4 \text{ und}$$

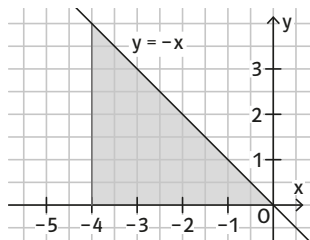
$$(3) \int_0^{2\pi} h(x) dx \approx 12,57.$$

11 Individuelle Lösung, z.B.:

a) $[0; 4]$ und $\int_0^4 2 dx$

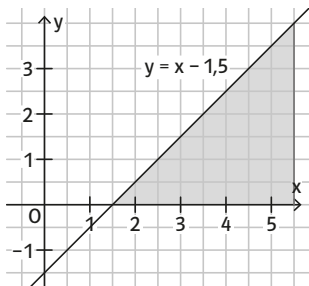


b) $[-4; 0]$ und $\int_{-4}^0 (-x) dx$



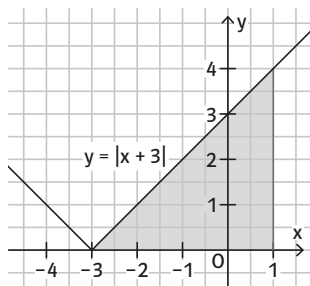
c) $[1,5; 5,5]$ und

$$\int_{1,5}^{5,5} (x - 1,5) dx$$



d) $[-3; 1]$ und

$$\int_{-3}^1 |x + 3| dx$$



13 Damit die Funktion f integrierbar ist, muss sich der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse über einem Intervall $[a; b]$ als der gemeinsame Grenzwert von Unter- und Obersumme für dieses Intervall bestimmen lassen (Annäherung durch eine Summe von Rechteckflächeninhalten).

Man betrachtet beispielsweise das Intervall $[0; 1]$.

Für den Grenzwert der Untersumme gilt $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$,

da in jedem beliebig kleinen Teilintervall auf der x -Achse eine irrationale Zahl x_i liegt, für die $f(x_i) = 0$ gilt. Alle beliebig schmalen Rechtecke haben folglich bei Annäherung von unten die Höhe $h = 0$.

Für den Grenzwert der Obersumme gilt $\lim_{n \rightarrow +\infty} O_n = 1$,

da in jedem beliebig kleinen Teilintervall auf der x -Achse eine rationale Zahl x_r liegt, für die $f(x_r) = 1$ gilt. Alle beliebig schmalen Rechtecke haben folglich bei Annäherung von oben die Höhe $h = 1$.

Entsprechend lässt sich für jedes beliebige Intervall $[a; b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, zeigen, dass kein gemeinsamer Grenzwert von Unter- und Obersumme existiert.

Die Funktion f ist daher nicht integrierbar.

2 Das bestimmte Integral als Flächenbilanz und die Integralfunktion

Seite 11

Einstiegsaufgabe

$$\int_0^2 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

Die zugehörige orange markierte Fläche mit dem Flächeninhalt 1 befindet sich oberhalb der x -Achse. Die Fläche zwischen G_f und der x -Achse im Intervall $[-2; 0]$ ist die rot markierte Fläche. Man könnte sie

dem Integral $\int_{-2}^0 \frac{1}{2} x dx$ zuordnen. Da diese Fläche eben-

so den Flächeninhalt 1 hat, aber unterhalb der x -Achse liegt, könnte man dem zugehörigen Integral den Wert -1 zuordnen.

Seite 14

1 Fehler im 1. Druck der 1. Auflage des Schulbuches. Bei Aufgabe 1 b) muss der Graph zu $y = -x^2 + 4$ abgebildet sein.

a) $\int_1^4 \frac{1}{x} dx$

b) $\int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx$

c) $\int_{-4}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) dx$

d) $\int_{-2}^1 (e^x - 0,5) dx$

2 a) $\int_{-2}^0 f(x) dx = -A_1 + A_2 = -0,3 + 0,8 = 0,5$

b) $\int_{-1}^2 f(x) dx = A_2 + A_3 = 0,8 + 2,9 = 3,7$

c) $\int_0^3 f(x) dx = A_3 - A_4 = 2,9 - 1,1 = 1,8$

d) $\int_{-2}^3 f(x) dx = -A_1 + A_2 + A_3 - A_4$
 $= -0,3 + 0,8 + 2,9 - 1,1 = 2,3$

3 a) $\int_{-2}^3 (-3) dx = -(5 \cdot 3) = -15$

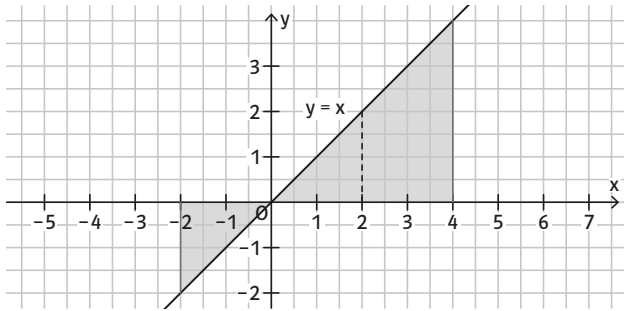
b) $\int_{-2}^3 (-x + 1) dx = \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) = 2,5$

c) $\int_{-2}^3 (|x| - 2) dx = -\left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) = -3,5$

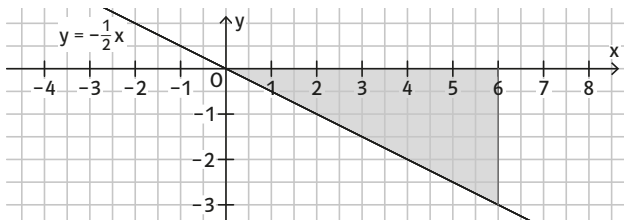
4 a) $\int_{-3}^4 (-1,5) dx = -(7 \cdot 1,5) = -10,5$

b) $\int_{-2}^2 x dx = 0$ (Symmetrie des Graphen des Integranden)

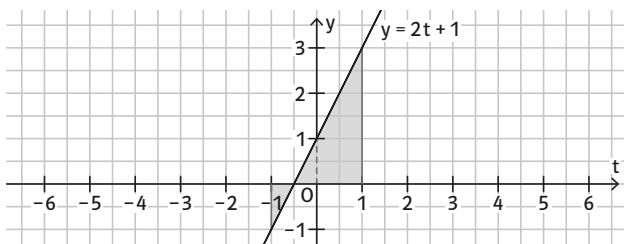
$$c) \int_{-2}^4 x dx = 0 + \frac{1}{2}(2+4) \cdot 2 = 6$$



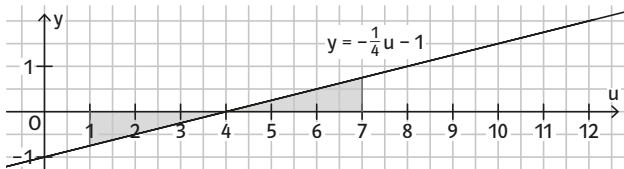
$$d) \int_0^6 \left(-\frac{1}{2}x\right) dx = -\left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\right) = -9$$



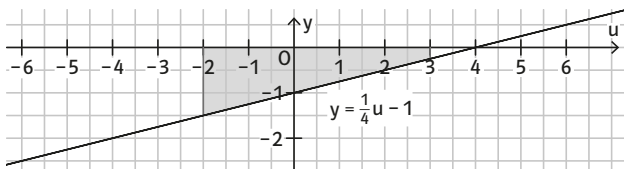
$$e) \int_{-1}^1 (2t+1) dt = 0 + \frac{1}{2}(1+3) \cdot 1 = 2$$



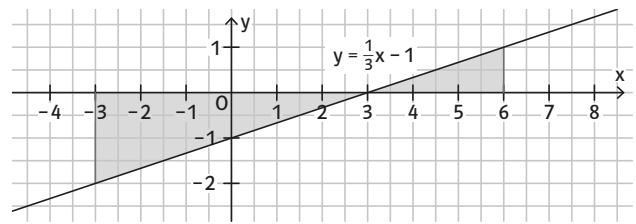
$$f) \int_1^7 \left(\frac{1}{4}u - 1\right) du = 0 \quad (\text{Symmetrie des Graphen des Integranden})$$



$$g) \int_3^{-2} \left(\frac{1}{4}u - 1\right) du = -\int_{-2}^3 \left(\frac{1}{4}u - 1\right) du \\ = -\left(-\left(\frac{1}{2}(1,5 + 0,25) \cdot 5\right)\right) = 4,375$$



$$h) \int_6^{-3} \left(\frac{1}{3}x - 1\right) dx = -\int_{-3}^6 \left(\frac{1}{3}x - 1\right) dx \\ = -\left(-\left(\frac{1}{2}(2+1) \cdot 3\right) + 0\right) = 4,5$$



5 Die Integralfunktion I_1 mit $I_1(x) = \int_1^x f(t) dt$ ist im Intervall $[1; 3]$ monoton zunehmend, da der Graph von f mit der x -Achse in diesem Intervall eine Fläche oberhalb der x -Achse einschließt. Folglich gehört G_3 zu I_1 .

6 Mit „die Fläche“ ist im Folgenden stets die Fläche zwischen dem Graphen des Integranden und der x -Achse gemeint. Die genannten Erläuterungen können individuell variieren.

$$a) \int_7^9 (-x^4 + 2) dx < 0$$

Der Graph des Integranden verläuft im Intervall $[7; 9]$ unterhalb der x -Achse.

$$b) \int_{-5}^4 t^3 dt < 0$$

Der Graph des Integranden ist punktsymmetrisch zum Ursprung, verläuft für $t < 0$ unterhalb der t -Achse und für $t > 0$ oberhalb der t -Achse. Somit hat die Fläche im Intervall $[-5; 0]$ unterhalb der t -Achse einen größeren Flächeninhalt als die Fläche im Intervall $[0; 4]$ oberhalb der t -Achse.

$$c) \int_{-10}^1 e^x dx > 0$$

Der Graph des Integranden verläuft oberhalb der x -Achse.

$$d) \int_0^{4\pi} \sin(u) du = 0$$

Der Integrand ist periodisch mit Periode 2π . Im Intervall $[0; 2\pi]$ ist der Inhalt der Fläche oberhalb der u -Achse gleich dem Inhalt der Fläche unterhalb der u -Achse.

$$e) \int_{-3}^3 (-x^3 - 1) dx < 0$$

Da der Graph der Funktion f mit $f(x) = -x^3$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist, gilt $\int_{-3}^3 (-x^3) dx = 0$. Verschiebt

man den zugehörigen Graphen um -1 in y -Richtung, vergrößert sich die Fläche unterhalb der x -Achse, die Fläche oberhalb der x -Achse verkleinert sich.

$$f) \int_{-3}^{-1} (-(t+2)^2 + 4) dt > 0$$

Der Graph des Integranden ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(-2|4)$ und den Schnittpunkten mit der t -Achse $(-4|0)$ und $(0|0)$. Er verläuft im Intervall $[-3; -1]$ oberhalb der t -Achse.

$$g) \int_0^{-5} (-e^x + 1) dx = - \int_{-5}^0 (-e^x + 1) dx < 0$$

Wird der Graph der Funktion $h: x \mapsto e^x$ an der x -Achse gespiegelt und um 1 in y -Richtung verschoben, so geht er durch den Ursprung und verläuft für $x < 0$ oberhalb der x -Achse. Dies ergibt den Graphen der Funktion

$$f: x \mapsto -e^x + 1. \text{ Damit gilt } \int_{-5}^0 (-e^x + 1) dx > 0.$$

$$h) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(u)) du < 0$$

Der Graph des Integranden verläuft im Intervall $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ unterhalb der u -Achse.

Seite 15

7 Individuelle Lösung, z.B.:

a) $a = -1$ und $b = 1$

Allgemein: $a = -b$.

b) $a = -2$ und $b = 0$

Allgemein: $a + 1 = -1 - b$.

c) $a = 2$ und $b = 6$

Allgemein: $a - 4 = 4 - b$.

d) $a = -\pi$ und $b = \pi$

Allgemein: $a = b - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

e) $a = -2$ und $b = 2$

Allgemein: $a = -b$.

f) $a = -3$ und $b = 3$

Allgemein: $a = -b$.

g) $a = 1$ und $b = 3$

Allgemein: $a - 2 = 2 - b$.

h) $a = -\pi$ und $b = \pi$

Allgemein: $a = b - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

8 a) $I_1(1) = 0$ ist wahr, da die untere Grenze a einer Integralfunktion I_a stets eine Nullstelle von I_a ist.

b) $I_1(x) < 0$ für $x \in [2; 3]$ ist falsch, da der Graph G_f mit der t -Achse im Intervall $[2; 3]$ eine Fläche oberhalb der x -Achse einschließt.

c) $I_1(0) < 0$ ist wahr, da der Graph G_f mit der t -Achse im Intervall $[0; 1]$ eine Fläche oberhalb der t -Achse einschließt, hier aber „nach links“ integriert wird, d.h., die obere Integrationsgrenze ist kleiner als die untere.

d) $I_1(-1) = I_1(3)$ ist falsch. Die Flächen zwischen G_f und der t -Achse haben in den Intervallen $[-1; 1]$ und $[1; 3]$ zwar den gleichen Flächeninhalt, aber $I_1(-1)$ ist negativ, da die obere Integrationsgrenze kleiner ist als die untere.

e) „ I_1 besitzt eine Nullstelle in $]3; +\infty[$ “ ist wahr, da $I_1(1) = 0$ ist, I_1 für $1 < x < 3$ zunimmt sowie positive Funktionswerte annimmt und für $x > 3$ nur noch abnimmt. Die Fläche, die G_f im Intervall $]3; x[$ mit der t -Achse einschließt, liegt unterhalb der t -Achse und ihr Flächeninhalt wird größer als der der eingeschlossenen Fläche im Intervall $[1; 3]$.

12 a) Der Graph von f mit $f(x) = \cos(x)$ ist punktsymmetrisch zu $(\frac{\pi}{2} | 0)$. Da die Integrationsgrenzen symmetrisch zu $x = \frac{\pi}{2}$ liegen, hat das Integral den Wert null.

b) Der Graph von f mit $f(x) = x^2$ ist achsensymmetrisch zur y -Achse. Da die Integrationsintervalle symmetrisch zu $x = 0$ liegen, sind beide Integrale gleich groß.

c) Der Graph von f mit $f(x) = 3x^2$ ist achsensymmetrisch zur y -Achse. Da die Integrationsgrenzen symmetrisch zu

$x = 0$ liegen, gilt $\int_{-4}^0 3x^2 = \int_0^4 3x^2$ und damit

$$\int_{-4}^4 3x^2 dx = 2 \cdot \int_0^4 3x^2 dx.$$

d) Der Graph von f mit $f(x) = (x - 2)^3$ ist punktsymmetrisch zu $(2 | 0)$, da er aus dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = x^3$ durch Verschiebung um 2 in x -Richtung entsteht. Da die Integrationsgrenzen symmetrisch zu $x = 2$ liegen, hat das Integral den Wert null.

13 Die Integralfunktion I_0 mit $I_0(x) = \int_0^x f(t) dt$ ist im

Intervall $[0; 1]$ zunehmend, da der Graph von f mit der x -Achse in diesem Intervall eine Fläche oberhalb der x -Achse einschließt.

Folglich gehört G_1 nicht zu I_0 .

Der Inhalt der Fläche, die der Graph von f im Intervall $[0; 1]$ mit der x -Achse einschließt, ist kleiner als 1 (Kästchen zählen). Folglich gilt mit $I_0(0) = 0$: $I_0(1) < 1$.

Daher gehört G_3 nicht zu I_0 . Der gesuchte Graph ist folglich G_2 .

Seite 16

$$14 a) \int_0^b 2 dx = b \cdot 2$$

$$2b = 7 \Leftrightarrow b = 3,5$$

$$b) \int_0^b x dx = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b$$

$$\frac{1}{2}b^2 = 8 \Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow b = -4 \text{ oder } b = 4.$$

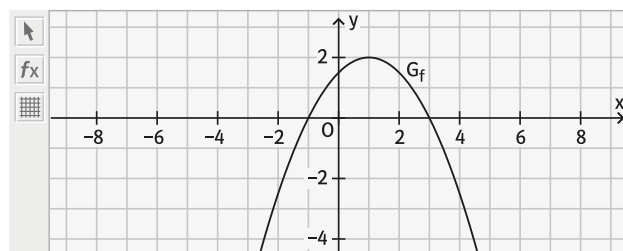
$$c) \int_{-3}^b 5x^3 dx = 0$$

Damit das Integral gleich null ist, muss $b = 3$ sein, da der Graph des Integranden punktsymmetrisch zum Ursprung ist, oder $b = -3$.

$$d) \int_0^b \sin(x) dx = 0$$

$b = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$, da der Graph G des Integranden periodisch mit Periode 2π verläuft und im Intervall $[0; 2\pi]$ die von G und der x -Achse eingeschlossenen Flächen oberhalb und unterhalb der x -Achse den gleichen Flächeninhalt haben.

15 a)



b) Individuelle Lösung, z.B.:

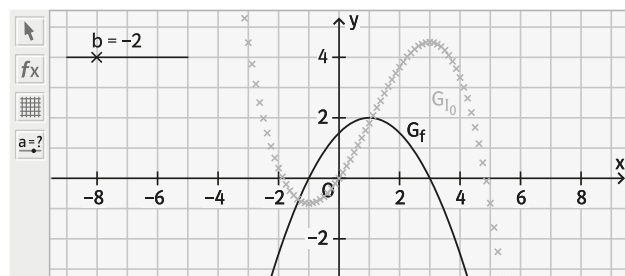
$$I_0(1) \approx 1,83; I_0(3) = 4,5; I_0(5) \approx -0,83; I_0(-1) \approx -0,83$$

c) Hier wird „nach links“ integriert, d.h., die obere Integrationsgrenze ist kleiner als die untere. Daher ist der

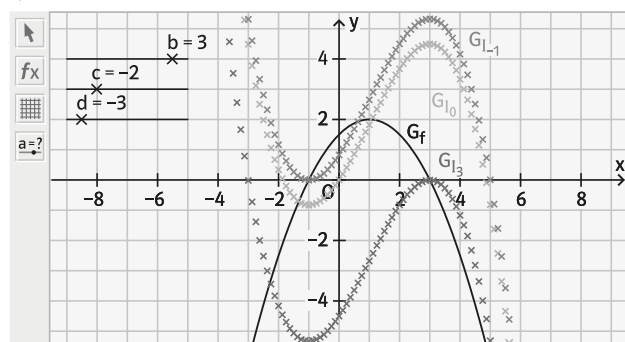
Wert $I_0(-1)$ negativ bei einer zugehörigen eingeschlossenen Fläche oberhalb der x-Achse.

d) Die von G_f und der x-Achse eingeschlossene Fläche liegt im Intervall $[0; 3]$ oberhalb der x-Achse, d.h., I_0 ist in $[0; 3]$ streng monoton zunehmend. Die von G_f und der x-Achse eingeschlossene Fläche im Intervall $[3; b]$, $b > 3$, liegt unterhalb der x-Achse. Daher ist I_0 in $[3; b]$ streng monoton abnehmend. Somit hat I_0 bei $x = 3$ ein lokales Maximum.

e)



f)



Die Graphen von I_{-1} und I_3 entstehen aus dem Graphen von I_0 durch Verschiebung in y-Richtung.

Alle drei Graphen haben daher ein Maximum bei $x = 3$ und ein Minimum bei $x = -1$. Sie zeigen alle das gleiche Monotonieverhalten und für jeden Wert von x haben alle Graphen die gleiche Steigung.

Es gilt also $I_0(x) = I_{-1}(x) - c = I_3(x) + d$ und $I'_0(x) = I'_{-1}(x) = I'_3(x)$.

Die jeweiligen Schnittpunkte der Graphen mit den Koordinatenachsen sind verschieden, d.h., die Lage der Graphen im Koordinatensystem ist unterschiedlich.

16 Die Funktionswerte von I_0 sind im Intervall $[-\pi; 0[$ positiv, da hier „nach links“ integriert wird.

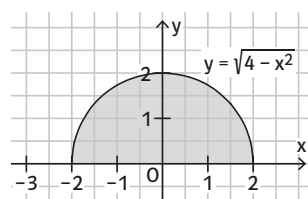
Die Fläche zwischen G_f und der x-Achse liegt in diesem

Intervall unterhalb der x-Achse. Daher gilt $\int_x^0 \sin(t) dt < 0$

für $x \in [-\pi; 0[$ und somit $I_0(x) = \int_0^x \sin(t) dt > 0$ für

$x \in [-\pi; 0[$ (obere Grenze ist kleiner als untere Grenze).

19



$$\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{1}{2} \pi \cdot 2^2 = 2\pi \approx 6,3$$

3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Seite 17

Einstiegsaufgabe

a) $\int_0^{10} (-0,9x + 9) dx = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 = 45$

b) Für $x \in [0; 10]$:

$$\begin{aligned} a(x) &= \int_0^x (-0,9t + 9) dt \\ &= \frac{1}{2} (9 - (-0,9x + 9)) \cdot x + (-0,9x + 9) \cdot x \\ &= \frac{1}{2} (9 + (-0,9x + 9)) \cdot x = -0,45x^2 + 9x \end{aligned}$$

Für $x > 10$:

$$\begin{aligned} a(x) &= \int_0^x (-0,9t + 9) dt = 45 - \left(\frac{1}{2} (x - 10) \cdot (-(-0,9x + 9)) \right) \\ &= -0,45x^2 + 9x \end{aligned}$$

Für $x < 0$:

$$\begin{aligned} a(x) &= \int_0^x (-0,9t + 9) dt \\ &= -\left(\frac{1}{2} ((-0,9x + 9) - 9) \cdot (-x) + 9 \cdot (-x) \right) \\ &= -\left(\frac{1}{2} ((-0,9x + 9) + 9) \cdot (-x) \right) = -0,45x^2 + 9x \end{aligned}$$

Die Funktion a mit $a(x) = -0,45x^2 + 9x$ ist eine Stammfunktion von f .

Seite 19

1 a) $\int_0^4 2x dx = [x^2]_0^4 = 4^2 - 0 = 16$

b) $\int_{-1}^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 = 3$

c) $\int_1^3 \frac{1}{9} x^2 dx = \left[\frac{1}{9} x^3 \right]_1^3 = \frac{1}{9} \cdot 3^3 - \frac{1}{9} \cdot 1^3 = \frac{26}{9}$

d) $\int_{100}^{150} 3x dx = \left[\frac{3}{2} x^2 \right]_{100}^{150} = \frac{3}{2} \cdot 150^2 - \frac{3}{2} \cdot 100^2 = 150$

e) $\int_{-1}^1 2x^3 dx = \left[\frac{1}{2} x^4 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \cdot 1^4 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^4 = 0$

f) $\int_{-2}^{-1} (-x^4) dx = \left[-\frac{1}{5} x^5 \right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{5} \cdot (-1)^5 + \frac{1}{5} \cdot (-2)^5 = -\frac{31}{5} = -6,2$

g) $\int_{-2}^0 (-x^2 + 1) dx = \left[-\frac{1}{3} x^3 + x \right]_{-2}^0 = 0 - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - 2 \right) = -\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad \int_{-4}^{2,5} \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) dx &= \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-4}^{2,5} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2,5^3 + \frac{1}{2} \cdot 2,5^2 - \left(\frac{1}{6}(-4)^3 + \frac{1}{2}(-4)^2\right) = \frac{403}{48} \end{aligned}$$

$$2 \text{ a)} \quad \int_{-2}^4 at^2 dt = \left[\frac{1}{3}at^3\right]_{-2}^4 = \frac{1}{3}a \cdot 4^3 - \frac{1}{3}a(-2)^3 = 24a$$

$$\text{b)} \quad \int_1^5 a dx = [ax]_1^5 = a \cdot 5 - a \cdot 1 = 4a$$

$$\text{c)} \quad \int_{-2}^2 au^3 du = \left[\frac{1}{4}au^4\right]_{-2}^2 = \frac{1}{4}a \cdot 2^4 - \frac{1}{4}a(-2)^4 = 0$$

$$\text{d)} \quad \int_{-1}^1 a^4 t^2 dt = \left[\frac{1}{3}a^4 t^3\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}a^4 \cdot 1^3 - \frac{1}{3}a^4(-1)^3 = \frac{2}{3}a^4$$

$$3 \text{ a)} \quad \int_0^z x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^z = \frac{1}{2}z^2 - 0 = \frac{1}{2}z^2$$

$$\frac{1}{2}z^2 = 18 \Leftrightarrow z^2 = 36 \Leftrightarrow z = 6, \text{ da } z > 0$$

$$\text{b)} \quad \int_1^z 4x dx = [2x^2]_1^z = 2z^2 - 2 \cdot 1^2 = 2z^2 - 2$$

$$2z^2 - 2 = 30 \Leftrightarrow z^2 = 16 \Leftrightarrow z = 4, \text{ da } z > 0$$

$$\text{c)} \quad \int_z^{10} 2x dx = [x^2]_z^{10} = 10^2 - z^2 = 100 - z^2$$

$$100 - z^2 = 19 \Leftrightarrow z^2 = 81 \Leftrightarrow z = 9, \text{ da } z > 0$$

$$\text{d)} \quad \int_0^{2z} 0,4 dx = [0,4x]_0^{2z} = 0,4 \cdot 2z - 0 = 0,8z$$

$$0,8z = 8 \Leftrightarrow z = 10$$

4 Anna vergisst ein Minus vor $(-2)^2$ beim Einsetzen der unteren Grenze.

Ben rechnet richtig.

Catharina vergisst ein Minus vor $(-2)^2$ beim Einsetzen der unteren Grenze.

Dennis vergisst jeweils ein Minus vor $(-1)^2$ und vor $(-2)^2$ beim Einsetzen der Grenzen.

$$\begin{aligned} 5 \quad I_0(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^x (3t^2 + t - 2) dt \\ &= \left[t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 2t\right]_0^x = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \end{aligned}$$

$$6 \text{ a)} \quad f'(x) = x^3 - x^2$$

$$\text{b)} \quad f'(x) = \frac{1}{5}x - 3x^2$$

$$\text{c)} \quad f'(x) = \sin(x)$$

$$\text{d)} \quad f'(t) = e^t$$

$$\begin{aligned} 9 \text{ a)} \quad \int_1^3 (2x - 1)^2 dx &= \int_1^3 (4x^2 - 4x + 1) dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x\right]_1^3 \\ &= \frac{4}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 - \left(\frac{4}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1\right) \\ &= \frac{62}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \int_{-4}^4 (-x(x^2 - 3x + 2)) dx &= \int_{-4}^4 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2\right]_{-4}^4 \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 4^4 + 4^3 - 4^2 \\ &\quad - \left(-\frac{1}{4}(-4)^4 + (-4)^3 - (-4)^2\right) \\ &= 128 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \int_2^{-1} (x^2(16x - 12) + 2) dx &= - \int_{-1}^2 (16x^3 - 12x^2 + 2) dx \\ &= - \left[4x^4 - 4x^3 + 2x\right]_{-1}^2 \\ &= - (4 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 \\ &\quad - (4(-1)^4 - 4(-1)^3 + 2(-1))) \\ &= -30 \end{aligned}$$

10 a) $F(x) = 0$ für $x = -1$ und $x = 5$

b) $f(x) = 0$ für $x = -1$ und $x = 3$

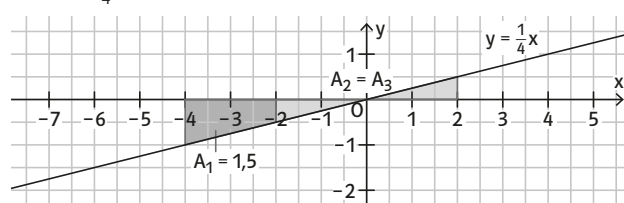
c) $f(x) > 0$ für $x \in]-1; 3[$

d) $f'(x) < 0$ für $x \in]1; +\infty[$

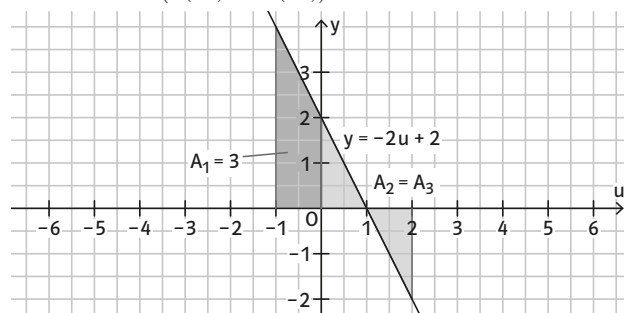
$$\text{e)} \quad \int_1^3 f(x) dx = F(3) - F(1) = 2 - 1 = 1$$

f) G_F ist rechtsgekrümmt in $[1; 3]$. Somit ist $F''(x) = f'(x) < 0$ in $[1; 3]$ und damit die Funktion f streng monoton abnehmend in $[1; 3]$. Folglich gilt $f(1) < f(3)$ nicht.

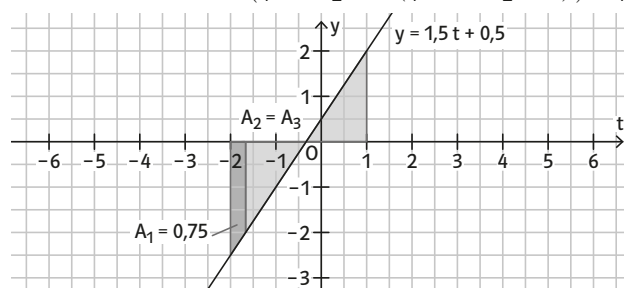
$$11 \text{ a)} \quad \int_{-4}^2 \frac{1}{4}x dx = \left[\frac{1}{8}x^2\right]_{-4}^2 = \frac{1}{8} \cdot 2^2 - \frac{1}{8}(-4)^2 = -\frac{3}{2}$$



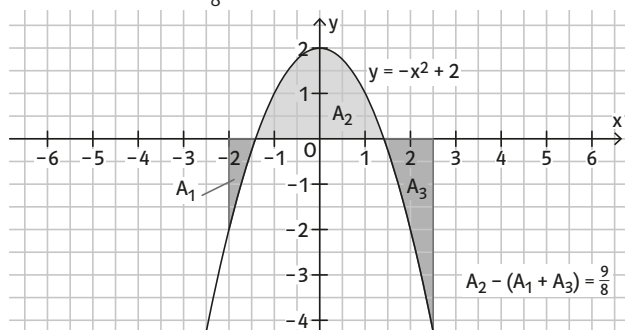
$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \int_{-1}^2 (-2u + 2) du &= [-u^2 + 2u]_{-1}^2 \\ &= -2^2 + 2 \cdot 2 - (-(-1)^2 + 2(-1)) = 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \int_1^{-2} (1,5t + 0,5) dt &= - \int_{-2}^1 (1,5t + 0,5) dt = - \left[\frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t\right]_{-2}^1 \\ &= - \left(\frac{3}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 - \left(\frac{3}{4}(-2)^2 + \frac{1}{2}(-2)\right)\right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{d) } \int_{-2}^{2,5} (-x^2 + 2) dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_{-2}^{2,5} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 2,5^3 + 2 \cdot 2,5 - \left(-\frac{1}{3}(-2)^3 + 2(-2) \right) \\ &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$



Seite 20

$$\begin{aligned} \text{12 a) } F(x) &= -x + \frac{2}{x} = -x + 2 \cdot x^{-1} \\ F'(x) &= -1 - 2 \cdot x^{-2} = -1 - \frac{2}{x^2} \\ \int_{-2}^{-1} \left(-1 - \frac{2}{x^2} \right) dx &= F(-1) - F(-2) \\ &= -(-1) + \frac{2}{-1} - \left(-(-2) + \frac{2}{-2} \right) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } F(t) &= \frac{2t}{2t+1} \\ F'(t) &= \frac{2 \cdot (2t+1) - 2t \cdot 2}{(2t+1)^2} = \frac{4t+2-4t}{(2t+1)^2} = \frac{2}{(2t+1)^2} \\ \int_0^4 \frac{2}{(2t+1)^2} dt &= F(4) - F(0) = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 4 + 1} - 0 = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } F(x) &= x^2 \cdot \sin(-x) \\ F'(x) &= 2x \cdot \sin(-x) + x^2 \cdot \cos(-x) \cdot (-1) \\ &= x(2 \sin(-x) - x \cos(-x)) \\ \int_{-2}^{-1} x(2 \sin(-x) - x \cos(-x)) dx &= F(-1) - F(-2) \\ &= (-1)^2 \cdot \sin(1) - (-2)^2 \cdot \sin(2) = \sin(1) - 4 \sin(2) \approx -2,8 \end{aligned}$$

13 a) $F(x) = x^2 + 2$
 $x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2$. Diese Gleichung hat keine Lösung.
 $\Rightarrow$ Die Funktion F besitzt keine Nullstelle und kann folglich keine Integralfunktion sein.
 $G(x) = x^2 - 3x$
 $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 3$
 $\Rightarrow$ Die Funktion G besitzt zwei Nullstellen und kann folglich eine Integralfunktion sein.
 $H(x) = 3 \neq 0$
 $\Rightarrow$ Die Funktion H besitzt keine Nullstelle und kann folglich keine Integralfunktion sein.
b) Da jede Integralfunktion $I_a(x)$ eine Nullstelle bei $x = a$ besitzt, muss eine Stammfunktion einer Funktion mindestens eine Nullstelle besitzen, damit sie auch eine Integralfunktion dieser Funktion sein kann.

14 a) $F(0) = 2$ ist wahr, da G_f die y -Achse in $(0|2)$ schneidet.
b) Da eine Integralfunktion eine Nullstelle besitzen muss, kann F keine Integralfunktion von f sein. Die Aussage ist falsch.
c) Da die Funktion G die Nullstelle $x = 0$ und zwei weitere Nullstellen besitzt, ist sie eine Integralfunktion von f .

$$\text{d) } \int_{-2}^2 f(x) dx = F(2) - F(-2) = 0 < 2$$

Die Ungleichung ist falsch.

e) $F(-2) \approx 0,4$ und $f(-2) = 0 \Rightarrow F(-2) + f(-2) \approx 0,4 < 1$
 Die Ungleichung ist falsch.

$$\text{15 a) } \int_0^{\ln(2)} f(x) dx = F(\ln(2)) - F(0) = 2 - 1,5 = 0,5$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{0,75}^{-1} f(x) dx &= - \int_{-1}^{0,75} f(x) dx = -(F(0,75) - F(-1)) \\ &\approx -(0,2 - 1,6) = 1,4 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int_{-1,5}^{0,5} f(x) dx = F(0,5) - F(-1,5) \approx 1,6 - 0,8 = 0,8$$

$$\text{d) } \int_{-1,5}^{0,5} f(x) dx = F(0,5) - F(-1,5) \approx 0,3 - 1 = -0,7$$

$$\text{16 a) } I_{-2}(x) = \int_{-2}^x 3t^2 dt = [t^3]_{-2}^x = x^3 - (-2)^3 = x^3 + 8$$

Man erhält also die Integralfunktion $I_{-2}: x \mapsto x^3 + 8$.Nullstelle: $I_{-2}(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.Extrema: $I'_{-2}(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.An der Stelle $x = 0$ liegt kein VZW vor; also hat die Funktion I_{-2} keine Extremstellen.

$$\text{b) } I_2(x) = \int_2^x t^3 dt = \left[\frac{1}{4}t^4 \right]_2^x = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4} \cdot 2^4 = \frac{1}{4}x^4 - 4$$

Man erhält also die Integralfunktion $I_2: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 4$.Nullstellen: $I_2(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 16$ $\Leftrightarrow x = -2$ oder $x = 2$.Extrema: $I'_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.An der Stelle $x = 0$ liegt ein VZW vor; also hat die Funktion I_2 an dieser Stelle eine Extremstelle.

$$\begin{aligned} \text{c) } I_{-0,5}(x) &= \int_{-0,5}^x (-8t + 1) dt = [-4t^2 + t]_{-0,5}^x \\ &= -4x^2 + x - (-4(-0,5)^2 - 0,5) = -4x^2 + x + 1,5 \end{aligned}$$

Man erhält also die Integralfunktion

 $I_{-0,5}: x \mapsto -4x^2 + x + 1,5$.Nullstellen: $I_{-0,5}(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + x + 1,5 = 0$

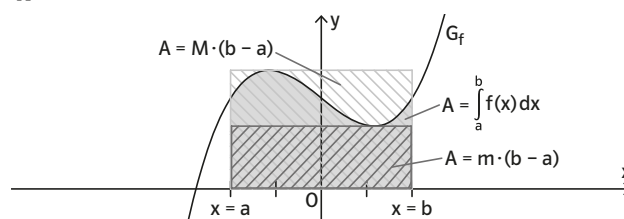
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{1 + 24}}{-8} \text{ oder } x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 24}}{-8} \Leftrightarrow x = \frac{-1 - 5}{-8}$$

$$\text{oder } x = \frac{-1 + 5}{-8} \Leftrightarrow x = 0,75 \text{ oder } x = -0,5$$

$$\text{Extrema: } I'_{-0,5}(x) = 0 \Leftrightarrow -8x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$$

An der Stelle $x = \frac{1}{8}$ liegt ein VZW vor; also hat die Funktion $I_{0,5}$ an dieser Stelle eine Extremstelle.

17

Die dunkel schraffierte Fläche hat stets einen kleineren Inhalt als die Fläche zwischen G_f und der x -Achse in

$[a; b]$ und die hell schraffierte Fläche hat stets einen größeren Inhalt als die Fläche zwischen G_f und der x-Achse.

Somit gilt $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

Gilt $f(x) \leq 0$ im Intervall $[a; b]$, so gilt $m \leq 0$, $M \leq 0$

sowie $\int_a^b f(x) dx \leq 0$ und man erkennt mithilfe einer

Skizze analog der zum Fall $f(x) \geq 0$, dass

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq |m \cdot (b-a)| \text{ gilt bzw. } m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Analog erhält man $|M \cdot (b-a)| \geq \left| \int_a^b f(x) dx \right|$ bzw.

$$\int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b-a) \text{ und damit}$$

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b-a).$$

Nimmt die Funktion f im Intervall $[a; b]$ sowohl positive als auch negative Funktionswerte an, gilt $M > 0$ und $m < 0$. Man betrachtet die Flächenbilanz und erhält

$$\text{wieder } m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b-a).$$

Die Gleichheit gilt jeweils für konstante Funktionen f mit $f(x) = c$.

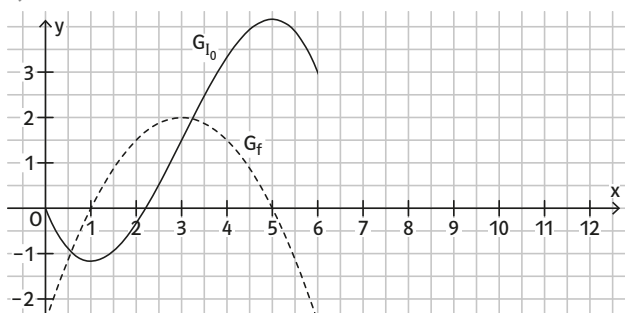
18 a) Es ist $I_0(2,2) = \int_0^{2,2} f(t) dt \approx 0$, da im Intervall

$[0; 2,2]$ der Inhalt der Fläche zwischen G_f und der x-Achse unterhalb der x-Achse etwa gleich dem Inhalt der Fläche zwischen G_f und der x-Achse oberhalb der x-Achse ist.

b) Es ist $I_0(4,5) = \int_0^{4,5} f(t) dt = \int_0^{2,2} f(t) dt + \int_{2,2}^{4,5} f(t) dt \approx 4$, da

im Intervall $[2,2; 4,5]$ der Inhalt der Fläche zwischen G_f und der x-Achse etwa 4 ist.

c)



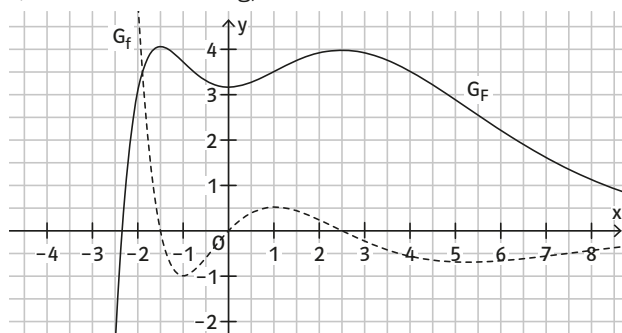
Seite 21

19 a) Eine Stammfunktion F der Funktion f hat ein Minimum an der Stelle x_0 , wenn gilt: Die Ableitung $F' = f$ hat die Nullstelle x_0 mit VZW von $-$ nach $+$.

Folglich hat jede Stammfunktion von f ein Minimum an der Stelle $x = 0$.

b) Die Integralfunktion I_0 der Funktion f hat ein lokales Maximum an der Stelle $x \in [0; 4]$, wenn gilt: Die Ableitung $I'_0 = f$ hat die Nullstelle x mit VZW von $+$ nach $-$. Folglich hat I_0 ein lokales Maximum an der Stelle $x = 2,5$.

c) Individuelle Lösung, z.B.:



22 Es ist $f(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Somit ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse stets oberhalb der x-Achse und es gilt

$$I_a(x) = \int_a^x \frac{1}{1+t^2} dt > 0 \text{ für } x > a, \quad I_a(x) = \int_a^x \frac{1}{1+t^2} dt < 0 \text{ für}$$

$x < a$ und $I_a(a) = 0$.

Die Integralfunktion $I_a(x)$ hat folglich nur die Nullstelle $x = a$.

$$\begin{aligned} \mathbf{23} \quad \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\ &= F(c) - F(a) = \int_a^c f(x) dx \end{aligned}$$

4 Stammfunktionen und Integrale

Seite 22

Einstiegsaufgabe

(1) $F(x) = e^{2x} + x^2$ ist eine Stammfunktion von

(7) $f(x) = 2e^{2x} + 2x$.

(3) $F(x) = \frac{1}{3} \cos(3x) + \pi$ ist eine Stammfunktion von

(8) $f(x) = -\sin(3x)$.

(5) $F(x) = \sqrt{x} + 3x$ ist eine Stammfunktion von

(2) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3$.

Seite 23

1 a) $F(x) = x^4 + \frac{3}{5}x^5$

b) $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{10}{x^4} = \frac{1}{10}x^4 - 10x^{-4}$

$$F(x) = \frac{1}{50}x^5 + \frac{10}{3}x^{-3} = \frac{1}{50}x^5 + \frac{10}{3x^3}$$

c) $F(x) = 3 \sin(x) - \frac{1}{2}x^2$

d) $f(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{\sin(x)}{4} = \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{4}\sin(x)$

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^{-1} - \frac{1}{4}\cos(x) = -\frac{1}{2x} - \frac{1}{4}\cos(x)$$

e) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} = 5x^{-\frac{1}{2}} + 5x^{-2}$

$$F(x) = \frac{5}{6}x^{\frac{1}{2}} - 5x^{-1} = \frac{5}{6}\sqrt{x} - \frac{5}{x}$$

f) $f(x) = \frac{1}{3}e^x - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{2}x^2$

$$F(x) = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{6}x^3$$

g) $f(x) = \sin(x) - \frac{2}{x} = \sin(x) - 2 \cdot \frac{1}{x}$

$$F(x) = -\cos(x) - 2 \ln|x|$$

$$h) f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{3}{2x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{3}{2} x^{-2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{3}{2} x^{-1} = \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{3}{2x}$$

$$2 \ a) F: x \mapsto -\frac{1}{9} x^{-6} + \frac{k}{2} x^2$$

$$b) F: z \mapsto -\frac{k^2}{3} z^{-3}$$

$$c) F: t \mapsto -e^t + \frac{k^2}{2} t^2$$

$$d) f: k \mapsto \frac{1}{u} k + \sqrt{u}$$

$$F: k \mapsto \frac{1}{2u} k^2 + \sqrt{u} k$$

$$e) F: x \mapsto -\frac{1}{a} \sin(x)$$

$$f) F: r \mapsto \frac{2}{7} r^{3,5} + 2,5 a^{2,5} r$$

$$3 \ a) \int_0^{4\pi} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{4\pi} = \sin(4\pi) - \sin(0) = 0$$

$$b) \int_{-2}^{-1} (-2x^{-3} + 3x^{-3}) dx = \int_{-2}^{-1} x^{-3} dx = \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right]_{-2}^{-1} \\ = -\frac{1}{2} (-1)^{-2} - \left(-\frac{1}{2} (-2)^{-2} \right) = -\frac{3}{8}$$

$$c) \int_1^e \left(\frac{1}{2x} + 0,5x^{-1} \right) dx = \int_1^e \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \right) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_1^e \\ = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

$$d) \int_{\frac{1}{4}}^{-1} e^{-x} \cdot e^{2x} dx = - \int_{-1}^{\frac{1}{4}} e^x dx = -[e^x]_{-1}^{\frac{1}{4}} = -(e^{\frac{1}{4}} - e^{-1}) = -e^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{e}$$

$$e) \int_0^{289} \sqrt{2x^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8x}} dx = \int_0^{289} \sqrt{\frac{2x^2}{8x}} dx = \int_0^{289} \frac{1}{2} \sqrt{x} dx = \left[\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{289} \\ = \frac{1}{3} \sqrt{289^3} - 0 = \frac{4913}{3} = 1637 \frac{2}{3}$$

$$f) \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{1}{x^{0,25}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^4 x^{-\frac{1}{4}} dx = \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} \right]_{\frac{1}{2}}^4 = \frac{4}{3} \sqrt[4]{4^3} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{1}{2}^3} \approx 1,53$$

$$4 \ a) \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot e^{0,5x} dx = [e^{0,5x}]_0^1 = e^{0,5} - e^0 = \sqrt{e} - 1$$

$$b) \int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2+4} dx = [\ln|x^2+4|]_{-1}^1 = \ln(5) - \ln(5) = 0$$

$$c) \int_0^{2\pi} \sin(0,5x) dx = [-2 \cos(0,5x)]_0^{2\pi} \\ = -2 \cos(\pi) + 2 \cos(0) = 4$$

$$d) \int_1^2 (2x+3)^3 dx = \left[\frac{1}{8} (2x+3)^4 \right]_1^2 \\ = \frac{1}{8} (2 \cdot 2 + 3)^4 - \frac{1}{8} (2 \cdot 1 + 3)^4 = 222$$

$$5 \ a) \int_{-1}^{3,3} 5x^2 dx - 10 \int_{-1}^{3,3} \frac{1}{2} x^2 dx = \int_{-1}^{3,3} 5x^2 dx - \int_{-1}^{3,3} 5x^2 dx = 0$$

$$b) \int_0^1 (x - 2\sqrt{x^2+4}) dx + 2 \int_0^1 \sqrt{x^2+4} dx \\ = \int_0^1 (x - 2\sqrt{x^2+4} + 2\sqrt{x^2+4}) dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \\ = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 0 = 0,5$$

$$c) \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{7}{3}} \frac{1}{x} dx + \int_{\frac{7}{3}}^4 \frac{1}{x} dx = \int_{\frac{1}{3}}^4 \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_{\frac{1}{3}}^4 = \ln(4) - \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

Seite 24

6 (A) Es wurde ein Faktor $\frac{1}{4}$ vergessen. Entweder der Faktor $\frac{1}{a}$, wobei a die Ableitung der inneren Funktion von f ist, oder der Faktor $\frac{1}{n+1}$, wobei n der Exponent der äußeren Funktion von f ist.

$$\text{Korrekt: } F(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} (4x+3)^4 = \frac{1}{32} (4x+3)^4.$$

(B) Es wurde mit $n-1$ gerechnet statt mit $n+1$, wobei n der Exponent der äußeren Funktion von f ist.

$$\text{Korrekt: } f(x) = \frac{2}{(x+1)^2} = 2(x+1)^{-2},$$

$$F(x) = \frac{2}{-1} (x+1)^{-1} = -\frac{2}{(x+1)}.$$

(C) Es wurde der Faktor π vor x bei der inneren Funktion vergessen.

$$\text{Korrekt: } F(x) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x).$$

(D) Ist a die Ableitung der inneren Funktion, so muss bei der Bestimmung eines Terms der Stammfunktion mit dem Faktor $\frac{1}{a}$ multipliziert werden. Hier wurde mit 5 statt mit $\frac{1}{5}$ multipliziert.

$$\text{Korrekt: } F(x) = x^2 + \frac{3}{5} e^{5x}.$$

$$9 \ f(x) = -\frac{6}{x^2} + 3(x^2+1) = -6x^{-2} + 3x^2 + 3$$

$$a) I_2(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x (-6t^{-2} + 3t^2 + 3) dt = [6t^{-1} + t^3 + 3t]_{\frac{1}{2}}^x \\ = \frac{6}{x} + x^3 + 3x - \left(\frac{6}{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} \right) \\ = \frac{6}{x} + x^3 + 3x - 17$$

Man erhält also die Integralfunktion

$$I_2: x \mapsto \frac{6}{x} + x^3 + 3x - 17.$$

$$b) F(x) = \frac{6}{x} + x^3 + 3x + c$$

$$F(2) = 17 \Leftrightarrow \frac{6}{2} + 2^3 + 3 \cdot 2 + c = 17 \Leftrightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow F: x \mapsto \frac{6}{x} + x^3 + 3x$$

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{x} + x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow 6 + x^4 + 3x^2 = 0$$

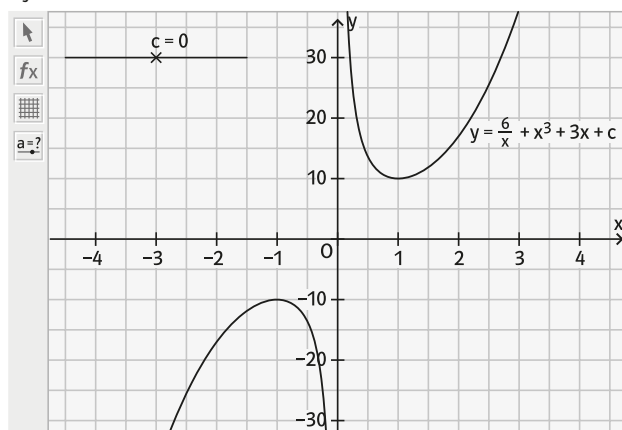
Substitution: $x^2 = z$.

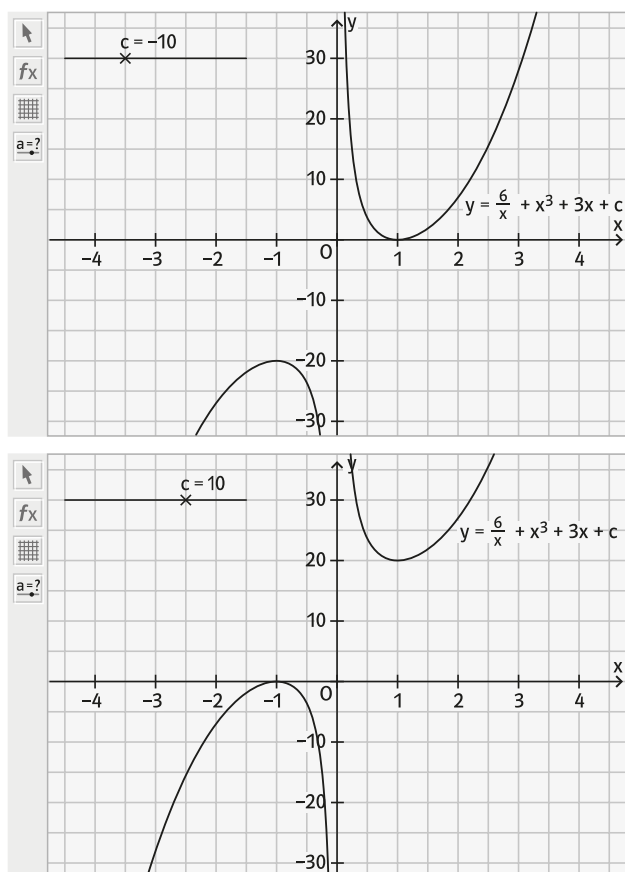
$$z^2 + 3z + 6 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-3 - \sqrt{9-24}}{2} \text{ oder } z = \frac{-3 + \sqrt{9-24}}{2}.$$

Es gibt keine Lösung, da $9-24 = -15 < 0$ ist. Da die Stammfunktion F keine Nullstelle besitzt, kann sie keine Integralfunktion sein. Eine Integralfunktion muss mindestens eine Nullstelle besitzen.

c) Individuelle Lösung, z.B.:

Man stellt die Graphen zu $F(x) + c$ mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware dar.





Folglich hat die Funktion F mit $F(x) + c = \frac{6}{x} + x^3 + 3x + c$ mindestens eine Nullstelle für $c \geq 10$ oder für $c \leq -10$ und kann für diese Werte von c als Integral geschrieben werden.

10 Überprüfung mit einer geeigneten Mathematiksoftware: individuelle Lösung (bei allen Teilaufgaben).

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \int_{-2}^{1,2} (3x^2 - x + 2) dx &= \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^{1,2} \\ &= 1,2^3 - \frac{1}{2} \cdot 1,2^2 + 2 \cdot 1,2 - \left((-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 + 2(-2) \right) \\ &= \frac{2176}{125} = 17,408 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \int_1^5 3 \left(\frac{5}{z} + 2z \right) dz &= 3 \left[5 \ln|z| + z^2 \right]_1^5 \\ &= 3 \left(5 \ln(5) + 5^2 - (5 \ln(1) + 1^2) \right) \\ &= 15 \ln(5) + 72 \approx 96,14 \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad \int_{-4}^4 \frac{1}{2} x(2+t)^2 dx = \left[\frac{1}{4} x^2 (2+t)^2 \right]_{-4}^4 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \int_2^4 \sqrt{2x+4} dx &= \int_2^4 (2x+4)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{3} (2x+4)^{\frac{3}{2}} \right]_2^4 \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(2 \cdot 4 + 4)^3} - \frac{1}{3} \sqrt{(2 \cdot 2 + 4)^3} \approx 6,31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \int_{4,5}^3 \left(\frac{2}{t^2} + \frac{2}{t} \right) dt &= - \int_3^{4,5} \left(2t^{-2} + \frac{2}{t} \right) dt = - \left[-\frac{2}{t} + 2 \ln|t| \right]_3^{4,5} \\ &= - \left(-\frac{2}{4,5} + 2 \ln(4,5) - \left(-\frac{2}{3} + 2 \ln(3) \right) \right) \\ &\approx -1,03 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad \int_{-3}^{-1} (-x^3 + 2e^x) dx &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2e^x \right]_{-3}^{-1} \\ &= -\frac{1}{4} + 2e^{-1} - \left(-\frac{1}{4}(-3)^4 + 2e^{-3} \right) \\ &= 20 + \frac{2}{e} - \frac{2}{e^3} \approx 20,64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad \int_4^1 \frac{2+2z}{z^2+2z+1} dz &= - \int_1^4 \frac{2+2z}{z^2+2z+1} dz = - \left[\ln|z^2+2z+1| \right]_1^4 \\ &= - \left(\ln(4^2+8+1) - \ln(4) \right) \\ &= - \ln(25) + \ln(4) = \ln\left(\frac{4}{25}\right) \approx -1,83 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad \int_{-1}^{0,5} 6 \cdot e^{4x-1} \cdot e^{2x} dx &= \int_{-1}^{0,5} 6 \cdot e^{6x-1} dx = \left[e^{6x-1} \right]_{-1}^{0,5} = e^2 - e^{-7} \\ &= e^2 - \frac{1}{e^7} \approx 7,39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \int_1^3 \frac{1}{2} x \cdot e^{2x^2+1} dx &= \frac{1}{8} \cdot \int_1^3 4x \cdot e^{2x^2+1} dx = \frac{1}{8} \cdot \left[e^{2x^2+1} \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{8} (e^{19} - e^3) \approx 22310285 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \quad \int_1^{\pi} \left(\frac{1}{x} + 2 \sin(x) \right) dx &= \left[\ln|x| - 2 \cos(x) \right]_1^{\pi} \\ &= \ln(\pi) - 2 \cos(\pi) - (\ln(1) - 2 \cos(1)) \\ &= \ln(\pi) + 2 + 2 \cos(1) \approx 4,23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k)} \quad \int_1^4 \frac{5t}{t^2+1} dt - \int_1^4 \frac{3t}{t^2+1} dt &= \int_1^4 \frac{2t}{t^2+1} dt = \left[\ln|t^2+1| \right]_1^4 \\ &= \ln(17) - \ln(2) = \ln(8,5) \approx 2,14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l)} \quad \int_0^{-2} \frac{2}{(1-x)^2} dx &= - \int_{-2}^0 2(1-x)^{-2} dx = - \left[2(1-x)^{-1} \right]_{-2}^0 \\ &= - \left(2 - \frac{2}{3} \right) = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{11} \quad F(x) &= x \cdot \ln(x) - x \\ F'(x) &= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{12 a)} \quad F(x) &= \frac{1}{3}(x+2)^3 + c \\ F(0) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{3}2^3 + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F: x &\mapsto \frac{1}{3}(x+2)^3 - \frac{5}{3} \\ \text{b)} \quad F(x) &= \ln|x+1| + c, \quad x > -1 \\ F(0) = 1 &\Leftrightarrow \ln(1) + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 \\ \Rightarrow F: x &\mapsto \ln(x+1) + 1, \quad x > -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad F(t) &= 4e^{0,5t} + c \\ F(0) = 1 &\Leftrightarrow 4e^0 + c = 1 \Leftrightarrow c = -3 \\ \Rightarrow F: t &\mapsto 4e^{0,5t} - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad F(t) &= \frac{1}{5} \sin(5t) + c \\ F(0) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{5} \sin(0) + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 \\ \Rightarrow F: t &\mapsto \frac{1}{5} \sin(5t) + 1 \end{aligned}$$

13 Zu Jakobs Rechnung:

Das Integral $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$ ist nicht definiert (vgl. Merkkasten auf Seite 7 im Schulbuch), da sich die Definitionslücke $x = 0$ des Integranden f innerhalb des Intervalls $[-2; 2]$ befindet. Die Berechnung des Integrals mithilfe des

Hauptsatzes $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-2}^2$ setzt als Integrand zudem eine stetige Funktion f voraus. Für $x = 0$ ist $f(x) = \frac{1}{x^2}$ jedoch nicht definiert. Daher kann für $x = 0$ keine Aus-

sage über die Stetigkeit von f gemacht werden. Definiert und mithilfe des Hauptsatzes berechnet werden können folglich nur Integrale $\int_a^b \frac{1}{x^2} dx$, bei denen beide Intervall-

grenzen a und b positiv oder beide negativ sind.

Zu Lailas Argumentation:

Der abgebildete Graph verläuft zwar stets oberhalb der x -Achse, doch Laila betrachtet ihn in einem Intervall, in dem die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nicht integrierbar ist.

Daher kann hier nicht mit einer Flächenbetrachtung argumentiert werden.

14 a) $\int_{-a}^a x^2 dx = 10 \Leftrightarrow \int_0^a x^2 dx = 5$, da der Integrand und die Intervallgrenzen symmetrisch zur y -Achse sind.

$$\int_0^a x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^a = \frac{1}{3} a^3 - 0 = \frac{1}{3} a^3$$

$$\frac{1}{3} a^3 = 5 \Leftrightarrow a^3 = 15 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{15}$$

$$\text{b) } \int_2^a \left(\frac{1}{4} x^3 - 8x \right) dx = \left[\frac{1}{16} x^4 - 4x^2 \right]_2^a$$

$$= \frac{1}{16} a^4 - 4a^2 - \left(\frac{1}{16} \cdot 16 - 16 \right)$$

$$= \frac{1}{16} a^4 - 4a^2 + 15$$

$$\frac{1}{16} a^4 - 4a^2 + 15 = 15 \Leftrightarrow \frac{1}{16} a^4 - 4a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} a^2 (a^2 - 64) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } a^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } a = -8 \text{ oder } a = 8$$

$$\text{c) } \int_{-\pi}^a 3 \sin(x) dx = 3 \int_{-\pi}^a \sin(x) dx = 3 [-\cos(x)]_{-\pi}^a$$

$$= 3(-\cos(a) + \cos(-\pi))$$

$$= 3(-\cos(a) - 1)$$

$$3(-\cos(a) - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos(a) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(a) = -1$$

$$\Leftrightarrow a = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Seite 25

$$\text{15 a) } \int_0^1 b \cdot e^{bx} dx = [e^{bx}]_0^1 = e^b - 1$$

$$e^b - 1 = 2 \Leftrightarrow e^b = 3 \Leftrightarrow \ln(e^b) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow b \cdot \ln(e) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow b = \ln(3)$$

$$\text{b) } \int_0^1 b \cdot \sin(\pi x) dx = \left[-\frac{b}{\pi} \cos(\pi x) \right]_0^1$$

$$= -\frac{b}{\pi} \cos(\pi) + \frac{b}{\pi} \cos(0) = \frac{2b}{\pi}$$

$$\frac{2b}{\pi} = 2 \Leftrightarrow b = \pi$$

$$\text{c) } \int_0^1 \frac{b}{x+1} dx = b \cdot [\ln|x+1|]_0^1 = b(\ln(2) - \ln(1)) = b \cdot \ln(2)$$

$$b \cdot \ln(2) = 2 \Leftrightarrow b = \frac{2}{\ln(2)}$$

$$\text{d) } \int_0^1 \sqrt{bx} dx = \left[\frac{2}{3b} (bx)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3b} b^{\frac{3}{2}} - 0 = \frac{2}{3b} \sqrt{b^3} = \frac{2}{3} \sqrt{b}$$

$$\frac{2}{3} \sqrt{b} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{b} = 3 \Leftrightarrow b = 9$$

16 Mit den bereits bekannten Integrationsregeln lassen sich die Integrale auf den Kärtchen (3), (5), (10) und (11) nicht berechnen.

$$(1) \int_1^2 (2x^3 - x^{-2}) dx = \left[\frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{x} \right]_1^2 = 8 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = 7$$

$$(2) \int_{-1}^{-2} \frac{2a}{4a^2+1} da = - \int_{-2}^{-1} \frac{2a}{4a^2+1} da = -\frac{1}{4} \cdot [\ln|4a^2+1|]_{-2}^{-1}$$

$$= -\frac{1}{4} (\ln(5) - \ln(17)) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{17}{5}\right)$$

$$(4) \int_2^4 \frac{x+1}{x} dx = \int_2^4 \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx = [x + \ln|x|]_2^4$$

$$= (4 + \ln(4)) - (2 + \ln(2)) = 2 + \ln(2)$$

$$(6) \int_{-2}^2 (u^2+1)(u^2-1) du = \int_{-2}^2 (u^4-1) du = \left[\frac{1}{5} u^5 - u \right]_{-2}^2$$

$$= \frac{32}{5} - 2 - \left(-\frac{32}{5} + 2 \right) = 8,8$$

$$(7) \int_0^3 0,25r \cdot (r + e^2) dr = \frac{1}{4} \cdot \int_0^3 (r^2 + e^2 \cdot r) dr = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{3} r^3 + \frac{e^2}{2} r^2 \right]_0^3$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 + \frac{e^2}{2} \cdot 3^2 - 0 \right) = \frac{9}{4} + \frac{9}{8} e^2$$

$$\approx 10,56$$

$$(8) \int_0^2 2\sqrt{v} \cdot (1-v) dv = 2 \cdot \int_0^2 (v^{\frac{1}{2}} - v^{\frac{3}{2}}) dv = 2 \cdot \left[\frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} v^{\frac{5}{2}} \right]_0^2$$

$$= 2 \left(\frac{2}{3} \sqrt{2^3} - \frac{2}{5} \sqrt{2^5} - 0 \right) = -\frac{8\sqrt{2}}{15} \approx -0,75$$

$$(9) \int_{-1}^{-4} \frac{e^b}{2e^b+2} db = -\frac{1}{2} \int_{-4}^{-1} \frac{e^b}{e^b+1} db = -\frac{1}{2} \cdot [\ln|e^b+1|]_{-4}^{-1}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{1}{e}+1\right) - \left(\ln\left(\frac{1}{e^4}+1\right)\right) \right) \approx -0,15$$

(12) $\int_{-2}^2 (3x^3 + x) dx = 0$ (Punktsymmetrie des Graphen des Integranden zum Ursprung)

17 a) Es ist $f(x) = ax(x+3)(x-3)$. Aus $f(1) = -1$ folgt $a \cdot 1 \cdot (1+3)(1-3) = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$ und damit $f(x) = \frac{1}{8} x(x+3)(x-3) = \frac{1}{8} x^3 - \frac{9}{8} x$.

$$\text{b) } f(-x) = \frac{1}{8} (-x)^3 - \frac{9}{8} (-x) = -\frac{1}{8} x^3 + \frac{9}{8} x$$

$$= -\left(\frac{1}{8} x^3 - \frac{9}{8} x \right) = -f(x)$$

Folglich ist G_f punktsymmetrisch zum Ursprung.

c) Es ist $\int_{-4}^4 f(x) dx = 0$, da G_f punktsymmetrisch zum Ursprung ist und die Integrationsgrenzen symmetrisch bezüglich $x = 0$ liegen. Somit ist der Inhalt der Teilflächen oberhalb der x -Achse gleich dem Inhalt der Teilflächen unterhalb der x -Achse.

d) Es ist $\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx$, da aufgrund der in der Lösung zu Teilaufgabe c) beschriebenen Punktsymmetrie $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ gilt.

$$18 \quad F_a(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + 1) + c$$

Da die Funktionen F_a die Amplitude $\frac{1}{a}$ haben, muss c zwischen $-\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{a}$ liegen, damit die Funktionen F_a sowohl negative als auch positive Werte haben.

$$F_a: x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax + 1) + c \quad \text{mit} \quad -\frac{1}{a} < c < \frac{1}{a}$$

$$19 \quad f(x) = (x - 2)x^2 = x^3 - 2x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c$$

F hat das lokale Minimum 5 in x_0 , wenn gilt:

$$F'(x_0) = f(x_0) = 0 \quad \text{mit VZW von } - \text{ nach } + \quad \text{und} \quad F(x_0) = 5.$$

$$F'(x) = f(x) = (x - 2)x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2.$$

An der Stelle $x = 0$ hat $F' = f$ keinen VZW.

An der Stelle $x = 2$ hat $F' = f$ einen VZW von $-$ nach $+$.

$$F(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{2}{3} \cdot 2^3 + c = -\frac{4}{3} + c$$

$$F(2) = 5 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} + c = 5 \Leftrightarrow c = \frac{19}{3}$$

$$\Rightarrow F: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{19}{3}$$

$$23 \quad \int_1^4 \frac{12}{(x+2a)^2} dx = \int_1^4 12 \cdot (x+2a)^{-2} dx = [-12(x+2a)^{-1}]_1^4$$

$$= -\frac{12}{4+2a} + \frac{12}{1+2a}$$

$$-\frac{12}{4+2a} + \frac{12}{1+2a} = 2$$

$$\Leftrightarrow -12(1+2a) + 12(4+2a) = 2(4+2a)(1+2a)$$

$$\Leftrightarrow -12 - 24a + 48 + 24a = 8 + 20a + 8a^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 5a - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-5-9}{4} \quad \text{oder} \quad a = \frac{-5+9}{4} \Leftrightarrow a = -3,5 \quad \text{oder} \quad a = 1$$

Die ganzzahlige Lösung ist $a = 1$.

5 Flächeninhaltsberechnungen mit dem Integral

Seite 26

Einstiegsaufgabe

Der Inhalt A_1 der blau markierten Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sin(x) + 1$ und der x -Achse lässt sich mit dem Integral von f über dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ bestimmen, da $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{3\pi}{2}$ die Nullstellen von f im dargestellten Bereich sind.

$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\sin(x) + 1) dx$$

Der Inhalt A_2 der orange markierten Fläche zwischen dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \cos(x)$ und f mit $f(x) = \sin(x) + 1$ lässt sich mithilfe von Integralen von f und g über dem Intervall $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ bestimmen, da sich die Graphen G_f und G_g , die diese Fläche begrenzen, an den Stellen $x = \frac{3\pi}{2}$ und $x = 2\pi$ schneiden. Berechnet

man zunächst $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(x) dx$, so erhält man den Inhalt der

Fläche zwischen G_g und der x -Achse im Intervall $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$.

Subtrahiert man davon $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (\sin(x) + 1) dx$, also den Inhalt

der Fläche zwischen G_f und der x -Achse im Intervall $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$, so erhält man den gesuchten Flächeninhalt zwischen G_g und G_f .

$$A_2 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(x) dx - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (\sin(x) + 1) dx$$

Seite 28

1 Fläche I: $A_2 + A_3$

Fläche II: $A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

Fläche III: A_1

$$2 \quad a) \quad A = \int_{-2}^0 (-x^2 + 4) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^0$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{3}(-2)^3 + 4(-2)\right) = \frac{16}{3}$$

$$b) \quad A = A_1 + |A_2|$$

$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(x) dx = [2 \sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \cos(x) dx = [2 \sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2 \sin(\pi) - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$$

$$A = A_1 + |A_2| = 4 + 2 = 6$$

$$c) \quad A = A_1 + |A_2|$$

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{1}{3}(-2)^3 + 2\right) = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_{-1}^0 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^0 = 0 - \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = -\frac{2}{3}$$

$$A = A_1 + |A_2| = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

$$d) \quad A = |A_1| + A_2$$

$$A_1 = \int_0^1 (e^{x-1} - 1) dx = [e^{x-1} - x]_0^1 = e^0 - 1 - e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$A_2 = \int_1^2 (e^{x-1} - 1) dx = [e^{x-1} - x]_1^2 = e - 2 - (e^0 - 1) = e - 2$$

$$A = |A_1| + A_2 = \frac{1}{e} + e - 2 \approx 1,09$$

3 a) Individuelle Lösung,

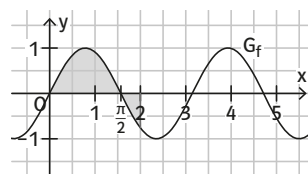
z.B.: $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$.

$$b) \quad \int_0^2 \sin(2x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cos(2x)\right]_0^2$$

$$= -\frac{1}{2} \cos(4) + \frac{1}{2} \cos(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4)$$

Der Wert des Integrals stimmt nicht mit dem Inhalt der Fläche überein, die für $0 \leq x \leq 2$ zwischen dem Graphen von f und der x -Achse liegt, da G_f in diesem Intervall oberhalb und unterhalb der x -Achse liegt und das Integral von 0 bis 2 die Flächenbilanz für das Intervall $[0; 2]$ angibt.



Seite 29

- 4 a) Bestimmen der Nullstellen von f:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x(4 - x^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ oder} \\ &x = -2 \text{ oder} \\ &x = 2. \end{aligned}$$

$$\text{Da } f \text{ mit } f(x) = x(4 - x^2) = 4x - x^3$$

eine ungerade Funktion und damit G_f punktsymmetrisch zum Ursprung ist, gilt für den gesuchten Flächeninhalt

$$A = 2 \cdot A_2 = 2 \cdot \int_0^2 (4x - x^3) dx = 2 \left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 = 2(4 - 0) = 8.$$

- b) Bestimmen der Nullstellen von f:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ oder } x = \sqrt{2}.$$

Da G_f eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitel $(0|2)$ und symmetrisch zur y-Achse ist, gilt für den gesuchten Flächeninhalt

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot A_2 = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} (-x^2 + 2) dx = 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= 2 \left(-\frac{1}{3}\sqrt{2}^3 + 2\sqrt{2} - 0 \right) = \frac{8\sqrt{2}}{3} \approx 3,77. \end{aligned}$$

- c) Bestimmen der Nullstellen von f:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x-2 = -1 \text{ oder } x-2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ oder } x = 3. \end{aligned}$$

Da G_f eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel $(2|-1)$ ist, gilt für den gesuchten Flächeninhalt

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_1^3 ((x-2)^2 - 1) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3}(x-2)^3 - x \right]_1^3 \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} - 3 - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) \right| = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

- d) Bestimmen der Nullstellen von f:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \\ &\text{oder } x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{3} \\ &\text{oder } x = 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Da G_f im Intervall $[2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}]$ unterhalb der x-Achse liegt, gilt für den gesuchten Flächeninhalt

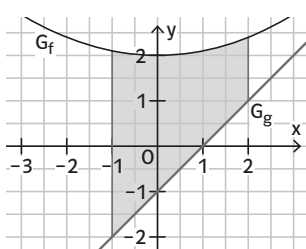
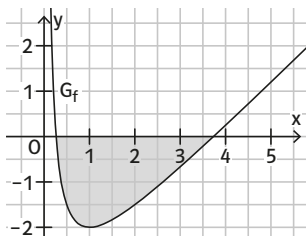
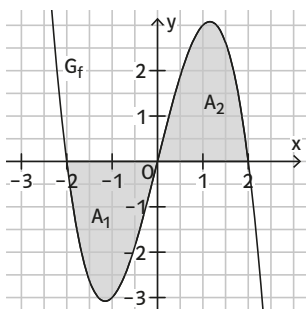
$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{x} - 4 \right) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{2}x^2 + \ln|x| - 4x \right]_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \right| \\ &= \left| -4\sqrt{3} + \ln(7 + 4\sqrt{3}) \right| = 4,29. \end{aligned}$$

- 5 a) $A = \int_{-1}^2 (f(x) - g(x)) dx$

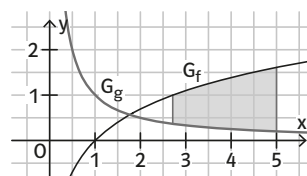
$$= \int_{-1}^2 (0,1x^2 - x + 3) dx$$

$$= \left[\frac{1}{30}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{64}{15} - \left(-\frac{53}{15} \right) = 7,8$$

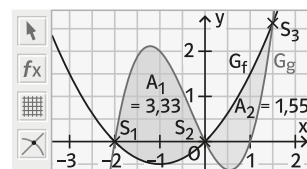


$$\begin{aligned} \text{b) } A &= \int_e^5 (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_e^5 \left(\ln(x) - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= [-x + x \ln(x) - \ln|x|]_e^5 \\ &= -5 + 4 \ln(5) - (-e + (e-1) \ln(e)) \\ &= 4 \ln(5) - 4 \approx 2,44 \end{aligned}$$

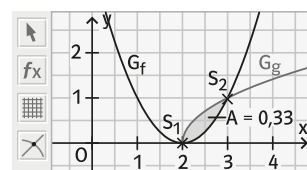


- 6 Individuelle Lösung, z. B.:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &\approx A_1 + A_2 \\ &= 3,33 + 1,55 = 4,88 \end{aligned}$$



$$\text{b) } A \approx 0,33$$



- 7 (1) Da sich beide Flächen unterhalb der x-Achse befinden, ist das Integral negativ.

$$A_4 + A_5 = \left| 2 \int_0^{\sqrt{0,5}} g(x) dx \right| \text{ oder } A_4 + A_5 = -2 \int_0^{\sqrt{0,5}} g(x) dx$$

(2) Mit dem Integral wird die Flächenbilanz der Teilflächen berechnet, die G_f und die x-Achse im Intervall $[-2; 0]$ einschließen. Die Flächen unterhalb und oberhalb der x-Achse müssen jedoch einzeln betrachtet werden.

$$A_7 + A_1 + A_2 = \left| \int_{-2}^{-\sqrt{2}} f(x) dx \right| + \int_{-\sqrt{2}}^0 f(x) dx$$

(3) Mit dem Integral wird der Inhalt der Fläche zwischen G_f und G_g im Intervall $[-1; 0]$ berechnet, also $A_2 + A_4$.

$$A_2 = \int_{-1}^{-\sqrt{0,5}} (f(x) - g(x)) dx + \int_{-\sqrt{0,5}}^0 f(x) dx$$

(4) Mit dem Integral wird der Inhalt der Fläche zwischen G_g und G_f im Intervall $[\sqrt{0,5}; \sqrt{2}]$ berechnet. A_6 setzt sich jedoch aus zwei Teilflächen zusammen, von denen die eine nur von G_g und der x-Achse, die andere nur von G_f und der x-Achse eingeschlossen wird.

$$A_6 = \int_{\sqrt{0,5}}^1 g(x) dx + \int_1^{\sqrt{2}} f(x) dx$$

$$\text{9 a) } \int_0^k (x^3 - 1) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x \right]_0^k = \frac{1}{4}k^4 - k, \quad k > 0$$

$$\frac{1}{4}k^4 - k = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k(k^3 - 4) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \text{ oder } k = \sqrt[3]{4}$$

Da $k > 0$ ist, entfällt die erste Lösung.

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^k ((x-1)^2 - 4) dx &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 - 4x \right]_0^k \\ &= \frac{1}{3}(k-1)^3 - 4k - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}k^3 - k^2 - 3k, \quad k > 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3}k^3 - k^2 - 3k = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}k(k^2 - 3k - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \text{ oder } k = \frac{3 \pm \sqrt{45}}{2} \text{ oder } k = \frac{3 + \sqrt{45}}{2} \approx 4,85$$

Da $k > 0$ ist, entfallen die ersten beiden Lösungen.

$$10 \quad f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} = x^{-2} - \frac{1}{4}$$

Nullstellen von f:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ oder } x = 2.$$

Gleichung der Tangente

an den Graphen von f an der Stelle $x = 0,5$: $y = mx + t$.

$$f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$m = f'(0,5) = -16, \quad f(0,5) = 3,75$$

$$\Rightarrow 3,75 = -16 \cdot 0,5 + t \Leftrightarrow t = 11,75.$$

$$\Rightarrow \text{Tangente: } g(x) = -16x + 11,75.$$

Schnittstelle der Tangente mit der x-Achse:

$$-16x + 11,75 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{47}{64} \approx 0,7.$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{0,5}^2 f(x) dx - \int_{0,5}^{\frac{47}{64}} g(x) dx \\ &= \int_{0,5}^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \right) dx - \int_{0,5}^{\frac{47}{64}} (-16x + 11,75) dx \\ &= \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x \right]_{0,5}^2 - \left[-8x^2 + 11,75x \right]_{0,5}^{\frac{47}{64}} = \frac{9}{8} - \frac{225}{512} = \frac{351}{512} \approx 0,686 \end{aligned}$$

$$11 \quad A(t) = \int_1^2 \frac{t}{x^2} dx = \left[-\frac{t}{x} \right]_1^2 = -\frac{t}{2} + t = \frac{t}{2}$$

$$A(t) = 8 \Leftrightarrow \frac{t}{2} = 8 \Leftrightarrow t = 16$$

$$12 \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{ und } g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$$

Es ist $f(x) > g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$; G_f und G_g sind jeweils symmetrisch zur y-Achse.

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{-t}^t (f(x) - g(x)) dx = 2 \cdot \int_0^t \left(\frac{1}{4}x^2 + 1 \right) dx \\ &= 2 \cdot \left[\frac{1}{12}x^3 + x \right]_0^t = \frac{1}{6}t^3 + 2t \end{aligned}$$

$$A(t) = (2t)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{6}t^3 + 2t = 4t^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}t^3 - 4t^2 + 2t = 0, \quad t > 0$$

$$\frac{1}{6}t(t^2 - 24t + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ oder } t = 12 - 2\sqrt{33} \text{ oder } t = 12 + 2\sqrt{33}$$

Da $t > 0$ ist, entfällt die erste Lösung.

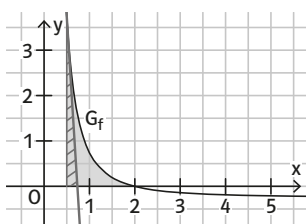
13 Nullstellen von f:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow t - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = t \Leftrightarrow x = -\sqrt{t} \text{ oder } x = \sqrt{t}.$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{t}} (t - x^2) dx = 2 \cdot \left[tx - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{t}} \\ &= 2t \cdot \sqrt{t} - \frac{2}{3}t \cdot \sqrt{t} - 0 = \frac{4}{3}t\sqrt{t} \end{aligned}$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} \cdot t = \sqrt{t} \cdot t$$

$$\frac{A_{\text{Dreieck}}}{A} = \frac{t\sqrt{t}}{\frac{4}{3}t\sqrt{t}} = \frac{3}{4} = 75\%$$



Seite 30

14 1 Längeneinheit entspricht 1 dm.

Bestimmen eines Funktionsterms:

$$\text{Ansatz: } f(x) = ax^2 + c.$$

$$(1) \quad f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$$

$$(2) \quad f(4) = 10$$

$$\Leftrightarrow a \cdot 4^2 + 2 = 10$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$$

Inhalt der Querschnittsfläche: $A = 2 \cdot A_1 + A_2$.

$$A_1 = 1 \cdot 10 = 10$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{-4}^4 f(x) dx = 2 \cdot \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) dx \\ &= 2 \cdot \left[\frac{1}{6}x^3 + 2x \right]_0^4 = 2 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 4^3 + 8 - 0 \right) = \frac{112}{3} \end{aligned}$$

$$A = 2 \cdot 10 + \frac{112}{3} = \frac{172}{3} = 57\frac{1}{3}$$

Volumen V des Segments:

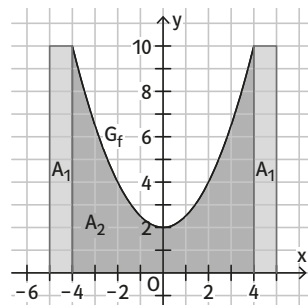
$$V = A \cdot h = \frac{172}{3} \cdot 10 = \frac{1720}{3} = 573\frac{1}{3}.$$

Das Segment hat ein Volumen von

$$\frac{1720}{3} \text{ dm}^3 = \frac{1,720}{3} \text{ m}^3 = 0,573 \text{ m}^3.$$

$$\text{Masse: } m = \rho \cdot V = 2,3 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} \cdot 0,573 \text{ m}^3 \approx 1,318 \text{ t}.$$

Das Segment hat eine Masse von etwa 1,3 t.



$$15 \quad a) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 - 4 = -3 = g\left(\frac{1}{2}\right)$$

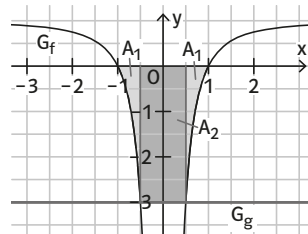
$$\Rightarrow S\left(\frac{1}{2} \mid -3\right)$$

$$b) \quad A = 2 \cdot A_1 + A_2$$

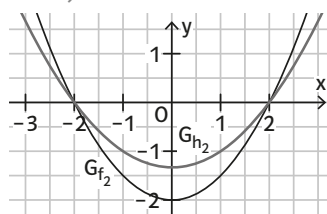
$$\begin{aligned} A_1 &= \left| \int_{0,5}^1 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx \right| \\ &= \left| \left[x + \frac{1}{x} \right]_{0,5}^1 \right| \\ &= \left| 2 - \left(0,5 + \frac{1}{0,5} \right) \right| = 0,5 \end{aligned}$$

$$A_2 = 1 \cdot 3 = 3$$

$$A = 2 \cdot 0,5 + 3 = 4$$



16 a)



$$\begin{aligned} b) \quad f_a(x) &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}x^2 - a = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}x^2 = a \Leftrightarrow x^2 = a^2 \\ &\Leftrightarrow x = a \text{ oder } x = -a \end{aligned}$$

$$c) \quad f_a(-x) = \frac{1}{a}(-x)^2 - a = \frac{1}{a}x^2 - a = f_a(x)$$

$$h_a(-x) = \frac{1}{3}(-x)^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}a^2 = h_a(x)$$

$$d) \quad h_a(a) = \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{3}a^2 = 0 = h_a(-a)$$

 f_a und g_a haben die gemeinsamen Nullstellen $x = a$ und $x = -a$.

$$\begin{aligned}
 \text{e) } A(a) &= 2 \cdot \int_0^a (h_a(x) - f_a(x)) dx \\
 &= 2 \cdot \int_0^a \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{a}x^2 + a \right) dx \\
 &= 2 \cdot \left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}a^2x - \frac{1}{3a}x^3 + ax \right]_0^a \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{9}a^3 - \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}a^2 + a^2 - 0 \right) \\
 &= -\frac{4}{9}a^3 + \frac{4}{3}a^2 \\
 A'(a) &= -\frac{4}{3}a^2 + \frac{8}{3}a \\
 A'(a) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{4}{3}a^2 + \frac{8}{3}a = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}a(a-2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } a = 2 \\
 \text{Da } 0 < a < 3 \text{ ist, entfällt die erste Lösung.} \\
 A''(a) &= -\frac{8}{3}a + \frac{8}{3} \\
 A''(2) &< 0 \\
 \Rightarrow \text{Die Fläche wird für } a = 2 \text{ maximal.}
 \end{aligned}$$

19 Für $a > 0$ verläuft der Graph G_{f_a} im Intervall $]0; \pi[$ oberhalb des Graphen G_{g_a} .

$$\begin{aligned}
 A(a) &= \int_0^\pi (f_a(x) - g_a(x)) dx \\
 &= \int_0^\pi \left(a \sin(x) + \frac{1}{a} \sin(x) \right) dx \\
 &= \left[-a \cos(x) - \frac{1}{a} \cos(x) \right]_0^\pi \\
 &= -a(-1) - \frac{1}{a}(-1) - \left(-a \cdot 1 - \frac{1}{a} \cdot 1 \right) \\
 &= a + \frac{1}{a} + a + \frac{1}{a} = 2a + \frac{2}{a} \\
 A'(a) &= 2 - \frac{2}{a^2} \\
 A'(a) = 0 &\Leftrightarrow 2 - \frac{2}{a^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{a^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1 \\
 &\Leftrightarrow a = -1 \text{ oder } a = 1
 \end{aligned}$$

Da im Ansatz $a > 0$ gewählt wurde, entfällt die erste Lösung.

$$A''(a) = \frac{4}{a^3}$$

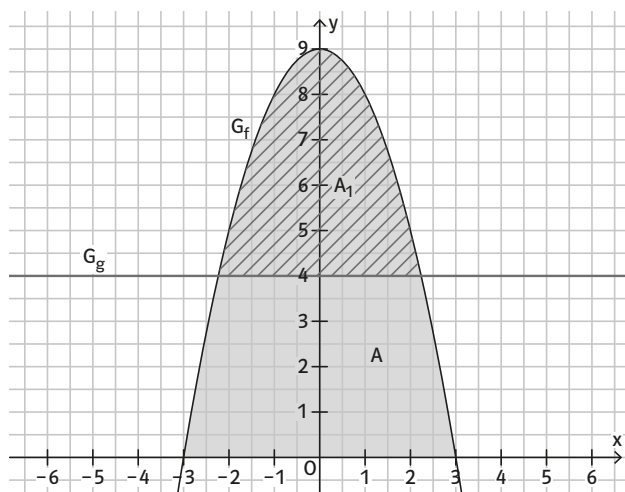
$$A''(1) > 0 \text{ und } A(1) = 2 \cdot 1 + \frac{2}{1} = 4$$

$\Rightarrow$ Die Fläche wird für $a = 1$ minimal.

Für $a = -1$ ergibt sich der gleiche Flächeninhalt, da die Graphen jeweils an der x -Achse gespiegelt sind.

$\Rightarrow$ Die Fläche wird auch für $a = -1$ minimal.

20



$$f(x) = -x^2 + 9 \text{ und } g(x) = c, 0 \leq c \leq 9$$

$$\begin{aligned}
 \text{Schnittstellen: } f(x) &= g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 9 = c \Leftrightarrow x^2 = 9 - c \\
 &\Leftrightarrow x = -\sqrt{9 - c} \text{ oder } x = \sqrt{9 - c}.
 \end{aligned}$$

Nullstellen von f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ oder } x = 3.$$

Aufgrund der Symmetrie von G_f zur y -Achse erhält man

$$A = 2 \cdot \int_0^3 (-x^2 + 9) dx = 2 \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3 + 9x \right]_0^3 = 2(-9 + 27 - 0) = 36$$

und

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{9-c}} (-x^2 + 9 - c) dx = 2 \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3 + (9 - c)x \right]_0^{\sqrt{9-c}} \\
 &= 2 \left(-\frac{1}{3}(\sqrt{9-c})^3 + (9 - c)\sqrt{9-c} - 0 \right) = \frac{4}{3}(\sqrt{9-c})^3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{2}A \Leftrightarrow \frac{4}{3}(\sqrt{9-c})^3 = 18 \Leftrightarrow (\sqrt{9-c})^3 = 13,5 \\
 &\Leftrightarrow 9 - c = (\sqrt[3]{13,5})^2 \Leftrightarrow c = 9 - (\sqrt[3]{13,5})^2 \approx 3,33
 \end{aligned}$$

6 Uneigentliche Integrale

Seite 31

Einstiegsaufgabe

Legt man weitere entsprechende Fliesen an, nähert sich der Inhalt der ausgelegten Fläche 2m^2 an. In der Abbildung kann man erkennen, dass jede nächstkleinere Fliese jeweils nur die Hälfte des noch freigebliebenen Platzes der Gesamtfläche mit Inhalt 2m^2 benötigt. Somit nähert sich in diesem Fall die Summe unendlich vieler Flächeninhalte einem begrenzten Gesamtflächeninhalt an.

Addiert man jedoch beispielsweise unendlich viele gleich große Flächeninhalte, so ist der Gesamtflächeninhalt unbegrenzt, er wird unendlich groß.

Seite 32

$$1 \text{ a) } A(z) = \int_1^z \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x+1} \right]_1^z = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2}$$

$\lim_{z \rightarrow +\infty} A(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$, d.h., die nach rechts unbegrenzte Fläche hat den endlichen Inhalt $A = 0,5$.

$$b) A(z) = \int_1^z \frac{1}{\sqrt{2x}} dx = [\sqrt{2x}]_1^z = \sqrt{2z} - \sqrt{2}$$

$\lim_{z \rightarrow +\infty} A(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} (\sqrt{2z} - \sqrt{2}) = +\infty$, d.h., die nach rechts unbegrenzte Fläche hat keinen endlichen Inhalt.

$$c) A(z) = \int_2^z e^{-\frac{1}{2}x} dx = \left[-2e^{-\frac{1}{2}x} \right]_2^z = -2e^{-\frac{1}{2}z} + \frac{2}{e}$$

$\lim_{z \rightarrow +\infty} A(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(-2e^{-\frac{1}{2}z} + \frac{2}{e} \right) = \frac{2}{e}$, d.h., die nach rechts unbegrenzte Fläche hat den endlichen Inhalt

$$A = \frac{2}{e} \approx 0,74.$$

$$d) A(z) = \int_2^z \frac{3}{x} dx = [3 \ln|x|]_2^z = 3 \ln(z) - 3 \ln(2) = 3 \ln\left(\frac{z}{2}\right)$$

$\lim_{z \rightarrow +\infty} A(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(3 \ln\left(\frac{z}{2}\right) \right) = +\infty$, d.h., die nach rechts unbegrenzte Fläche hat keinen endlichen Inhalt.

$$2 \quad (1) \quad A(z) = \int_z^1 \frac{2}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{x^2} \right]_z^1 = -1 + \frac{1}{z^2}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} A(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{1}{z^2} \right) = +\infty, \text{ d.h., die nach oben}$$

unbegrenzte Fläche hat keinen endlichen Inhalt.

$$(2) \quad A(z) = \int_z^4 \frac{4}{\sqrt{x}} dx = \left[8\sqrt{x} \right]_z^4 = 16 - 8\sqrt{z}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} A(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (16 - 8\sqrt{z}) = 16, \text{ d.h., die nach oben}$$

unbegrenzte Fläche hat den endlichen Inhalt $A = 16$.

$$3 \quad a) \quad \int_z^1 \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_z^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2z^2}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2z^2} \right) = +\infty, \text{ d.h., das uneigentliche Integral}$$

existiert nicht.

$$b) \quad \int_2^z \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_2^z = -\frac{1}{z} + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}, \text{ d.h., das uneigentliche Integral}$$

existiert.

$$c) \quad \int_z^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_z^2 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{z}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{z}) = 2\sqrt{2}, \text{ d.h., das uneigentliche Integral}$$

existiert.

$$d) \quad \int_{-1}^z e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_{-1}^z = -\frac{1}{e^z} + e$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^z} + e \right) = e, \text{ d.h., das uneigentliche Integral}$$

existiert.

Seite 33

$$4 \quad \int_z^0 4e^{0,4x} dx = \left[10e^{0,4x} \right]_z^0 = (10 - 10e^{0,4z})$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} (10 - 10e^{0,4z}) = 10, \text{ d.h., das uneigentliche}$$

Integral $\int_{-\infty}^0 4e^{0,4x} dx$ existiert.

$$7 \quad a) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{2x+3} + \frac{1}{5}x + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{5}x + 2 \right),$$

$$\text{da } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x+3}) = 0$$

⇒ Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{5}x + 2$ ist schräge Asymptote von G_f .

$$b) \quad g(x) = \frac{1}{5}x + 2$$

$$A(z) = \int_z^{-1} (f(x) - g(x)) dx = \int_z^{-1} e^{2x+3} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2x+3} \right]_z^{-1} = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} e^{2z+3}$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} A(z) = \lim_{z \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} e - \frac{1}{2} e^{2z+3} \right) = \frac{e}{2}, \text{ d.h., die Fläche hat}$$

den endlichen Inhalt $A = \frac{e}{2}$.

$$8 \quad A(z) = A_1(z) + A_2(z)$$

$$A_1(z) = \int_{-1}^z (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^z \frac{2}{x^2} dx = \left[-\frac{2}{x} \right]_{-1}^z = -\frac{2}{z} - 2$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} A_1(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{z} - 2 \right) = +\infty, \text{ d.h., die nach oben}$$

unbegrenzte Fläche A_1 hat keinen endlichen Inhalt.

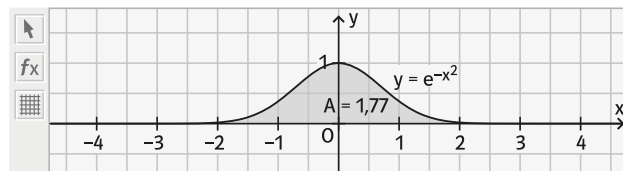
$$A_2(z) = \int_z^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_z^2 \frac{2}{x^2} dx = \left[-\frac{2}{x} \right]_z^2 = -1 + \frac{2}{z}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} A_2(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{2}{z} \right) = +\infty, \text{ d.h., die nach oben}$$

unbegrenzte Fläche A_2 hat keinen endlichen Inhalt.

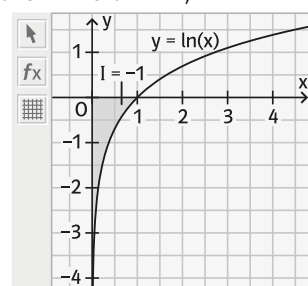
Damit hat die nach oben unbegrenzte Fläche A keinen endlichen Inhalt.

9 a)

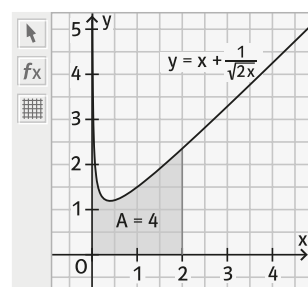


Die nach rechts und links unbegrenzte Fläche, die vom Graphen der Funktion f mit $f(x) = e^{-x^2}$ und der x -Achse begrenzt wird, hat den endlichen Inhalt $A \approx 1,77$.

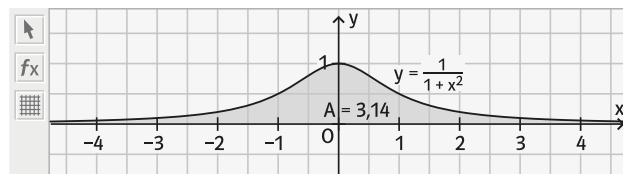
b) Die nach unten unbegrenzte Fläche, die vom Graphen der Funktion f mit $f(x) = \ln(x)$ und den Koordinatenachsen begrenzt wird, hat den endlichen Inhalt $A = 1$.



c) Die nach oben unbegrenzte Fläche, die vom Graphen der Funktion f mit $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{2x}}$, den Koordinatenachsen und der Geraden mit der Gleichung $x = 2$ begrenzt wird, hat den endlichen Inhalt $A = 4$.



d)



Die nach rechts und links unbegrenzte Fläche, die vom Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und der x -Achse begrenzt wird, hat den endlichen Inhalt $A \approx 3,14$.

$$10 \quad a) \quad \int_0^z \frac{5}{(x+k)^2} dx = \left[-\frac{5}{x+k} \right]_0^z = -\frac{5}{z+k} + \frac{5}{k}$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(-\frac{5}{z+k} + \frac{5}{k} \right) = \frac{5}{k}$$

$$\frac{5}{k} = 1 \Leftrightarrow k = 5$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{5}{(x+5)^2} dx = 1$$

$$\text{b) } \int_0^z e^{-3kx} dx = \left[-\frac{1}{3k} e^{-3kx} \right]_0^z = -\frac{1}{3k} e^{-3kz} + \frac{1}{3k}$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3k} e^{-3kz} + \frac{1}{3k} \right) = \frac{1}{3k}$$

$$\frac{1}{3k} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x} dx = 1$$

c) Bestimmen des Terms einer Stammfunktion F von f:
 $f(x) = (3k-3)(x+2)^{-k}$

$$F(x) = \frac{3k-3}{-k+1} (x+2)^{-k+1} = \frac{3(k-1)}{-(k-1)} (x+2)^{-(k-1)} = -\frac{3}{(x+2)^{k-1}}$$

$$\int_0^z \frac{3k-3}{(x+2)^k} dx = \left[-\frac{3}{(x+2)^{k-1}} \right]_0^z = -\frac{3}{(z+2)^{k-1}} + \frac{3}{2^{k-1}}$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{(z+2)^{k-1}} + \frac{3}{2^{k-1}} \right) = \frac{3}{2^{k-1}}$$

$$\frac{3}{2^{k-1}} = 1 \Leftrightarrow 2^{k-1} = 3$$

$$\Leftrightarrow (k-1) \ln(2) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} + 1$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{3 \left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)} + 1 \right) - 3}{(x+2)^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)} + 1}} dx = 1$$

12 Untersuchung der nach rechts unbegrenzten Flächen:

$$A_k(z) = \int_1^z x^{-k} dx = \left[\frac{1}{1-k} x^{1-k} \right]_1^z = \frac{1}{1-k} z^{1-k} - \frac{1}{1-k}$$

$$= \frac{1}{1-k} (z^{1-k} - 1) = \frac{1}{1-k} \left(\frac{z}{z^k} - 1 \right) \text{ für } k \neq 1$$

Fall 1: $k > 1$

$$\frac{1}{1-k} \cdot \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{z}{z^k} - 1 \right) = \frac{1}{1-k} (-1) = \frac{1}{k-1}$$

Fall 2: $k < 1$

$$\frac{1}{1-k} \cdot \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{z}{z^k} - 1 \right) = +\infty$$

Fall 3: $k = 1$:

$$A_k(z) = \int_1^z x^{-1} dx = [\ln|x|]_1^z = \ln(z) - \ln(1) = \ln(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \ln(z) = +\infty$$

Die nach rechts unbegrenzten Flächen haben für $k > 1$ den endlichen Flächeninhalt $A_k = \frac{1}{k-1}$.

Untersuchung der nach oben unbegrenzten Flächen:

$$A_k(z) = \int_z^1 x^{-k} dx = \left[\frac{1}{1-k} x^{1-k} \right]_z^1 = \frac{1}{1-k} \left(1 - \frac{z}{z^k} \right) \text{ für } k \neq 1$$

Fall 1: $k > 1$

$$\frac{1}{1-k} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 - \frac{z}{z^k} \right) = +\infty$$

Fall 2: $k < 1$

$$\frac{1}{1-k} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 - \frac{z}{z^k} \right) = \frac{1}{1-k} \cdot 1 = \frac{1}{1-k}$$

Fall 3: $k = 1$:

$$A_k(z) = \int_z^1 x^{-1} dx = [\ln|x|]_z^1 = \ln(1) - \ln(z) = -\ln(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} (-\ln(z)) = +\infty$$

Die nach oben unbegrenzten Flächen haben für $k < 1$ den endlichen Flächeninhalt $A_k = \frac{1}{1-k}$.

7 Das Integral als Gesamtänderung einer Größe

Seite 34

Einstiegsaufgabe

In den ersten zwei Sekunden beschleunigt der Körper gleichmäßig mit $a = \frac{3}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ bei einer Fahrt nach oben, fährt anschließend 4 s lang mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ weiter und bremst dann 2 s lang mit $a = -\frac{3}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ wieder ab. Danach steht der Aufzug 4 s lang, bis er wieder mit $a = \left| -\frac{3}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right|$ nach unten beschleunigt, 2 s lang konstant mit $v = \left| -3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right|$ nach unten weiterfährt und mit $a = \frac{3}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ wieder bis zum Stand abbremst. Danach steht er 4 s lang. Der gesamte Vorgang dauert 22 s. Mit $s = \frac{1}{2} a t^2$ legt der Aufzug in jeder Beschleunigungs- und Abbremsphase eine Strecke von

$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2\text{s})^2 = 3 \text{ m}$ zurück. Mit $s = v \cdot t$ fährt er mit konstanter Geschwindigkeit eine Strecke von

$s_o = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4 \text{ s} = 12 \text{ m}$ nach oben und $s_u = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2 \text{ s} = 6 \text{ m}$ nach unten.

Damit ist die Höhendifferenz nach oben

$\Delta h_o = 3 \text{ m} + 12 \text{ m} + 3 \text{ m} = 18 \text{ m}$ und die Höhendifferenz nach unten $\Delta h_u = 3 \text{ m} + 6 \text{ m} + 3 \text{ m} = 12 \text{ m}$.

Dies lässt eine Stockwerkshöhe von 3 m vermuten, d.h., vom Startpunkt aus bewegt sich der Aufzug zunächst sechs Stockwerke nach oben, danach nur vier Stockwerke wieder nach unten.

Seite 36

1 a) $2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2 \text{ s} = 4 \text{ m}$ (zurückgelegte Strecke)

b) $10 \frac{\text{mm}}{\text{Woche}} \cdot 1 \text{ Woche} = 10 \text{ mm}$ (Wachstum)

c) $200 \frac{\text{l}}{\text{min}} \cdot 1 \text{ min} = 200 \text{ l}$ (Wasservolumen)

d) $5 \frac{\text{K}}{\text{km}} \cdot 1 \text{ km} = 5 \text{ K}$ (Temperaturdifferenz)

2 Die Länge der zurückgelegten Strecke (in m) entspricht dem Inhalt der Fläche, die der Graph mit der Zeitachse einschließt.

Graph A: $\frac{1}{2} (4+1) \cdot 2 = 5 \Rightarrow s = 5 \text{ m}$

Graph B: $\frac{1}{2} (4+1) \cdot 20 = 50 \Rightarrow s = 50 \text{ m}$

Graph C: $\frac{1}{2} (4+1) \cdot 1,0 = 2,5 \Rightarrow s = 2,5 \text{ m}$

Seite 37

3 a) In einem Zeitraum von drei Tagen wächst die Pflanze 1,6 mm.

b) In einem Zeitraum von drei Stunden werden 1,6 Tonnen Benzin produziert.

c) Der Inhalt der Querschnittsfläche der Profilschiene beträgt $1,6 \text{ cm}^2$.

- 4 a)** Der Flächeninhalt eines Kästchens entspricht einem durchfließenden Wasservolumen von $5\,000\,000\text{ m}^3$.
b) Drei Stunden nach Beginn nimmt die Wassermenge am schnellsten zu. Maximal ist die Wassermenge im Speicher nach sechs Stunden, minimal ist sie zu Beginn und nach zwölf Stunden.

c) Es ist $\int_0^{12} d(t) dt = 0$, d.h., das Volumen des bei Flut in den Speicher geströmten Wassers und das Volumen des bei Ebbe wieder herausgeströmten Wassers sind gleich. Der Wasserstand im Speicher ist zu Beginn der gleiche wie nach 12 Stunden.

- 5 a)** Die Flughöhe der Drohne ändert sich von 10 s bis 12,5 s nach Beginn nicht. Die maximale Flughöhe erreicht die Drohne nach 20 s.

b) $\int_0^{20} v(t) dt = 10 \cdot 1,25 + 4 \cdot 1,25 = 17,5$, da der Inhalt eines Kästchens der Höhendifferenz 1,25 m entspricht.

$$\int_{20}^{30} v(t) dt = -7 \cdot 1,25 = -8,75$$

Die Drohne fliegt nach 30 s höher als zu Beginn, da die Inhalte der Teilflächen zwischen G_v und der t-Achse oberhalb der t-Achse größer sind als der Inhalt der Teilfläche unterhalb.

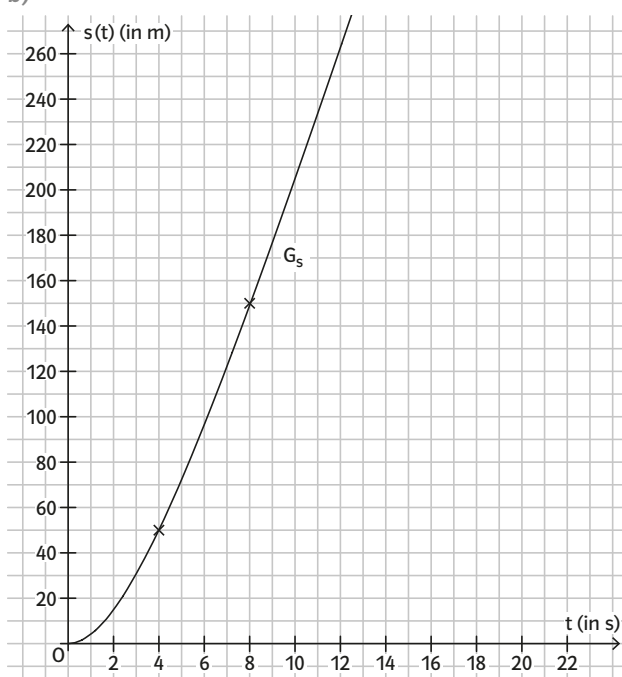
$17,5\text{ m} - 8,75\text{ m} = 8,75\text{ m} \Rightarrow$ Nach 30 s fliegt die Drohne 8,75 m höher als zu Beginn.

$$\begin{aligned} \mathbf{6 a)} \quad s(t) &= \int_0^t v(x) dx = \int_0^t (-30e^{-0,3x} + 30) dx \\ &= [100e^{-0,3x} + 30x]_0^t = 100e^{-0,3t} + 30t - 100 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s(4) = 50,12 \text{ und } s(8) = 149,07$$

Das Auto ist in der ersten 4 s etwa 50 m, in den ersten 8 s etwa 149 m weit gefahren.

b)



$$\mathbf{7 a)} \quad \int_0^{10} f(x) dx = \int_0^{10} 0,1x^2 dx = \left[\frac{1}{30}x^3 \right]_0^{10} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$$

Innerhalb der ersten 10 min fließen etwa 33,33 l Flüssigkeit in das Gefäß.

$$\mathbf{b)} \quad F(x) = 40 + \int_0^x f(t) dt = 40 + \left[\frac{1}{30}t^3 \right]_0^x = 40 + \frac{1}{30}x^3$$

(Flüssigkeitsmenge in l nach x Minuten)

Seite 38

$$\begin{aligned} \mathbf{8 a)} \quad \int_{10}^{50} v(t) dt &= \int_{10}^{50} 0,1\sqrt{t+4} dt = \left[\frac{1}{15}\sqrt{t+4}^3 \right]_{10}^{50} \\ &= \frac{1}{15}\sqrt{54}^3 - \frac{1}{15}\sqrt{14}^3 \approx 22,96 \end{aligned}$$

$\int_{10}^{50} v(t) dt$ gibt an, um wie viele Meter der Baum vom 10. Jahr bis zum 50. Jahr gewachsen ist.

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad h(t) &= 15 + \int_{10}^t 0,1\sqrt{x+4} dx = 15 + \left[\frac{1}{15}\sqrt{x+4}^3 \right]_{10}^t \\ &= 15 + \frac{1}{15}\sqrt{t+4}^3 - \frac{1}{15}\sqrt{14}^3 \end{aligned}$$

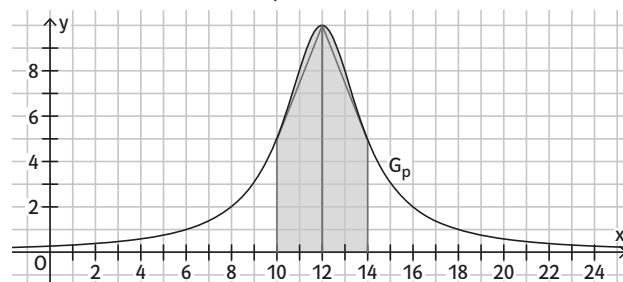
(Baumhöhe in m für ein Baumalter von $t = 10$ bis $t = 50$)

c) Individuelle Lösung, z.B.:

Ab welchem Zeitpunkt $t \in [10; 40]$, wächst der Baum innerhalb von zehn Jahren um 5 m?

9 Individuelle Lösung, z.B.:

Die zur Geraden mit der Gleichung $x = 12$ symmetrische Fläche zwischen G_p und der x-Achse im Intervall $[10; 14]$ lässt sich durch zwei Trapezflächen annähern:



$$\int_{10}^{14} p(x) dx = 2 \cdot \int_{10}^{12} p(x) dx \approx 2 \cdot \frac{1}{2} (5 + 10) \cdot 2 = 30$$

Folglich speist die Anlage zwischen 10:00 Uhr und 14:00 Uhr etwa 30 kWh elektrische Energie in das Stromnetz ein, wofür der Eigentümer eine Vergütung von etwa $30\text{ kWh} \cdot \frac{0,1\text{ €}}{\text{kWh}} = 3\text{ €}$ erhält.

Seite 39

- 11 a)** Es ist $f_a(x) = -\frac{6a}{\pi} \sin(ax) < 0$ für $x \in]0; 12[$,
 $f_a(x) = -\frac{6a}{\pi} \sin(ax) > 0$ für $x \in]12; 24[$ und
 $f_a(x) = -\frac{6a}{\pi} \sin(ax) = 0$ für $x = 0$, $x = 12$ und $x = 24$.
 $\Rightarrow$ Es ist $a > 0$ und die Periode von f_a muss 24 sein.
Damit gilt $24 = \frac{2\pi}{a} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{12}$.
Die gesuchte Funktion ist $f_{\frac{\pi}{12}}: x \mapsto -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^{12} f_{\frac{\pi}{12}}(x) dx &= \int_0^{12} \left(-\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)\right) dx = \left[\frac{6}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)\right]_0^{12} \\ &= \frac{6}{\pi} \cos(\pi) - \frac{6}{\pi} \cos(0) = -\frac{12}{\pi} \approx -3,82 \end{aligned}$$

Es müssen sich zu Beginn mindestens 382 Liter im Tank befinden.

$$\begin{aligned} \text{c) } 5 + \int_0^x \left(-\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right) dt &= 5 + \left[\frac{6}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right]_0^x \\ &= 5 + \frac{6}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) - \frac{6}{\pi} \\ 5 + \frac{6}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) - \frac{6}{\pi} &= 2,5 \Leftrightarrow \frac{6}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) = \frac{6}{\pi} - 2,5 \\ \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) &= 1 - \frac{5\pi}{12} \end{aligned}$$

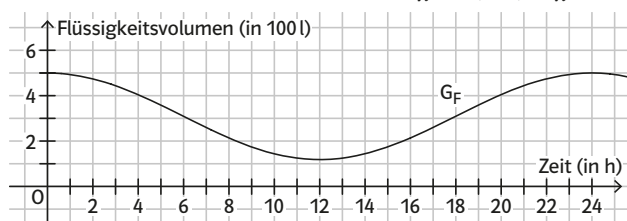
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12}x \approx 1,885 + 2k\pi \text{ oder } \frac{\pi}{12}x \approx -1,885 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x \approx 7,20 + 24k \text{ oder } x \approx -7,20 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

Für $x \in [0; 24]$ ergeben sich damit die Lösungen $x \approx 7,20$ und $x \approx 16,80$.

Etwa 7h 12min nach Beginn und etwa 16h 48min nach Beginn befinden sich 250l Flüssigkeit im Tank.

d) Nach Teilaufgabe c) gilt $F(x) = 5 + \frac{6}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) - \frac{6}{\pi}$.



12 a) Der Funktionswert $I_0(x)$ gibt die Anzahl der bis zu einem Zeitpunkt x (x in Minuten) ankommenden Anrufe an. Da der Inhalt einer Kästchenfläche dem Wert 50 entspricht, ergibt sich $I_0(4) \approx 9 \cdot 50 = 450$.

In den ersten vier Minuten kommen etwa 450 Anrufe an.

$$\text{b) } \int_6^{10} f(t) dt \approx 6 \cdot 50 = 300$$

Zwischen sechs und zehn Minuten nach Beginn gingen etwa 300 Anrufe ein.

c) Die 500 Anrufe entsprechen einer Fläche von 10 Kästchen. Da im Intervall $[0; 4]$ etwa 9 Kästchen eingeschlossen werden (vgl. Lösung zu Teilaufgabe a)), ergibt

$$\text{sich } \int_0^{4,2} f(t) dt \approx 10 \cdot 50 = 500.$$

Etwa 4,2min nach Beginn der Aktion sind 500 Anrufe eingegangen.

d) In den ersten drei Minuten können alle Anrufe entgegengenommen werden, dann wird die Anzahl der Anrufe zu groß. Erst ab etwa 5,3 Minuten kann die Anzahl von Anrufen in der Warteschleife wieder abgebaut werden.

13 a) Da der Inhalt einer Kästchenfläche dem Wert

$$0,5 \cdot 2 = 1 \text{ entspricht, ergibt sich } \int_{20}^{22} f(t) dt \approx 7.$$

In den ersten zwei Stunden kommen etwa 7000 Anrufe an.

b) Schon kurz nach Beginn des Konzerts übersteigt die Anzahl der eingehenden Anrufe die Kapazitäten. Bis 22 Uhr steigt die Anzahl der Personen in der Warteschleife. Somit ist sie etwa um 22 Uhr am größten (vorausgesetzt, alle Anruferinnen und Anrufer warten, bis ihr Anruf angenommen wird).

14 a) Die Funktion v beschreibt mit der Vertikalgeschwindigkeit die momentane Änderungsrate der Höhe h . Somit ist h eine Stammfunktion von v mit $h(0) = h_0$ (wobei h_0 die Höhe des Ballons über NHN beim Start der Ballonfahrt ist) und es gilt $h'(t) = v(t)$.

b) Die Integralfunktion I_0 mit $I_0(t) = \int_0^t v(x) dx$ gibt die

Höhenveränderung des Ballons zum Zeitpunkt t bezüglich der Höhe h_0 zum Zeitpunkt 0 an. Hat I_0 keine negativen Werte, so fährt der Ballon im betrachteten Zeitraum nie unterhalb der Starthöhe h_0 .

c) $\int_0^{30} v(t) dt = h(30) - h(0) = 0$ bedeutet für jeden möglichen Graphen von v , dass die Flächenbilanz der Fläche zwischen G_v und der t -Achse im Intervall $[0; 30]$ null ist.

Seite 40

15 a) Es ist $S(t) = \frac{50}{(t+1)^3} > 0$ für alle $t \geq 0$, d.h., es fließt stets Wasser aus der Quelle.

b) Die Funktion S ist streng monoton abnehmend für $t \geq 0$, d.h., es ist die Gleichung $S(t) = \frac{1}{1000}$ zu lösen, da $1l = 1dm^3 = \frac{1}{1000}m^3$ ist.

$$\frac{50}{(t+1)^3} = \frac{1}{1000} \Leftrightarrow (t+1)^3 = 50000 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{50000} - 1 \approx 35,84$$

Nach etwa 36 Tagen schüttet die Quelle weniger als 1 Liter pro Tag.

$$\text{c) } \int_0^z \frac{50}{(t+1)^3} dt = \left[-\frac{25}{(t+1)^2}\right]_0^z = -\frac{25}{(z+1)^2} + 25$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(-\frac{25}{(z+1)^2} + 25\right) = 25$$

Aus der Quelle fließen langfristig insgesamt $25m^3 = 250hl$ Wasser. Dieser Wert wird aber nicht überschritten.

16 a) Es ist $v'(t) = -0,1e^{-0,02t} < 0$ für alle $t \geq 0$, d.h., die Funktion v ist streng monoton abnehmend. Also bewegt sich die Schnecke immer langsamer fort.

$$\text{b) } \int_0^t 5e^{-0,02x} dx = [-250e^{-0,02x}]_0^t = -250e^{-0,02t} + 250$$

$$-250e^{-0,02t} + 250 = 100 \Leftrightarrow e^{-0,02t} = 0,6$$

$$\Leftrightarrow -0,02t = \ln(0,6) \Leftrightarrow t = -50 \ln(0,6) \approx 25,54$$

Die Schnecke braucht etwa 25,5min, um den ersten Meter zurückzulegen.

$$\text{c) } \lim_{t \rightarrow +\infty} (-250e^{-0,02t} + 250) = 250$$

Sogar wenn man einen nicht realistischen, unendlich langen Zeitraum für die Bewegung ansetzt, kommt die Schnecke mit dieser schnell kleiner werdenden Geschwindigkeit höchstens 2,5m weit. Sie erreicht folglich die Kleepflanze nicht.

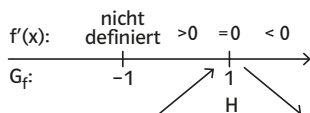
17 a) Es ist $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, d.h., es gibt keine weitere Nullstelle von f .

Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = -1$.

Da der Grad des Zählers kleiner als der Grad des Nenners ist, konvergiert f für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ gegen 0 und G_f hat die x -Achse (Gleichung: $y = 0$) als waagerechte Asymptote.

$$b) f'(x) = \frac{4 \cdot (x+1)^2 - 4x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(4x+4-8x)}{(x+1)^4} = \frac{4-4x}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



$$f(1) = 1 \Rightarrow \text{Hochpunkt } (1|1)$$

$$c) F(x) = 4 \cdot \ln(x+1) + \frac{4}{x+1} = 4(\ln(x+1) + (x+1)^{-1})$$

$$F'(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) = 4 \cdot \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{4x}{(x+1)^2} = f(x)$$

$$d) f(0,5) = \frac{4 \cdot 0,5}{(0,5+1)^2} = \frac{2}{2,25} \approx 0,89$$

Die Wirkstoffkonzentration nach 30 min ist etwa $0,89 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$, die maximal auftretende Wirkstoffkonzentration (nach 1 h) ist $1 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ (vgl. Lösung zu Teilaufgabe b)).

e) Man bestimmt die zweite Ableitung f'' von f und zeigt, dass $x = 2$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von f'' ist.

An der Wendestelle $x = 2$ hat die erste Ableitung f' ein Extremum, d.h., zwei Stunden nach Einnahme der Tablette ist die momentane Abnahme der Wirkstoffkonzentration am größten.

$$f) A(b) = \int_0^b \frac{4x}{(x+1)^2} dx = \left[4 \cdot \ln(x+1) + \frac{4}{x+1} \right]_0^b$$

$$= 4 \cdot \ln(b+1) + \frac{4}{b+1} - (4 \cdot \ln(1) + 4)$$

$$= 4 \cdot \ln(b+1) + \frac{4}{b+1} - 4$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} A(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(4 \cdot \ln(b+1) + \frac{4}{b+1} - 4 \right) = +\infty$$

Für große Zeitwerte stellt die Funktion f keine realistische Modellierung der zeitlichen Entwicklung der Wirkstoffkonzentration dar.

Seite 41

$$18 \quad 600 \cdot \int_{-6}^6 \left(1 - \frac{1}{36} t^2 \right) dt = 1200 \cdot \int_0^6 \left(1 - \frac{1}{36} t^2 \right) dt$$

$$= 1200 \cdot \left[t - \frac{1}{108} t^3 \right]_0^6$$

$$= 1200 \left(6 - \frac{6^3}{108} \right) = 1200 \cdot 4 = 4800$$

Die umgewandelte Kohlenstoffdioxidmenge von 1 m^2 Blattfläche beträgt $4800 \text{ ml} = 4,8 \text{ l}$.

Oberflächeninhalt aller Blätter der Buche:

$$200\,000 \cdot 25 \text{ cm}^2 = 5\,000\,000 \text{ cm}^2 = 500 \text{ m}^2.$$

Gesamtmenge an umgewandeltem Kohlenstoffdioxid: $500 \cdot 4,8 \text{ l} = 2400 \text{ l}$.

Die Buche wandelt zwischen 6 Uhr und 18 Uhr etwa 2400 l Kohlenstoffdioxid um.

$$19 \quad \text{Zufluss: } f(x) = -\frac{1}{8}(x-4)^2 + 2 = -\frac{1}{8}x^2 + x.$$

$$\text{Abfluss: } g(x) = \frac{1}{4}x.$$

Ölmenge im Tank:

$$V(t) = 2 + \int_0^t (f(x) - g(x)) dx = 2 + \int_0^t \left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x \right) dx$$

$$= 2 + \left[-\frac{1}{24}x^3 + \frac{3}{8}x^2 \right]_0^t = 2 - \frac{1}{24}t^3 + \frac{3}{8}t^2, \quad t \in [0; 8].$$

$$V(2) = 2 - \frac{8}{24} + \frac{12}{8} = 2 + \frac{7}{6} \approx 3,17$$

$$V(4) = 2 - \frac{64}{24} + \frac{48}{8} = 2 + \frac{10}{3} \approx 5,33$$

$$V(6) = 2 - \frac{6^3}{24} + \frac{3 \cdot 6^2}{8} = 2 + \frac{9}{2} = 6,5$$

Im Tank befinden sich nach zwei Stunden etwa $3,17 \text{ m}^3$ Öl, nach vier Stunden etwa $5,33 \text{ m}^3$ Öl und nach sechs Stunden $6,5 \text{ m}^3$ Öl.

21 a) Damit sich ein Satellit in einer geostationären Bahn befindet, muss man ihn auf einen Abstand von etwa $r_2 = 42\,161 \text{ km}$ vom Erdmittelpunkt bringen.

$$E = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM}{r^2} dr = \gamma m M \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \gamma m M \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2}$$

$$= \gamma m M \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = \gamma m M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$= 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$\cdot \left(\frac{1}{6371 \cdot 10^3 \text{ m}} - \frac{1}{42\,161 \cdot 10^3 \text{ m}} \right)$$

$$\approx 5,31 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Die benötigte Energie beträgt etwa $5,31 \cdot 10^{10} \text{ J}$.

$$b) \int_{r_1}^z F(r) dr = \gamma m M \cdot \int_{r_1}^z \frac{1}{r^2} dr = \gamma m M \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^z = \gamma m M \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{r_1} \right)$$

$$\gamma m M \cdot \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{r_1} \right) = \gamma \frac{mM}{r_1}$$

$$\int_{r_1}^{+\infty} F(r) dr = \gamma \frac{mM}{r_1}$$

$$= 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{1000 \text{ kg} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6371 \cdot 10^3 \text{ m}}$$

$$\approx 6,25 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Die Energie, die benötigt würde, um einen Körper der Masse $m = 1000 \text{ kg}$ von einem Abstand $r_1 = 6371 \text{ km}$ vom Erdmittelpunkt zu einem unendlich großen Abstand r_2 vom Erdmittelpunkt zu bringen, beträgt etwa $6,25 \cdot 10^{10} \text{ J}$.

8 Volumen von Rotationskörpern

Seite 42

Einstiegsaufgabe

(1) Es entsteht ein Zylinder mit Grundkreisradius $r = 2 \text{ cm}$ und Höhe $h = 1 \text{ cm}$.

$$V_Z = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (2 \text{ cm})^2 \cdot 1 \text{ cm} = 4\pi \text{ cm}^3 \approx 12,6 \text{ cm}^3$$

(2) Es entsteht ein Kegel mit Grundkreisradius $r = 2 \text{ cm}$ und Höhe $h = 2 \text{ cm}$.

$$V_K = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot (2 \text{ cm})^2 \cdot 2 \text{ cm} = \frac{8}{3} \pi \text{ cm}^3 \approx 8,4 \text{ cm}^3$$

(3) Es entsteht eine Kugel mit Radius $r = 1 \text{ cm}$.

$$V_K = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot (1 \text{ cm})^3 = \frac{4}{3} \pi \text{ cm}^3 \approx 4,2 \text{ cm}^3$$

Seite 43

$$1 \quad a) V = \pi \int_{-1}^2 (\sqrt{x+1})^2 dx = \pi \int_{-1}^2 (x+1) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^2 = \pi \left(4 + \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{2} \pi \approx 14,14$$

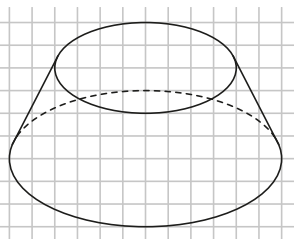
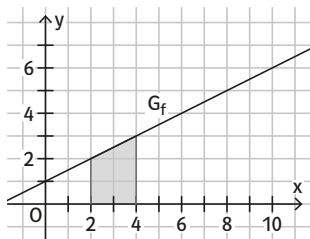
$$b) V = \pi \int_1^3 \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx = \pi \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^3$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3} \pi \approx 2,09$$

c) $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ oder $x = 2$

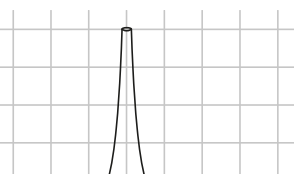
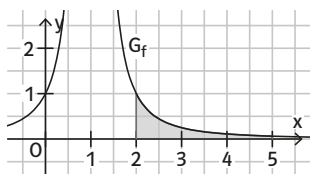
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^2 (x^2 - 4)^2 dx = 2\pi \int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x \right]_0^2 \\ &= 2\pi \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) = \frac{512}{15}\pi \approx 107,23 \end{aligned}$$

2 a)



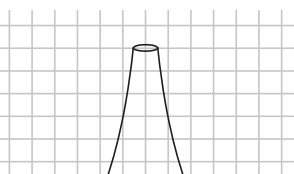
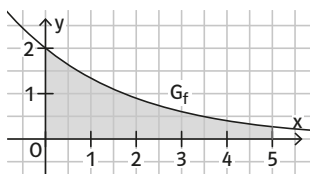
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_2^4 (0.5x + 1)^2 dx = \pi \left[\frac{2}{3}(0.5x + 1)^3 \right]_2^4 \\ &= \frac{2}{3}\pi(27 - 8) = \frac{38}{3}\pi \approx 39,79 \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_2^5 \frac{1}{(x-1)^2} dx = \pi \int_2^5 \frac{1}{(x-1)^4} dx \\ &= \pi \left[-\frac{1}{3(x-1)^3} \right]_2^5 = \pi \left(-\frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{21}{64}\pi \approx 1,03 \end{aligned}$$

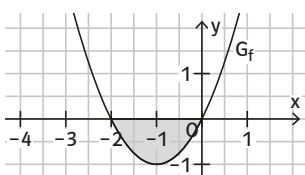
c)



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^5 (2e^{-0.4x})^2 dx = \pi \int_0^5 4e^{-0.8x} dx \\ &= \pi \left[-5e^{-0.8x} \right]_0^5 = \pi \left(-\frac{5}{e^4} + 5 \right) \approx 15,42 \end{aligned}$$

3 a) Nullstellen:

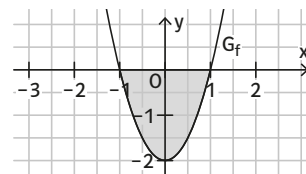
$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \text{ oder } x = -2. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^0 (x^2 + 2x)^2 dx \\ &= \pi \int_{-2}^0 (x^4 + 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_{-2}^0 \\ &= \pi \left(0 - \left(-\frac{32}{5} + 16 - \frac{32}{3} \right) \right) = \frac{16}{15}\pi \approx 3,35 \end{aligned}$$

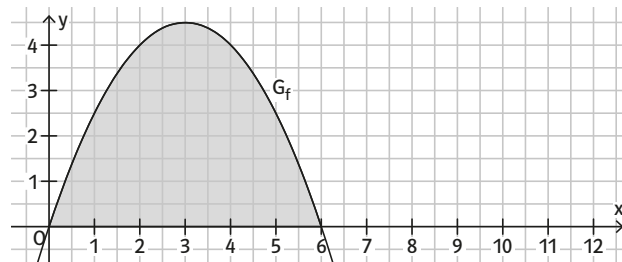
b) Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x-1)(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \text{ oder } x = -1. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 (2(x^2 - 1))^2 dx \\ &= 8\pi \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = 8\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x \right]_{-1}^1 \\ &= 8\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 - 0 \right) = \frac{64}{15}\pi \approx 13,40 \end{aligned}$$

c)



$$\begin{aligned} \text{Nullstellen: } f(x) &= 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 4.5 = 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow x-3 &= -3 \text{ oder } x-3 = 3 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \text{ oder } x = 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^6 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x \right)^2 dx = \pi \int_0^6 \left(\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 9x^2 \right) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + 3x^3 \right]_0^6 = \pi \left(\frac{6^5}{20} - \frac{3 \cdot 6^4}{4} + 3 \cdot 6^3 - 0 \right) \\ &= 64,8\pi \approx 203,58 \end{aligned}$$

Seite 44

5 a) Der Rotationskörper ist ein Zylinder mit Grundkreisradius $r = 2$ und Höhe $h = 4$, der innen bis zum Boden ausgehöhlt ist. Stellt man den Zylinder auf die Grundfläche, so hat die Innenwand im Querschnitt die Form einer Normalparabel.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 2^2 dx - \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 (4 - x) dx \\ &= \pi \left[4x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 = 8\pi \approx 25,13 \end{aligned}$$

b) Der Rotationskörper hat die Form einer runden Schale mit Höhe $h = 1$, deren kreisförmiger oberer Rand den Radius $r = 1$ hat. Die Wanddicke variiert.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx - \pi \int_0^1 (x^3)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx - \pi \int_0^1 x^6 dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \right]_0^1 = \frac{2}{35}\pi \approx 0,18 \end{aligned}$$

c) Der Rotationskörper hat annähernd die Form eines Ellipsoids ($r_1 = r_2 = 4$) mit einem zylinderförmigen Loch ($r = 1$ und $h = 2$) in der Mitte.

$$\begin{aligned} \text{Schnittstellen der Graphen:} \\ -x^2 + 2 &= 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ oder } x = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-1}^1 (-x^2 + 2)^2 dx - \pi \int_{-1}^1 1^2 dx \\
 &= \pi \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^2 + 4) dx - \pi \int_{-1}^1 1^2 dx \\
 &= \pi \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^2 + 3) dx = \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 3x \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{56}{15}\pi \approx 11,73
 \end{aligned}$$

6 a) Der Rotationskörper hat die Form eines Rohrstücks der Länge $l = 5$. Das Rohr hat einen Innenradius von $r_i = 1,5$ und einen Außenradius von $r_a = 2$ und damit eine Wanddicke von $0,5$.

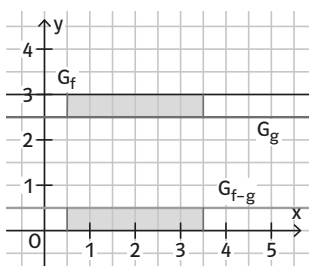
b) Der Rotationskörper ist ein Kegel mit Grundkreisradius $r = 3$ und Höhe $h = 3$.

c) Der Rotationskörper hat die Form des Kelchs eines Glases ohne Stiel (z.B. eines Sektglases). Der Kelch hat eine Höhe von $h = 4$ und am oberen Rand einen Durchmesser von $d = 4$.

7 Der Rotationskörper ist ein Kegelstumpf mit Grundkreisradius $r_1 = b$, Radius der Deckfläche $r_2 = a$ und Höhe $h = b - a$.

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b x^2 dx = \pi \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_a^b = \frac{1}{3}\pi(b^3 - a^3)$$

8



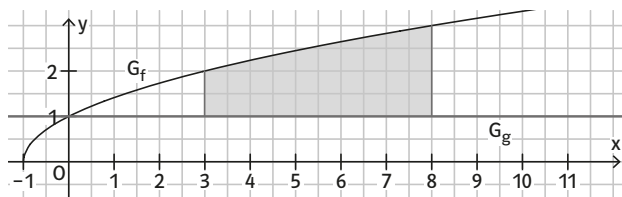
Mit $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx - \pi \int_a^b (g(x))^2 dx$ wird das Volumen

des Körpers berechnet, der entsteht, wenn die von den Graphen von f und g im Intervall $[a; b]$ eingeschlossene Fläche um die x -Achse rotiert. Im Fall zweier konstanter Funktionen f und g mit z.B. $f(x) = 3$ und $g(x) = 2,5$ würde ein Rohrstück der Länge $l = b - a$, einem Innenradius von $r_i = 2,5$, einem Außenradius von $r_a = 3$ und damit einer Wanddicke von $0,5$ entstehen.

Mit $V = \pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$ wird das Volumen des

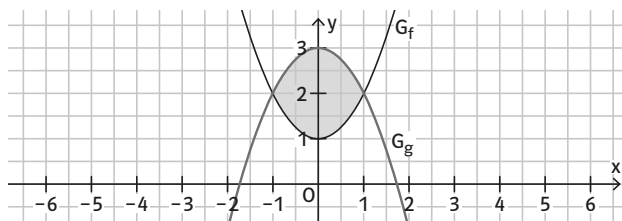
Körpers berechnet, der entsteht, wenn die vom Graphen der Differenzfunktion $f - g$ und der x -Achse im Intervall $[a; b]$ eingeschlossene Fläche um die x -Achse rotiert. Im Fall der konstanten Funktionen f und g von oben, also $f(x) - g(x) = 0,5$, würde ein Zylinder mit der Höhe $l = b - a$ und dem Grundkreisradius $r = 0,5$, entstehen. Die entstehenden Rotationskörper sind unterschiedlich und haben nicht das gleiche Volumen.

9 a)



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_3^8 (\sqrt{x+1})^2 dx - \pi \int_3^8 1^2 dx = \pi \int_3^8 x dx \\
 &= \pi \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_3^8 = 27,5\pi \approx 86,39
 \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-1}^1 (-x^2 + 3)^2 dx - \pi \int_{-1}^1 (x^2 + 1)^2 dx \\
 &= \pi \int_{-1}^1 (x^4 - 6x^2 + 9) dx - \pi \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\
 &= 2\pi \int_0^1 (-8x^2 + 8) dx = 16\pi \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 \\
 &= 16\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{3}\pi \approx 33,51
 \end{aligned}$$

10 a) $h = 144,4$ m

b) Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2,6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2,5(x - 0,25) = 0 \Leftrightarrow x = 0,25$.

Die Differenz $0,25$ bedeutet, dass die Außenwand des Torre Glories an seiner „Spitze“ eine Dicke von 25 cm hat.

c) $f(144,4) - g(144,4) \approx 0,39$

Der Wert bedeutet, dass die Außenwand des Torre Glories am Boden eine Dicke von etwa 39 cm hat.

$$\begin{aligned}
 \text{d) } V_a &= \pi \int_0^{144,4} (\sqrt{2,6x})^2 dx = \pi \int_0^{144,4} 2,6x dx \\
 &= 2,6\pi \int_0^{144,4} x dx = 2,6\pi \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^{144,4} \\
 &= 2,6\pi \left(\frac{1}{2}144,4^2 - 0 \right) \approx 85158
 \end{aligned}$$

Der Bruttorauminhalt beträgt etwa 85160 m^3 .

e) $V = V_a - V_i$

$$\begin{aligned}
 V_i &= \pi \int_{0,25}^{144,4} (\sqrt{2,5(x - 0,25)})^2 dx = \pi \int_{0,25}^{144,4} 2,5(x - 0,25) dx \\
 &= 2,5\pi \int_{0,25}^{144,4} (x - 0,25) dx \\
 &= 2,5\pi \left[\frac{1}{2}x^2 - 0,25x \right]_{0,25}^{144,4} \\
 &= 2,5\pi (10389,58 + 0,03125) \approx 81600
 \end{aligned}$$

$$V \approx 85158 - 81600 = 3558$$

Das Volumen der Außenwand beträgt etwa 3560 m^3 .

Seite 45

$$11 \quad V_w = \pi \int_0^h (2\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^h 4x dx = \pi [2x^2]_0^h \\ = \pi(2h^2 - 0) = 2h^2\pi$$

$$V_w = 50 \text{ ml} = 50 \text{ cm}^3$$

$$2h^2\pi = 50 \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{25}{\pi}} \approx 2,82$$

Das Wasser steht etwa 2,82 cm hoch im Gefäß.

12 a) Lage des Würfels:

Die Grundfläche des Würfels berührt die Innenwand mit den Eckpunkten, d.h., es ist die Gleichung $2 \cdot f(x) = d = \sqrt{2}$ im Intervall $[-4; 0]$ zu lösen, wobei d die Diagonale im Quadrat mit der Seitenlänge 1 ist.

$$2 \cdot 2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 16\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}x\right) = \frac{1}{8} \stackrel{x \in [-4; 0]}{\Leftrightarrow} \frac{\pi}{8}x \approx -1,4455 \Leftrightarrow x \approx -3,68$$

Wasser bis zur Grundfläche des Würfels:

$$V_G \approx \pi \int_{-4}^{-3,68} \left(2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)}\right)^2 dx = \pi \int_{-4}^{-3,68} 4\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right) dx \\ = 4\pi \left[\frac{8}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{8}x\right)\right]_{-4}^{-3,68} = 32 \left(\sin\left(\frac{\pi}{8}(-3,68)\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ = 32 \sin(-0,46\pi) + 32 \approx 0,252$$

$$0,252 \text{ dm}^3 = 0,252 \text{ l} \approx 250 \text{ ml.}$$

Damit das Wasser die Grundfläche des Würfels berührt, müssen etwa 250 ml Wasser in das Gefäß gefüllt werden.

Wasser bis zur Deckfläche des Würfels (das Würfelvolumen muss subtrahiert werden):

$$V_D \approx \pi \int_{-4}^{-2,68} \left(2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)}\right)^2 dx - 1^3 = \pi \int_{-4}^{-2,68} 4\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right) dx - 1^3 \\ = 4\pi \left[\frac{8}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{8}x\right)\right]_{-4}^{-2,68} - 1 \\ = 32 \sin(-0,335\pi) + 32 - 1 \approx 3,204.$$

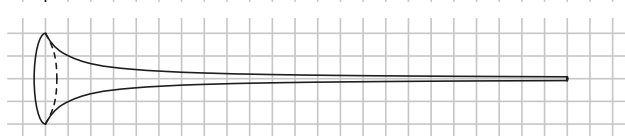
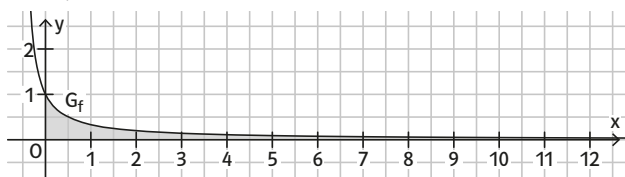
Damit das Wasser die Deckfläche des Würfels berührt, müssen etwa 3,2 l Wasser in das Gefäß gefüllt werden.

$$b) \text{ Bestimmen von } a \text{ mit } \pi \int_a^{a+1} 4\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right) dx = 8,$$

$$a \in [-2,68; -1].$$

Die gesuchte Höhe h ergibt sich dann mit $h = 4 + a$.

14 a)



$$V(t) = \pi \int_0^t \left(\frac{1}{2x+1}\right)^2 dx = \pi \int_0^t (2x+1)^{-2} dx \\ = \pi \left[-\frac{1}{2(2x+1)}\right]_0^t = \pi \left(-\frac{1}{2(2t+1)} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4t+2}\right)\pi$$

$$b) \quad A(z) = \int_0^z \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} [\ln|2x+1|]_0^z \\ = \frac{1}{2} (\ln(2z+1) - \ln(1)) = \frac{1}{2} \ln(2z+1)$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} A(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln(2z+1)\right) = +\infty$$

Die Fläche besitzt keinen endlichen Inhalt.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = \pi \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4t+2}\right) = \frac{1}{2}\pi$$

Der Rotationskörper hat das endliche Volumen $V = \frac{\pi}{2}$.

Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen

Seite 46

$$1 \quad a) \quad F(x) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) + x + c$$

$$F(-1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \sin(-\pi) - 1 + c = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) + x + \frac{1}{2}$$

$$b) \quad f(x) = 6(4x+13)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 6(4x+13)^{\frac{3}{2}} + c = (4x+13)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$F(-1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (-4+13)^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3^3 + c = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = -27,5$$

$$F(x) = \sqrt{(4x+13)^3} - 27,5$$

$$c) \quad F(x) = 3 \ln|2+x| + c$$

$$F(-1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 \ln|1| + c = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$F(x) = 3 \ln|2+x| - \frac{1}{2}$$

$$d) \quad f(x) = 6(3x+5)^{-2}$$

$$F(x) = -\frac{6}{3} (3x+5)^{-1} + c = -\frac{2}{3x+5} + c$$

$$F(-1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{2}{-3+5} + c = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 + c = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = -\frac{2}{3x+5} + \frac{1}{2}$$

$$e) \quad F(x) = 5 \cdot e^{x+2} - ex + c$$

$$F(-1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 5 \cdot e^1 + e + c = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2} - 6e$$

$$F(x) = 5 \cdot e^{x+2} - ex - 6e - 0,5$$

$$f) \quad f(x) = \frac{3}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$F(x) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{3}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c = -\frac{6}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c$$

$$F(-1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{6}{\pi^2} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + c = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$F(x) = -\frac{6}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{2}$$

$$2 \quad a) \quad A = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = 2 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx \\ = 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 = 2 \left(\frac{2}{3} - 0\right) = \frac{4}{3}$$

$$b) \quad A = \left| \int_{-2}^2 \left(\frac{3}{4}x^2 - 3\right) dx \right| = \left| 2 \int_0^2 \left(\frac{3}{4}x^2 - 3\right) dx \right| \\ = 2 \left| \left[\frac{1}{4}x^3 - 3x\right]_0^2 \right| = 2|-4 - 0| = 8$$

c) Aufgrund der Punktsymmetrie des Graphen des Integranden zum Ursprung gilt

$$A = \left| \int_{-1,5}^0 (-1,5(x^3 - 2,25x)) dx \right| + \left| \int_0^{1,5} (-1,5(x^3 - 2,25x)) dx \right| \\ = 2 \cdot \int_0^{1,5} (-1,5(x^3 - 2,25x)) dx = -3 \int_0^{1,5} \left(x^3 - \frac{9}{4}x\right) dx \\ = -3 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{8}x^2\right]_0^{1,5} = \frac{243}{64}.$$

$$3 \text{ a) } \int_{-3}^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-3}^3 = 9 + 9 = 18$$

$$2 \cdot \int_0^3 x^2 dx = 2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 = 2(9 - 0) = 18$$

Das Integral $\int_{-3}^3 x^2 dx$ gibt den Inhalt der Fläche an, die

der Graph von f mit $f(x) = x^2$ mit der x -Achse im Intervall $[-3; 3]$ einschließt. Da G_f symmetrisch zur y -Achse ist und die Intervallgrenzen symmetrisch zur y -Achse liegen, kann dieser Flächeninhalt ebenso mit dem Integral

$2 \cdot \int_0^3 x^2 dx$ berechnet werden, also durch eine Verdopplung

des Inhalts der Fläche, die von G_f und der x -Achse im Intervall $[0; 3]$ eingeschlossen wird.

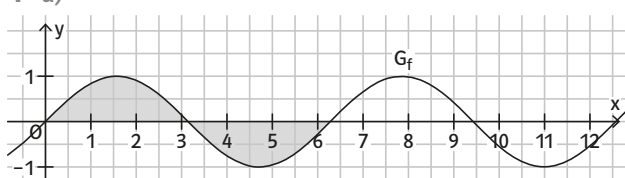
b) Individuelle Lösung (Funktionen, deren Graphen symmetrisch zur y -Achse sind), z.B.:

$$f: x \mapsto 2x^4 - 3x^2 + 1,$$

$$f: x \mapsto \cos(x),$$

$$f: x \mapsto e^{x^2}.$$

4 a)



Es ist $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0$, da der Inhalt der Teilfläche zwischen G_f und der x -Achse oberhalb der x -Achse gleich dem Inhalt der Teilfläche unterhalb der x -Achse ist. Die Flächenbilanz ist null.

Will man den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ und der x -Achse im Intervall $[0; 2\pi]$ berechnen, muss zunächst die Nullstelle $x = \pi$ von f in $]0; 2\pi[$ bestimmt werden. Dann werden die Integrale über den Teilflächen berechnet und deren Beträge addiert:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} \sin(x) dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx \right| = [-\cos(x)]_0^{\pi} + |[-\cos(x)]_{\pi}^{2\pi}| \\ &= (-\cos(\pi) + \cos(0)) + |-\cos(2\pi) + \cos(\pi)| \\ &= (1 + 1) + |-1 - 1| = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

b) A sei der Inhalt der Fläche, die G_f mit der x -Achse über dem Intervall $[-2; 3]$ einschließt.

(1) G_f liegt stets unterhalb der x -Achse. Daher liefert das Integral den Wert $-A$.

(2) G_f liegt nur in $] -2; 2[$ oberhalb der x -Achse. Daher entspricht das Integral nicht A .

(3) G_f liegt in $] -2; 3[$ oberhalb der x -Achse und schneidet sie in $x = -2$. Daher entspricht das Integral A .

(4) G_f liegt in $[-2; 3]$ oberhalb der x -Achse. Daher entspricht das Integral A .

5 Überprüfung: individuelle Lösung.

$$a) \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} x^3 - 1 \right) dx = \left[\frac{1}{12} x^4 - x \right]_{-1}^1 = -\frac{11}{12} - \frac{13}{12} = -2$$

$$b) \int_2^4 e^{0,5x-1} dx = \left[2e^{0,5x-1} \right]_2^4 = 2e^1 - 2e^0 = 2e - 2$$

$$c) \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(x) dx = \left[2 \sin(x) \right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = 2 + 0 = 2$$

$$d) \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{4}} 3 \sin(2x + \pi) dx = \left[-\frac{3}{2} \cos(2x + \pi) \right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{4}} = 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$e) \int_{-2}^4 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}x + 2}} dx = \left[4 \sqrt{\frac{1}{2}x + 2} \right]_{-2}^4 = 8 - 4 = 4$$

$$f) \int_1^{e^2} \frac{4}{3x} dx = \left[\frac{4}{3} \ln|x| \right]_1^{e^2} = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned} g) \int_{-1}^3 (x+1) e^{x^2+2x} dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^3 (2x+2) e^{x^2+2x} dx \\ &= \frac{1}{2} [e^{x^2+2x}]_{-1}^3 = \frac{1}{2} e^{15} - \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h) \int_1^e \frac{2-x}{4x-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_1^e \frac{4-2x}{4x-x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln|4x-x^2|]_1^e \\ &= \frac{1}{2} (\ln(4e-e^2) - \ln(3)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4e-e^2}{3}\right) \end{aligned}$$

6 a) $a = -1$

$$b) \int_{-1}^3 f(x) dx = I_{-1}(3) = 0$$

$$\int_1^3 f(x) dx = I_{-1}(3) - I_{-1}(1) = 0 - 2 = -2$$

c) Da I_{-1} eine Stammfunktion von f ist, ist auch F eine Stammfunktion von f , denn es gilt $I'_{-1}(x) = F'(x) = f(x)$. Die Funktion F besitzt aber keine Nullstelle in $[-2; 4]$ und kann daher keine Integralfunktion sein.

d) Die Funktion I_1 hat die Nullstelle $x = 1$. Ihr Graph entsteht daher aus dem Graphen von I_{-1} durch Verschiebung um -2 in y -Richtung.

Alle Nullstellen von I_1 in $[-2; 4]$ sind daher $x = 1$, $x \approx -1,8$ und $x \approx 3,8$.

$$7 \int_z^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = [2\sqrt{x-2}]_z^3 = 2 - 2\sqrt{z-2}$$

$$\lim_{z \rightarrow 2} (2 - 2\sqrt{z-2}) = 2$$

Das uneigentliche Integral $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$ existiert und es gilt

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = 2.$$

$$\int_3^z \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = [2\sqrt{x-2}]_3^z = 2\sqrt{z-2} - 2$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} (2\sqrt{z-2} - 2) = +\infty$$

Das uneigentliche Integral $\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$ existiert nicht.

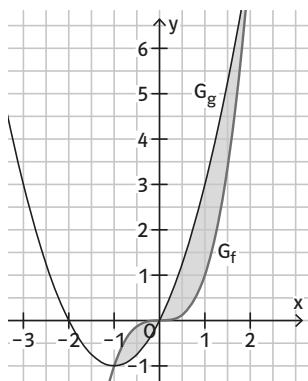
8 a) Schnittstellen der Graphen von f und g:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 = -2x - 15 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \\ \Leftrightarrow x = -3 \text{ oder } x = 5.$$

$$A = \int_{-3}^5 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-3}^5 (-x^2 + 2x + 15) dx \\ = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 15x \right]_{-3}^5 = \frac{175}{3} + 27 = 85\frac{1}{3}$$

b) Schnittstellen der Graphen von f und g:

$$f(x) = g(x) \\ \Leftrightarrow x^3 = x^2 + 2x \\ \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0, x = -1 \text{ oder } x = 2.$$



$$A = \int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx \\ = \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (x^2 + 2x - x^3) dx \\ = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 \\ = 0 + \frac{5}{12} + \frac{8}{3} - 0 = \frac{37}{12}$$

c) Schnittstellen der Graphen von f und g:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ oder } x = \frac{4}{3}.$$

$$A = \int_1^{\frac{4}{3}} (g(x) - f(x)) dx = \int_1^{\frac{4}{3}} \left(-\frac{3}{4}x + \frac{7}{4} - \frac{1}{x} \right) dx \\ = \left[-\frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - \ln|x| \right]_1^{\frac{4}{3}} = \frac{5}{3} - \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{11}{8} \\ = \frac{7}{24} - \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0,0040$$

Seite 47

9 a) Der Drachenflieger befindet sich nach drei Minuten auf der geringsten Höhe, da nur im Intervall $[0; 3]$ die Höhenänderung negativ ist.

b) Der Inhalt einer Kästchenfläche entspricht dem Wert 20 (Höhendifferenz 20 m).

Die Flächenbilanz der Fläche zwischen dem Graphen und der Zeitachse in $[0; 8]$ ist etwa $-3,5 + 10,5 = 7$ Kästchen. Folglich befindet sich der Drachenflieger nach acht Minuten etwa $250 \text{ m} + 7 \cdot 20 \text{ m} = 250 \text{ m} + 140 \text{ m} = 390 \text{ m}$ über NHN.

10 a) $V = \pi \int_0^1 (2x^3)^2 dx = \pi \int_0^1 4x^6 dx = \pi \left[\frac{4}{7}x^7 \right]_0^1 = \frac{4}{7}\pi$

b) $V = \pi \int_{\frac{2}{2}}^4 (e^{0,5x-1})^2 dx = \pi \int_{\frac{2}{2}}^4 e^{x-2} dx = \pi [e^{x-2}]_{\frac{2}{2}}^4 = \pi(e^2 - 1)$

c) $V = \pi \int_2^{12} \left(\frac{5}{2x+1} \right)^2 dx = \pi \int_2^{12} 25(2x+1)^{-2} dx \\ = \pi \left[-\frac{25}{2(2x+1)} \right]_2^{12} = \pi \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \right) = 2\pi$

11 a) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$$

$$f''(x) = x - \frac{3}{2}, \quad f'''(x) = 1$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$f'''(\frac{3}{2}) = 1 \neq 0 \text{ und } f(\frac{3}{2}) = \frac{7}{8}$$

$$\text{Wendepunkt: } W\left(\frac{3}{2} \mid \frac{7}{8}\right).$$

$$\text{Steigung des Graphen von f im Wendepunkt: } f'(\frac{3}{2}) = -\frac{9}{8}.$$

$$\text{Gleichung der Wendetangente: } y = mx + t,$$

$$\frac{7}{8} = -\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} + t \Leftrightarrow t = \frac{41}{16}.$$

$$\text{Also: } y = -\frac{9}{8}x + \frac{41}{16}.$$

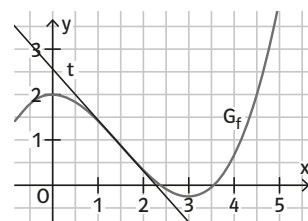
b) Schnittstelle der Wendetangente mit der x-Achse:

$$-\frac{9}{8}x + \frac{41}{16} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{41}{18}.$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{41}{18} \cdot \frac{41}{16} \approx 2,92$$

c) $F(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 2x$

$$\int_{-3}^0 f(x) dx = F(0) - F(-3) = 0 - \left(\frac{81}{24} + \frac{27}{4} - 6 \right) = -\frac{33}{8}$$



12 Setzt man $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = x-4$ und

$$h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \text{ so gilt für den Inhalt A der gefärbten}$$

Fläche

$$A = \int_{-1}^3 (f(x) - h(x)) dx + \int_3^7 (f(x) - g(x)) dx \\ = \int_{-1}^3 \left(\sqrt{x+2} - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) \right) dx + \int_3^7 \left(\sqrt{x+2} - (x-4) \right) dx \\ = \int_{-1}^3 \left(\sqrt{x+2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) dx + \int_3^7 \left(\sqrt{x+2} - x + 4 \right) dx \\ = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x+2}^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \right]_{-1}^3 + \left[\frac{2}{3}\sqrt{x+2}^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x \right]_3^7 \\ = \left(\frac{2}{3}\sqrt{125} + \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \right) \\ + \left(18 - \frac{49}{2} + 28 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{125} - \frac{9}{2} + 12 \right) \right) \\ = 13\frac{1}{3}$$

oder

$$A = \int_{-1}^7 f(x) dx - \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \right) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \int_{-1}^7 \sqrt{x+2} dx - 4 \\ = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x+2}^3 \right]_{-1}^7 - 4 = \left(18 - \frac{2}{3} \right) - 4 = 13\frac{1}{3}.$$

13 $\int_0^z \frac{1}{2}e^{-x} dx$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-x} \right]_0^z$$

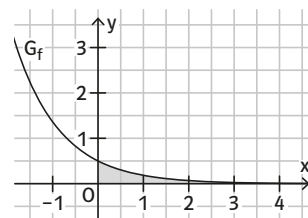
$$= -\frac{1}{2}e^{-z} - \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-z} + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-z} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-x} dx = \frac{1}{2}$$

Die Fläche, die der Graph von f und die Koordinatenachsen begrenzen, hat einen endlichen Flächeninhalt von $A = \frac{1}{2}$.



14 Es ist $f(t) = \frac{1}{2}t + 1$.

a) $I_0(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2}t + 1\right) dt = A(x) = \frac{1}{2}(1 + f(x)) \cdot x$, da sich damit

der Inhalt $A(x)$ der trapezförmigen Fläche zwischen G_f und der t -Achse bestimmen lässt.

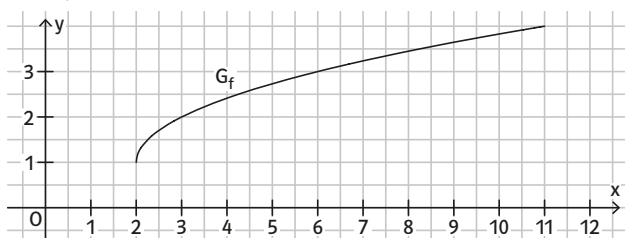
Es ist $A(x) = \frac{1}{2}(1 + f(x)) \cdot x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}x + 1\right) \cdot x = \frac{1}{4}x^2 + x$ und damit $I_0(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$.

b) $\int_2^x \left(\frac{1}{2}t + 1\right) dt = \frac{1}{2}(2 + f(x)) \cdot (x - 2)$
 $= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}x + 1\right) \cdot (x - 2) = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$

Man erhält also $I_2(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$.

c) Individuelle Lösung.

15 a)



b) $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (\sqrt{x-2} + 1) dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x-2}^3 + x\right]_2^3$
 $= \frac{11}{3} - 2 = \frac{5}{3}$

16



Schnittstellen der Graphen von f und g :

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 = x \Leftrightarrow x^2 = 4x$
 $\Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = 4$.

$V = \pi \int_0^4 (g(x))^2 dx - \pi \int_0^4 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^4 \left(x - \frac{1}{4}x^2\right) dx$
 $= \pi \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi$

17 Tangente an G_f in $P(a|a^2)$:

$y = mx + t$

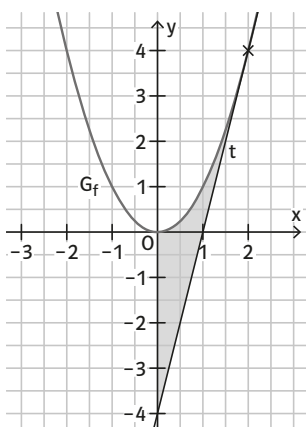
$f'(x) = 2x$ und $f'(a) = 2a$

$a^2 = 2a \cdot a + t \Leftrightarrow t = -a^2$

Term der Tangente:

$g_a(x) = 2a \cdot x - a^2$.

$A(a) = \int_0^a (f(x) - g_a(x)) dx$
 $= \int_0^a (x^2 - 2ax + a^2) dx$
 $= \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x\right]_0^a$
 $= \frac{1}{3}a^3 - a^3 + a^3 - 0$
 $= \frac{1}{3}a^3$

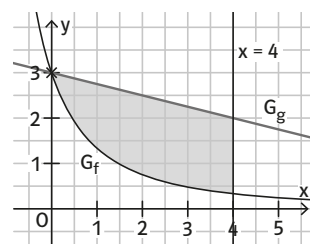


Seite 48

18 $f(x) = \frac{12}{(x+2)^2}$ und

$f(0) = 3 \Rightarrow g(x) = ax + 3$

Inhalt der Fläche, die die Gerade g , der Graph von f und die Gerade mit der Gleichung $x = 4$ im I. Quadranten einschließen:



$A(a) = \int_0^4 (g(x) - f(x)) dx$
 $= \int_0^4 \left(ax + 3 - \frac{12}{(x+2)^2}\right) dx$
 $= \left[\frac{1}{2}ax^2 + 3x + \frac{12}{x+2}\right]_0^4 = 8a + 14 - 6 = 8a + 8$.

$A(a) = 6 \Leftrightarrow 8a + 8 = 6 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$
 $\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{4}x + 3$

19 a) $f(t) = 4 \Leftrightarrow 8 - 8e^{-0,5t} = 4 \Leftrightarrow e^{-0,5t} = 0,5$
 $\Leftrightarrow -0,5t = \ln(0,5) \Leftrightarrow t = -2\ln(0,5) \approx 1,39$

Nach etwa 1,4 Sekunden ist die Durchflussgeschwindigkeit $4 \frac{1}{s}$.

b) $f'(t) = 4e^{-0,5t}$

$f'(t) < 0,1 \Leftrightarrow 4e^{-0,5t} < 0,1 \Leftrightarrow e^{-0,5t} < \frac{1}{40}$

$\Leftrightarrow -0,5t < \ln\left(\frac{1}{40}\right) \Leftrightarrow t > -2\ln\left(\frac{1}{40}\right) \approx 7,38$

Ab etwa 7,4 Sekunden nach Beginn nimmt die Durchflussgeschwindigkeit um weniger als $0,1 \frac{1}{s}$ pro Sekunde zu.

c) Es ist $f'(t) = 4e^{-0,5t} > 0$ für alle t . Somit ist f streng monoton zunehmend, d.h., die Durchflussgeschwindigkeit nimmt stets zu.

d) Zulauf in fünf Minuten, also 300 Sekunden:

$\int_0^{300} f(t) dt = \int_0^{300} (8 - 8e^{-0,5t}) dt = [8t + 16e^{-0,5t}]_0^{300}$
 $= 2400 + 16e^{-150} - 16 = 2384 + \frac{16}{e^{150}} \approx 2384$

$V \approx 500 \text{ l} + 2384 \text{ l} = 2884 \text{ l}$

Nach fünf Minuten sind etwa 2884 l Öl im Tank.

e) Zulauf in t Sekunden:

$\int_0^t f(t) dt = \int_0^t (8 - 8e^{-0,5x}) dx = [8x + 16e^{-0,5x}]_0^t$
 $= 8t + 16e^{-0,5t} - 16$

$V(t) = 500 + 8t + 16e^{-0,5t} - 16 = 8t + 16e^{-0,5t} + 484$

f) $V(20) = 160 + 16e^{-10} + 484 \approx 644,00$

Nach 20s befinden sich etwa 644 l Öl im Tank.

$0,9 \cdot 4800 = 4320$

Eine Drosselung erfolgt, wenn sich 4320 l Öl im Tank befinden.

Der Tank wird daher für die Menge von

$4320 \text{ l} - 644 \text{ l} = 3676 \text{ l}$ Öl mit $8 \frac{1}{s}$ befüllt.

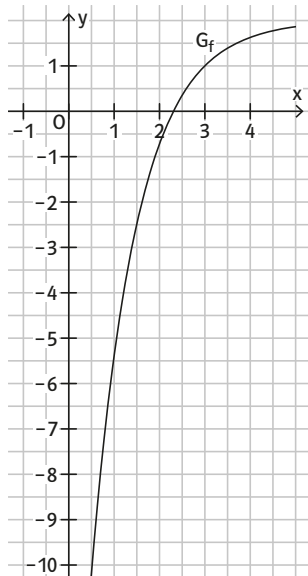
$3676 \text{ l} : 8 \frac{1}{s} = 459,5 \text{ s}$

Nach $20 \text{ s} + 459,5 \text{ s} = 479,5 \text{ s} \approx 8 \text{ min}$ wird die Zuflussmenge gedrosselt.

20 a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - e^{-x+3} = 0 \Leftrightarrow e^{-x+3} = 2$
 $\Leftrightarrow -x + 3 = \ln(2) \Leftrightarrow x = 3 - \ln(2) \approx 2,31$

b) Es ist $f'(x) = e^{-x+3} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich besitzt f keine Extremstelle.

Es ist $f''(x) = -e^{-x+3} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich ist G_f stets rechtsgekrümmt.



c) Es ist $f(3) = 1$ und $f'(3) = 1$.
Tangente an den Graphen von f im Punkt $(3|1)$ mit $m = 1$:

$1 = 1 \cdot 3 + t \Leftrightarrow t = -2$
 $g(x) = x - 2$ mit Nullstelle $x = 2$

$V = \pi \int_0^2 (g(x))^2 dx$ oder
 $= \pi \int_0^2 (x - 2)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx$
 $= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \frac{8}{3}\pi \approx 8,38$

Alternative:

Der Rotationskörper ist ein Kegel mit Radius $r = 2$ und Höhe $h = 2$.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2 = \frac{8}{3}\pi \approx 8,38$

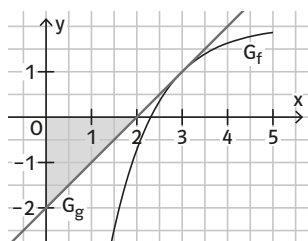
d) Es ist $0 < c < x_0$, also $0 < c < 3 - \ln(2) \approx 2,31$.

Die Integralfunktion I_c mit $I_c(x) = \int_c^x f(t) dt$ besitzt die Nullstelle $x = c$.

Da $f(x) < 0$ ist für $x < x_0$, ist $I_c(x) < 0$ für $c < x < x_0$.

Da $f(x) > 0$ ist für $x > x_0$, ist I_c streng monoton zunehmend für $x > x_0$. Zudem ist f streng monoton zunehmend.

Folglich existiert eine zweite Nullstelle x_2 von I_c mit $x_2 > x_0$.

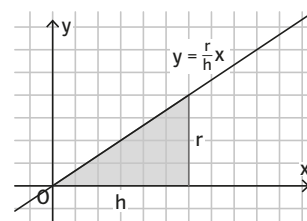


21 Rotiert die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \frac{r}{h}x$ und der x -Achse im Intervall $[0; h]$ um die x -Achse, so ist der entstehende Rotationskörper ein Kegel mit Radius r und Höhe h . Für sein Volumen gilt

$$V = \pi \int_0^h (g(x))^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx$$

$$= \pi \left[\frac{r^2}{3h^2} x^3 \right]_0^h = \pi \cdot \frac{r^2}{3h^2} \cdot h^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h.$$

Alternativ kann die Formel mit $g(x) = -\frac{r}{h}x + r$ hergeleitet werden.



22 a) $h(x) = f(g(x)) = \left(\frac{1}{3}x + 1\right)^2 - 1$

$H'(x) = 3\left(\frac{1}{3}x + 1\right)^2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = \left(\frac{1}{3}x + 1\right)^2 - 1 = h(x)$

b) $k(x) = 3 \cdot g(f(x)) = 3\left(\frac{1}{3}(x^2 - 1) + 1\right) = x^2 - 1 + 3 = x^2 + 2$

$K(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x + c$

$K(3) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 + c = 3 \Leftrightarrow 15 + c = 3 \Leftrightarrow c = -12$

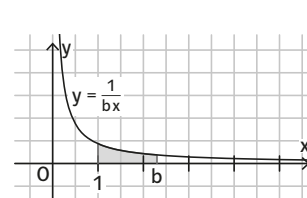
Also: $K: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 2x - 12$.

23 $V(b) = \pi \int_1^b \left(\frac{1}{bx}\right)^2 dx$

$= \pi \int_1^b \frac{1}{b^2 x^2} dx$

$= \pi \left[-\frac{1}{b^2 x} \right]_1^b$

$= \pi \left(-\frac{1}{b^3} + \frac{1}{b^2} \right)$



$V(b) = \pi \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b^3} \right)$

$V'(b) = \pi \left(-\frac{2}{b^3} + \frac{3}{b^4} \right), b > 1$

$V'(b) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{b^3} + \frac{3}{b^4} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{b^4} = \frac{2}{b^3} \Leftrightarrow 2b^4 - 3b^3 = 0$

$\Leftrightarrow b^3(2b - 3) = 0 \Leftrightarrow b = 1,5$ (da $b > 1$)

Es ist $V'(b) > 0$ für $1 < b < 1,5$ und $V'(b) < 0$ für $b > 1,5$.

Die Funktion V' hat also an der Stelle $b = 1,5$ einen VZW von + nach -. Damit hat V ein Maximum für $b = 1,5$.

Das Volumen ist also für $b = 1,5$ maximal.

Seite 49

24 $V_1(z) = \pi \int_1^z (f(x))^2 dx = \pi \int_1^z \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^2 dx = \pi \int_1^z x^{-4/3} dx$

$$= \pi \left[-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right]_1^z = \pi \left(-\frac{3}{\sqrt[3]{z}} + 3 \right)$$

$\lim_{z \rightarrow +\infty} V_1(z) = \pi \cdot \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{3}{\sqrt[3]{z}} \right) = 3\pi$

Der Rotationskörper, der bei Rotation der nach rechts unbegrenzten Fläche entsteht, hat das endliche Volumen $V_1 = 3\pi$.

$V_2(z) = \pi \int_z^1 (f(x))^2 dx = \pi \int_z^1 x^{-4/3} dx = \pi \left[-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right]_z^1 = \pi \left(-3 + \frac{3}{\sqrt[3]{z}} \right)$

$\lim_{z \rightarrow 0} V_2(z) = \pi \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{3}{\sqrt[3]{z}} - 3 \right) = +\infty$

Der Rotationskörper, der bei Rotation der nach oben unbegrenzten Fläche entsteht, hat kein endliches Volumen.

$$\begin{aligned}
 25 \text{ a) } A(a) &= \int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^{2a} (-x^2 + 2ax) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2 \right]_0^{2a} = -\frac{1}{3}(2a)^3 + a(2a)^2 - 0 \\
 &= -\frac{8}{3}a^3 + 4a^3 = \frac{4}{3}a^3
 \end{aligned}$$

b) Extremstellen von f:

$$f'(x) = -2x + 2a$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2a = 0 \Leftrightarrow x = a$$

Nach Aufgabenstellung liegt eine Maximumstelle vor.

Andere Möglichkeit:

Die Funktion f hat die Nullstellen 0 und 2a. Damit liegt der Scheitel des Graphen und damit das Maximum der Funktion an der Stelle $x = a$.

$$\text{Es ist } f(a) = -a^2 + 2a^2 = a^2.$$

Damit ist a^2 die Seitenlänge des Quadrats und sein Flächeninhalt a^4 .

Nach Teilaufgabe a) gilt somit $\frac{4}{3}a^3 = a^4$, $a \neq 0$ und damit $a = \frac{4}{3}$.

$$26 \text{ a) } h = 3,4 + 1,8 = 5,2$$

Höhe der Skulptur: 52 m, Höhe der Miniatur:

$$\frac{1}{50} \cdot 52 \text{ m} = 1,04 \text{ m} = 104 \text{ cm}.$$

Radius der kreisförmigen Bodenfläche der Skulptur:

$r_B = f(-3,4) = \frac{9}{20}\sqrt{1 + (-3,4)^2} \approx 1,595$. Die Bodenfläche hat also einen Radius von ca. 15,95 m bzw. einen Durchmesser von ca. 31,9 m.

Radius der kreisförmigen Deckfläche der Skulptur:

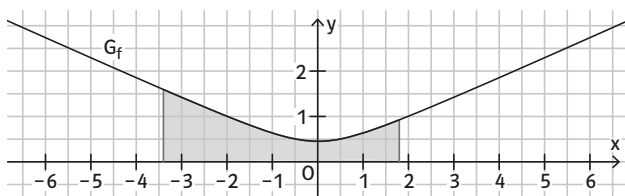
$$r_D = f(1,8) = \frac{9}{20}\sqrt{1 + 1,8^2} \approx 0,927.$$

Die Deckfläche hat also einen Radius von ca. 9,27 m bzw. einen Durchmesser von ca. 18,54 m.

Die Bodenfläche der Miniatur hat einen Durchmesser von etwa $\frac{1}{50} \cdot 31,9 \text{ m} = 0,638 \text{ m} = 63,8 \text{ cm}$.

Die Deckfläche der Miniatur hat einen Durchmesser von etwa $\frac{1}{50} \cdot 18,54 \text{ m} \approx 0,371 \text{ m} \approx 37,1 \text{ cm}$.

b)



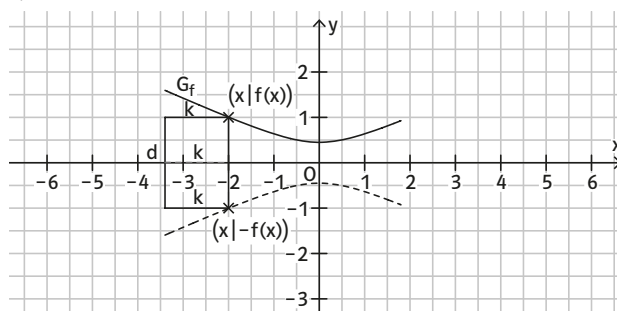
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-3,4}^{1,8} (f(x))^2 dx = \pi \int_{-3,4}^{1,8} \left(\frac{9}{20} (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \right)^2 dx \\
 &= \frac{81}{400} \pi \int_{-3,4}^{1,8} (1 + x^2) dx = \frac{81}{400} \pi \left[x + \frac{1}{3}x^3 \right]_{-3,4}^{1,8} \\
 &= \frac{81}{400} \pi \cdot \frac{7592}{375} \approx 12,880
 \end{aligned}$$

Das Volumen der Skulptur beträgt etwa 12880 m³.

Das Volumen der Miniatur beträgt etwa

$$\frac{1}{50^3} \cdot 12880 \text{ m}^3 = 0,10304 \text{ m}^3 = 103,04 \text{ dm}^3.$$

c)



Die Höhe des Würfels ist gleich seiner Kantenlänge k:

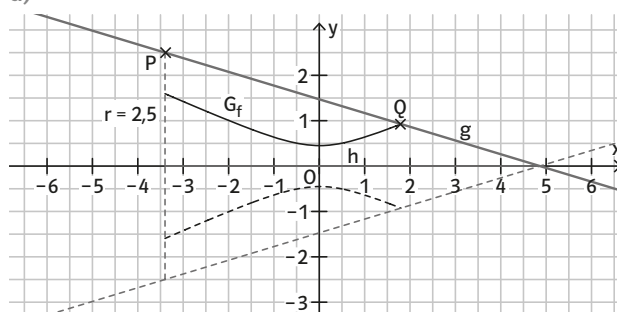
$$k = x - (-3,4) = x + 3,4.$$

Die Eckpunkte des Würfels berühren innen die Skulptur. Wenn d die Diagonale im Quadrat mit der Seitenlänge k ist, gilt

$$d = k\sqrt{2} = 2 \cdot f(x) \Leftrightarrow (x + 3,4)\sqrt{2} = 2 \cdot \frac{9}{20}(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{10}\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{2}(x + 3,4) \text{ mit } -3,4 < x < 0.$$

d)



Damit die Zelthöhe möglichst klein wird, muss der Radius der Grundfläche so groß wie möglich sein, also 25 m, für die Modellierung 2,5.

Eine Seite des Kegelquerschnitts liegt dann auf der Geraden g durch die Punkte P(-3,4|2,5) und Q(1,8|f(1,8)).

Geradengleichung von g:

$$y = mx + t$$

$$f(1,8) \approx 0,927 \text{ und } m = \frac{0,927 - 2,5}{1,8 - (-3,4)} = -\frac{121}{400}$$

$$2,5 = -\frac{121}{400}(-3,4) + t \Leftrightarrow t = 1,4715$$

$$g(x) = -\frac{121}{400}x + 1,4715$$

$$\text{Nullstelle von g: } -\frac{121}{400}x + 1,4715 = 0 \Leftrightarrow x \approx 4,86.$$

Die kleinstmögliche Höhe des Zeltes ist dann etwa $34 \text{ m} + 49 \text{ m} = 83 \text{ m}$.

27 a) Der Parameter a kommt im Funktionsterm der Funktion f nur im Nenner des Bruchs vor. Die Funktion hat daher ihr Maximum an der Stelle t, für die der Nenner $(t - a)^2 + 1$ minimal ist. Der Nenner ist für $t - a = 0$, also für $t = a$ minimal.

G_f hat sein Maximum bei $t = 5$. Somit ist $a = 5$.

b) Differenz der zurückgelegten Wege:

$$B: s_B = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 12 \text{ s} = 60 \text{ m}.$$

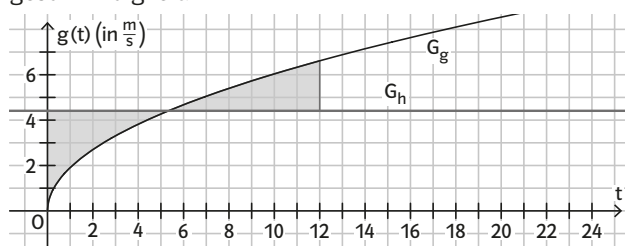
A: Der Inhalt einer Kästchenfläche entspricht dem Wert 2. Abzählen der Kästchen zwischen G_f und der t-Achse im Intervall $[0; 12]$: $2 \cdot 12 + 11,5 = 35,5$.

$$s_A \approx 71 \text{ m}$$

$$\text{Differenz } s_A - s_B \approx 11 \text{ m}$$

c) Fahrer A fährt in den ersten acht Sekunden schneller als Fahrer C und hat zum Zeitpunkt $t = 8$ einen Vorsprung, der dem Inhalt der Fläche zwischen G_f und G_g im Intervall $[0; 8]$ entspricht. Im Zeitraum 8 s bis 12 s fährt Fahrer C schneller. Die Strecke, die er aufholt, entspricht dem Inhalt der Fläche zwischen G_g und G_f im Intervall $[8; 12]$. Diese Fläche ist jedoch deutlich kleiner als die erste. Daher überholt Fahrer C den Fahrer A in der ersten zwölf Sekunden nicht.

d) Man sucht eine konstante Funktion h mit $h(x) = c$. Der Graph von h ist eine zur t -Achse parallele Gerade, die G_g so schneiden muss, dass im Intervall $[0; 12]$ die beiden Teilflächen zwischen G_h und G_g unterhalb von G_g und oberhalb von G_g den gleichen Flächeninhalt haben. Die Geschwindigkeit $c \frac{m}{s}$ ist dann die Durchschnittsgeschwindigkeit.



Exkursion: Partielle Integration

Seite 51

1 a) $\int_{-1}^1 x \cdot e^x dx$

$u'(x) = e^x$ und $v(x) = x$

$$\int_{-1}^1 x \cdot e^x dx = [x \cdot e^x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx = e + e^{-1} - [e^x]_{-1}^1$$

$$= e + \frac{1}{e} - \left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

b) $\int_0^2 5x \cdot e^x dx$

$u'(x) = e^x$ und $v(x) = 5x$

$$\int_0^2 5x \cdot e^x dx = [5x \cdot e^x]_0^2 - \int_0^2 5e^x dx = 10e^2 - [5e^x]_0^2$$

$$= 10e^2 - (5e^2 - 5) = 5e^2 + 5$$

c) $\int_0^\pi x \cdot \sin(x) dx$

$u'(x) = \sin(x)$ und $v(x) = x$

$$\int_0^\pi x \cdot \sin(x) dx = [x \cdot (-\cos(x))]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos(x)) dx$$

$$= \pi - [-\sin(x)]_0^\pi = \pi - (0 - 0) = \pi$$

d) $\int_0^\pi x \cdot \cos(x) dx$

$u'(x) = \cos(x)$ und $v(x) = x$

$$\int_0^\pi x \cdot \cos(x) dx = [x \cdot \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x) dx$$

$$= 0 - [-\cos(x)]_0^\pi = -(1 + 1) = -2$$

2 Individuelle Lösung, z. B.:

(1) $\square = c, c \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 c \cdot e^x dx = [c \cdot e^x]_0^1 = c(e - 1)$$

(2) $\square = ax, a \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 ax \cdot e^x dx$$

$u'(x) = e^x$ und $v(x) = ax$

$$\int_0^1 ax \cdot e^x dx = [ax \cdot e^x]_0^1 - \int_0^1 a e^x dx$$

$$= ae - [a e^x]_0^1 = ae - (ae - a) = a$$

(3) $\square = be^{ax}, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, b \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 be^{ax} \cdot e^x dx = \int_0^1 be^{(a+1)x} dx = \left[\frac{b}{a+1} \cdot e^{(a+1)x}\right]_0^1 = \frac{b}{a+1}(e^{a+1} - 1)$$

3 $I_1(x) = \int_1^x \ln(t) dt = \int_1^x 1 \cdot \ln(t) dt$

$u'(t) = 1$ und $v(t) = \ln(t)$

$$\int_1^x 1 \cdot \ln(t) dt = [t \cdot \ln(t)]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} dt$$

$$= [t \cdot \ln(t)]_1^x - [t]_1^x = [t \cdot \ln(t) - t]_1^x$$

$$= x \ln(x) - x + 1$$

Da I_1 mit $I_1(x) = x \ln(x) - x + 1$ eine Stammfunktion der $\ln$ -Funktion ist, ist auch F mit $F(x) = x \ln(x) - x$ eine Stammfunktion der $\ln$ -Funktion.

4 a) $I_0(x) = \int_0^x t \cdot e^t dt$

$u'(t) = e^t$ und $v(t) = t$

$$\int_0^x t \cdot e^t dt = [t \cdot e^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x - [e^t]_0^x = xe^x - e^x + 1$$

$F(x) = (x - 1)e^x$

b) $I_0(x) = \int_0^x 2t \cdot \sin(t) dt$

$u'(t) = \sin(t)$ und $v(t) = 2t$

$$\int_0^x 2t \cdot \sin(t) dt = [2t \cdot (-\cos(t))]_0^x - \int_0^x (-2 \cos(t)) dt$$

$$= -2x \cdot \cos(x) - [-2 \sin(t)]_0^x$$

$$= -2x \cdot \cos(x) + 2 \sin(x)$$

$F(x) = 2 \sin(x) - 2x \cdot \cos(x)$

c) $I_0(x) = \int_0^x t \cdot \cos(t) dt$

$u'(t) = \cos(t)$ und $v(t) = t$

$$\int_0^x t \cdot \cos(t) dt = [t \cdot \sin(t)]_0^x - \int_0^x \sin(t) dt$$

$$= x \cdot \sin(x) - [-\cos(t)]_0^x = x \cdot \sin(x) + \cos(x) - 1$$

$F(x) = x \cdot \sin(x) + \cos(x)$

$$d) I_0(x) = \int_0^x t \cdot e^{-t} dt$$

$$u'(t) = e^{-t} \text{ und } v(t) = t$$

$$\int_0^x t \cdot e^{-t} dx = [t \cdot (-e^{-t})]_0^x - \int_0^x (-e^{-t}) dt = -xe^{-x} - [e^{-t}]_0^x \\ = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = -\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + 1$$

$$F(x) = -\frac{x+1}{e^x}$$

$$5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot \cos(x) dx$$

$$u'(x) = \cos(x) \text{ und } v(x) = \sin(x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot \cos(x) dx = [\sin(x) \cdot \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \sin(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot \cos(x) dx = [\sin(x) \cdot \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \frac{1}{2}$$

$$6 \text{ a) } \int_0^2 x^2 \cdot e^x dx$$

$$u_1'(x) = e^x \text{ und } v_1(x) = x^2$$

$$\int_0^2 x^2 \cdot e^x dx = [x^2 \cdot e^x]_0^2 - \int_0^2 2x \cdot e^x dx = 4e^2 - \int_0^2 2x \cdot e^x dx$$

Zweite partielle Integration mit $u_2'(x) = e^x$ und

$$v_2(x) = 2x:$$

$$\int_0^2 x^2 \cdot e^x dx = 4e^2 - \left([2x \cdot e^x]_0^2 - \int_0^2 2e^x dx \right) \\ = 4e^2 - (4e^2 - [2e^x]_0^2) = 2e^2 - 2$$

$$b) \int_{\pi}^{-\pi} x^2 \cdot \cos(x) dx = -2 \int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos(x) dx$$

$$u_1'(x) = \cos(x) \text{ und } v_1(x) = x^2$$

$$-2 \int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos(x) dx = -2 [x^2 \cdot \sin(x)]_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} 2x \cdot \sin(x) dx \\ = 2 \int_0^{\pi} 2x \cdot \sin(x) dx$$

Zweite partielle Integration mit $u_2'(x) = \sin(x)$ und

$$v_2(x) = 2x:$$

$$\int_{\pi}^{-\pi} x^2 \cdot \cos(x) dx = 2 \left([2x \cdot (-\cos(x))]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-2 \cos(x)) dx \right) \\ = 2 (2\pi + 0 - [-2 \sin(x)]_0^{\pi}) = 4\pi$$

$$c) \int_0^{2.5} x^2 \cdot (2x-5)^4 dx$$

$$u_1'(x) = (2x-5)^4 \text{ und } v_1(x) = x^2$$

$$\int_0^{2.5} x^2 \cdot (2x-5)^4 dx = \left[x^2 \cdot \frac{1}{10} (2x-5)^5 \right]_0^{2.5} - \int_0^{2.5} \frac{1}{5} x \cdot (2x-5)^5 dx \\ = \int_0^{2.5} \frac{1}{5} x \cdot (2x-5)^5 dx$$

Zweite partielle Integration mit $u_2'(x) = (2x-5)^5$ und

$$v_2(x) = \frac{1}{5}x:$$

$$\int_0^{2.5} x^2 \cdot (2x-5)^4 dx$$

$$= \left[\frac{1}{5} x \cdot \frac{1}{12} (2x-5)^6 \right]_0^{2.5} - \int_0^{2.5} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{12} (2x-5)^6 dx$$

$$= 0 + \frac{1}{60} \left[\frac{1}{14} (2x-5)^7 \right]_0^{2.5}$$

$$= \frac{1}{60} \left(0 - \frac{1}{14} (-5)^7 \right) = \frac{15625}{168}$$

$$d) \int_{-1}^{\pi-1} x^2 \cdot \sin(x+1) dx$$

$$u_1'(x) = \sin(x+1) \text{ und } v_1(x) = x^2$$

$$\int_{-1}^{\pi-1} x^2 \cdot \sin(x+1) dx$$

$$= [x^2 \cdot (-\cos(x+1))]_{-1}^{\pi-1} - \int_{-1}^{\pi-1} (-2x \cdot \cos(x+1)) dx$$

$$= (\pi-1)^2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) - \int_{-1}^{\pi-1} (-2x \cdot \cos(x+1)) dx$$

Zweite partielle Integration mit $u_2'(x) = \cos(x+1)$ und $v_2(x) = -2x$:

$$\int_{-1}^{\pi-1} x^2 \cdot \sin(x+1) dx \\ = (\pi-1)^2 + 1 - \left([-2x \cdot \sin(x+1)]_{-1}^{\pi-1} - \int_{-1}^{\pi-1} (-2 \sin(x+1)) dx \right)$$

$$= (\pi-1)^2 + 1 - (0 - [2 \cos(x+1)]_{-1}^{\pi-1})$$

$$= (\pi-1)^2 + 1 + (-2-2)$$

$$= (\pi-1)^2 - 3 = \pi^2 - 2\pi - 2$$

$$7 \text{ a) } f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \int_0^{\pi} x \cdot \sin(x) dx$$

$$u'(x) = \sin(x) \text{ und } v(x) = x$$

$$\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x) dx = [x \cdot (-\cos(x))]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos(x)) dx \\ = [x \cdot (-\cos(x))]_0^{\pi} - [-\sin(x)]_0^{\pi} \\ = [\sin(x) - x \cdot \cos(x)]_0^{\pi} \\ = 0 + \pi - (0 - 0) = \pi$$

$$c) \int_{\pi}^{2\pi} x \cdot \sin(x) dx$$

$$= [\sin(x) - x \cdot \cos(x)]_{\pi}^{2\pi} \text{ (vgl. Teilaufgabe b))}$$

$$= 0 - 2\pi - (0 + \pi) = -3\pi$$

$$\int_{2\pi}^{3\pi} x \cdot \sin(x) dx = [\sin(x) - x \cdot \cos(x)]_{2\pi}^{3\pi} \\ = 0 + 3\pi - (0 - 2\pi) = 5\pi$$

$$A = \left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x \cdot \sin(x) dx \right| = \left| [\sin(x) - x \cdot \cos(x)]_{k\pi}^{(k+1)\pi} \right| \\ = |(k+1)\pi + k\pi| = |2k+1|\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Der Inhalt der Fläche, die von G_f und der x-Achse im Intervall $[k\pi; (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, eingeschlossen wird, beträgt $|2k+1|\pi$. Die Inhalte der Flächen über benachbarten Intervallen $[k\pi; (k+1)\pi]$ und $[(k+1)\pi; (k+2)\pi]$ werden für größer werdendes $|k|$ größer; sie unterscheiden sich jeweils um 2π .

Lambacher Schweizer

Das Lösungsheft enthält die Lösungen zu allen Aufgaben, die nicht im Schulbuch gelöst werden. Es unterstützt Sie im Unterricht und ermöglicht Ihren Schülerinnen und Schülern, sich zu Hause zu kontrollieren und ihr Wissen zu festigen.