

Teildruck

Die Verkaufsausgabe erscheint
unter der ISBN 978-3-12-735373-0

Lambacher Schweizer

Mathematik Jahrgangsstufe

grundlegendes
Anforderungsniveau



Lösungen

Berufliches Gymnasium
Baden-Württemberg



Quellennachweis

CMS - Cross Media Solutions GmbH, Würzburg, 13.2; 16.1; 25.1; 28.1; 38.2; 44.3; 45.1; 45.2; 45.3; 45.4; 52.2; 52.4; 53.1; 53.2; 58.2; 58.4; 58.5; 60.2; 62.1; 63.1; 63.2; 63.4; 63.5; 63.6; 64.1; 64.3; 64.5; 64.7; 70.1; 71.1; 71.2; 71.3; 71.4; 71.5; 72.1; 72.2; 72.3; 73.1; 73.2; 73.4; 74.2; 97.1; 118.1; 150.3; 150.4; imprint, Zusmarshausen, 1.1; 1.2; 1.3; 1.4; 1.5; 1.6; 2.1; 2.3; 2.4; 2.5; 2.6; 3.1; 3.2; 4.1; 5.1; 5.2; 5.3; 5.4; 5.5; 5.6; 5.7; 6.2; 6.5; 6.7; 6.8; 6.9; 6.10; 7.1; 7.2; 7.3; 8.1; 11.1; 14.2; 14.3; 15.1; 15.2; 15.3; 15.4; 17.1; 17.2; 17.3; 18.1; 18.2; 18.3; 19.1; 19.2; 19.3; 20.1; 20.2; 20.3; 26.1; 26.2; 32.3; 33.1; 33.2; 33.3; 33.4; 33.5; 33.6; 33.7; 37.1; 38.1; 38.3; 38.4; 38.5; 38.6; 39.1; 39.2; 39.3; 39.4; 40.1; 40.5; 40.6; 41.1; 41.2; 41.3; 41.4; 41.5; 41.6; 41.7; 42.1; 42.2; 42.3; 43.1; 43.2; 43.3; 45.5; 46.1; 47.1; 47.2; 47.3; 47.4; 47.5; 47.6; 51.1; 51.2; 51.3; 51.4; 51.5; 51.6; 52.1; 52.3; 54.1; 54.2; 54.3; 54.4; 54.5; 54.6; 54.7; 55.1; 55.2; 55.3; 55.4; 55.5; 55.6; 55.7; 56.1; 57.1; 57.2; 57.3; 58.1; 58.3; 58.6; 63.3; 64.4; 64.6; 64.8; 64.9; 65.1; 73.3; 73.5; 74.1; 74.3; 74.4; 80.1; 82.1; 86.1; 86.2; 89.1; 90.1; 96.1; 96.2; 98.2; 98.3; 99.1; 101.2; 102.1; 105.1; 105.2; 113.1; 114.1; 114.2; 114.3; 114.4; 114.5; 114.6; 114.7; 115.1; 115.2; 115.4; 115.5; 115.6; 117.3; 121.1; 121.2; 121.3; 122.1; 122.2; 123.2; 124.1; 125.1; 125.2; 125.3; 125.4; 128.1; 131.1; 134.1; 134.2; 135.1; 136.1; 136.2; 137.2; 137.3; 138.2; 138.3; 138.4; 138.5; 138.6; 138.7; 138.8; 138.9; 146.1; 146.2; 146.3; 147.1; 147.2; 148.1; 148.2; 148.3; 148.4; 149.1; 149.2; 149.3; 149.4; 150.1; 150.2; 150.5; Oehler, Sandra, Remseck, 2.2; 6.1; 6.3; 6.4; 6.6; 13.1; 13.3; 14.1; 14.4; 23.1; 23.2; 23.3; 31.1; 32.1; 32.2; 40.2; 40.3; 40.4; 44.1; 44.2; 49.1; 49.2; 49.3; 49.4; 59.1; 59.2; 59.3; 59.4; 60.1; 76.1; 76.2; 76.3; 76.4; 76.5; 76.6; 80.2; 80.3; 81.1; 81.2; 81.3; 81.4; 93.1; 98.1; 100.1; 100.2; 101.1; 110.1; 115.3; 116.1; 117.1; 123.1; 123.3; 126.1; 128.2; 128.3; 132.1; 132.2; 142.2; 142.3; Shutterstock.com RF, New York (Aleksandr Rybalko), I.2; Shutterstock.com RF, New York (WDCPhotographer), I.1; topset GmbH Rudi Warttmann, Nürtingen, 117.2; Uwe Alfer, Kråksmåla, Alsterbro, 62.2; 64.2; 78.1; 78.2; 78.3; 78.4; 78.5; 79.1; 79.2; 79.3;

1. Auflage

1 5 4 3 2 1 | 27 26 25 24 23

Alle Drucke dieser Auflage sind unverändert und können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Druckes.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Das Gleiche gilt für die Software und das Begleitmaterial.

Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und/oder in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Fotomechanische, digitale oder andere Wiedergabeverfahren nur mit Genehmigung des Verlages.

Jede öffentliche Vorführung, Sendung oder sonstige gewerbliche Nutzung oder deren Duldung sowie Vervielfältigung (z.B. Kopieren, Herunterladen oder Streamen) und Verleih und Vermietung ist nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Ernst Klett Verlages erlaubt.

Nutzungsvorbehalt: Die Nutzung für Text und Data Mining (§ 44b UrhG) ist vorbehalten. Dies betrifft nicht Text und Data Mining für Zwecke der wissenschaftlichen Forschung (§ 60d UrhG).

An verschiedenen Stellen dieses Werkes befinden sich Verweise (Links) auf Internet-Adressen. Haftungshinweis:

Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle wird die Haftung für die Inhalte der externen Seiten ausgeschlossen. Für den Inhalt dieser externen Seiten sind ausschließlich die Betreiber verantwortlich. Sollten Sie daher auf kostenpflichtige, illegale oder anstößige Inhalte treffen, so bedauern wir dies ausdrücklich und bitten Sie, uns umgehend per E-Mail an kundenservice@klett.de davon in Kenntnis zu setzen, damit bei der Nachproduktion der Verweis gelöscht wird.

Lehrmedien/Lehrprogramm nach § 14 JuSchG

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2023. Alle Rechte vorbehalten. www.klett.de

Das vorliegende Material dient ausschließlich gemäß § 60b UrhG dem Einsatz im Unterricht an Schulen.

Autorinnen und Autoren: Jürgen Appel, Manfred Baum, Martin Bellstedt, Boris Boor, Dr. Dieter Brandt, Gerhard Brüstle, Heidi Buck (†), Günther Dopfer, Prof. Rolf Dürr, Prof. Hans Freudigmann, Inga Giersemehl, Herbert Götz, Dieter Greulich, Dr. Frieder Haug, Manfred Herbst, Carolin Herrmann, Maren Herrmann, Edmund Herd, Dr. Jörg Heuß, Prof. Detlef Hoche, Thomas Jörgens, Thorsten Jürgensen-Engl, Barbara Kemmler (†), Christine Kestler, Dr. Stefan Knorr, Dr. Michael Kölle, Ingrid Kolupa, Andreas König, Hans-Georg Kosuch, Carsten Kreutz, Prof. Dr. Detlef Lind, Dr. Johannes Novotný, Claudia Pils, Marion Rauscher, Rolf Reimer, Dr. Ute Reinhardt, Dr. Wolfgang Riemer, Dr. Rebecca Roy, Rüdiger Sandmann, Dr. Torsten Schatz, Hartmut Schermuly (†), Prof. Reinhard Schmitt-Hartmann, Ulrich Schönbach, , Siegfried Schwehr, Dr. Maximilian Selinka, Raphaela Sonntag, Dr. Markus Spiegel, Heike Spielmans, Jörg Stark, Andrea Stühler, Barbara Sy, Thomas Thiessen, Dr. Heike Tomaschek, Dr. Thomas Weber, Prof. Dr. Ingo Weidig, Alexander Wollmann, Antje Zang, Dr. Peter Zimmermann, Prof. Manfred Zinser, Arnold Zitterbart

Entstanden in Zusammenarbeit mit dem Projektteam des Verlages.

Gestaltung: Petra Michel, Amberg

Titelbilder: U1.1 Shutterstock.com RF, New York (WDCPhotographer);

U1.2 Shutterstock.com RF, New York (Aleksandr Rybalko)

Satz: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg

Druck: Plump Druck & Medien GmbH, Rheinbreitbach

Printed in Germany

ISBN 978-3-12-735373-0



Lambacher Schweizer

Mathematik Jahrgangsstufe
grundlegendes Anforderungsniveau

Lösungen

Berufliches Gymnasium
Baden-Württemberg

bearbeitet von
Stefan Knorr
Ingrid Kolupa
Claudia Pils
Ute Reinhardt
Siegfried Schwehr
Markus Spiegel
Thomas Weber

Ernst Klett Verlag
Stuttgart · Leipzig · Dortmund

○ I Trigonometrische Funktionen	L1
1 Sinus und Kosinus am Einheitskreis	L1
2 Das Bogenmaß	L2
3 Sinusfunktion und Kosinusfunktion	L3
4 Die allgemeine Sinusfunktion	L5
5 Trigonometrische Gleichungen	L8
6 Anwendungen trigonometrischer Funktionen	L10
Training	L11
○ II Differenzialrechnung	L15
1 Differenzen- und Differenzialquotient	L15
2 Die Ableitungsfunktion	L16
3 Zusammengesetzte Funktionen	L18
4 Ableitungsregeln, höhere Ableitungen	L20
5 Tangenten	L22
6 Ableiten trigonometrischer Funktionen	L23
7 Lineare Verkettung von Funktionen und deren Ableitung	L24
8 Die Ableitung der Exponentialfunktion	L26
9 Die Produktregel	L28
Exkursion: Das Newton-Verfahren	L29
Training	L32
○ III Extremstellen und Wendestellen	L36
1 Bedeutung der ersten Ableitung – Monotonie	L36
2 Bedeutung der zweiten Ableitung – Krümmung	L37
3 Extrempunkte eines Funktionsgraphen	L39
4 Berechnung lokaler Extremstellen	L41
5 Berechnung von Wendestellen	L46
6 Vom Funktionsterm zum Graphen	L50
7 Differenzialrechnung im Sachzusammenhang	L56
Exkursion: Der Streit um die Ableitung	L57
Training	L57
○ IV Integralrechnung	L62
1 Rekonstruktion von Größen	L62
2 Berechnen von Flächeninhalten	L63
3 Stammfunktionen	L66
4 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	L68
5 Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse	L70
6 Flächen zwischen zwei Graphen	L75
7 Graphen von Stammfunktionen	L78
Exkursion: Rotationskörper und ihr Volumen	L80
Training	L80

○ V Lineare Gleichungssysteme; Funktionen bestimmen	L 83
1 Der Gauß-Algorithmus	L 83
2 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme	L 85
3 Bestimmen von Polynomfunktionen	L 86
4 Bestimmen von speziellen Funktionen	L 88
Exkursion: Mischungen	L 90
Training	L 91
○ VI Optimieren und Modellieren	L 95
1 Optimierung einbeschriebener Figuren	L 95
2 Optimierung von Körpern und Verpackungen	L 97
3 Der Modellierungskreislauf	L 99
Exkursion: Optimierung mittels Ersatzfunktionen	L 102
Training	L 103
○ VII Geometrie	L 105
1 Geraden im Raum	L 105
2 Gegenseitige Lage von Geraden - zueinander parallele Geraden	L 106
3 Gegenseitige Lage von Geraden - nicht parallele Geraden	L 107
4 Abstand und Winkel	L 108
5 Modellieren mit Vektoren	L 110
6 Vektorielle Beschreibung von Ebenen	L 110
7 Koordinatengleichung einer Ebene	L 112
8 Zeichnerische Darstellung von Ebenen	L 113
Exkursion: Winkel bei Ebenen	L 116
Training	L 116
○ VIII Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeiten	L 120
1 Zufallsexperimente	L 120
2 Versuchsreihe; Wahrscheinlichkeitsverteilung	L 120
3 Laplace-Experimente	L 121
4 Mehrstufige Zufallsexperimente	L 122
5 Verknüpfen von Ereignissen – Additionssatz	L 124
6 Vierfeldertafel – bedingte Wahrscheinlichkeit	L 126
7 Stochastische Unabhängigkeit	L 127
8 Kombinatorik – Bestimmung von Anzahlen	L 129
9 Diskrete Zufallsgrößen	L 131
10 Erwartungswert und Standardabweichung bei Zufallsgrößen	L 131
Exkursion: Das Ziegenproblem	L 132
Exkursion: Peinliche Fragen	L 132
Training	L 133
○ IX Binomialverteilung	L 137
1 Bernoulli-Experimente	L 137
2 Binomialverteilung – kumulierte Wahrscheinlichkeit	L 138
3 Problemstellungen bei der Binomialverteilung	L 140
4 Erwartungswert und Standardabweichung	L 141
Exkursion: Weitere Verteilungen	L 143
Training	L 143
○ Strategisch vorgehen	L 146

I Trigonometrische Funktionen

Seiten 8 und 9

Die Lösungen zum Check-in finden Sie am Ende vom Schulbuch.

1 Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Seite 10

Einstiegsaufgabe

Für die Berechnung geht man davon aus, dass die Einstiegsplattform sich etwa der Mitte des Kreises befindet. In der Wirklichkeit ist sie etwas tiefer; etwas weniger als die Hälfte des Sonnenrads liegt in den Kolköfen.

Winkel α	Rechnung zu Höhe h (in m)
$\alpha = 45^\circ$	$h = 18 \cdot \sin(45^\circ) = 12,8$
$\alpha = 90^\circ$	$h = 18 \cdot \sin(90^\circ) = 18$
$\alpha = 135^\circ$	$h = 18 \cdot \sin(135^\circ) = 12,8$
$\alpha = 180^\circ$	$h = 18 \cdot \sin(180^\circ) = 0$
$\alpha = 225^\circ$	$h \approx 18 \cdot \sin(225^\circ) = -12,8$
$\alpha = 270^\circ$	$h = 18 \cdot \sin(270^\circ) = -18$
$\alpha = 315^\circ$	$h \approx 18 \cdot \sin(315^\circ) = -12,8$

Zeit t (in min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Winkel α	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Höhe h (in m)	0	12,8	18	12,8	0	-12,8	-18	-12,8	0

Seite 12

- 1 $\sin(\alpha) = \sin(45^\circ)$
 $\approx 0,7 \approx \cos(\alpha)$
 $\sin(\beta) = \sin(135^\circ) \approx 0,7$
 $\cos(\beta) = \cos(135^\circ) \approx -0,7$
 $\sin(\gamma) = \sin(225^\circ)$
 $\approx -0,7 \approx \cos(\gamma)$
 $\sin(\delta) = \sin(315^\circ) \approx -0,7$
 $\cos(\delta) = \cos(315^\circ) \approx 0,7$

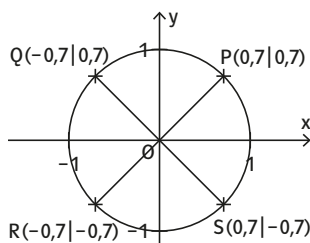
Hinweis: Die exakten Werte sind $+\frac{\sqrt{2}}{2} \approx +0,7$ und $-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0,7$.

- 2 a) $\sin(10^\circ) \approx 0,174$ b) $\sin(30^\circ) = 0,5$
 c) $\sin(160^\circ) \approx 0,342$ d) $\cos(-10^\circ) \approx 0,985$
 e) $\cos(240^\circ) \approx -0,5$ f) $\cos(450^\circ) \approx 0$

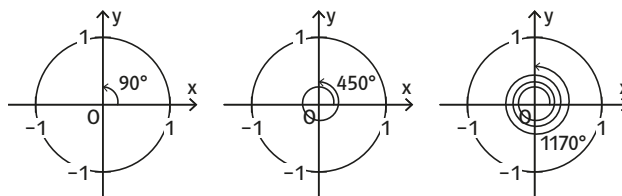
- 3 a) $\sin(90^\circ) = 1$ b) $\sin(330^\circ) = -0,5$
 c) $\cos(180^\circ) = -1$ d) $\cos(270^\circ) = 0$

4 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

5 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

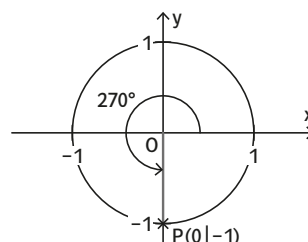


- 6 a) $\alpha = 810^\circ = 90^\circ + 2 \cdot 360^\circ$ d.h. $\alpha' = 90^\circ$.
 Weitere Winkel mit gleichem Sinuswert sind z.B. 450° und 1170° .

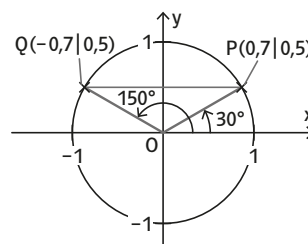


- b) $\alpha = -330^\circ = 30^\circ + (-1) \cdot 360^\circ$ d.h. $\alpha' = 30^\circ$.
 Weitere Winkel mit gleichem Sinuswert sind z.B. 390° und 750° .
 c) $\alpha = 540^\circ = 180^\circ + 1 \cdot 360^\circ$ d.h. $\alpha' = 180^\circ$.
 Weitere Winkel mit gleichem Sinuswert sind z.B. -180° und 900° .
 d) $\alpha = -810^\circ = 270^\circ - 3 \cdot 360^\circ$ d.h. $\alpha' = 270^\circ$.
 Weitere Winkel mit gleichem Sinuswert sind z.B. 630° und 990° .

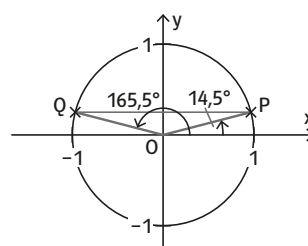
- 7 a) $\sin(\alpha) = -1$; $\alpha = 270^\circ$
 (Taschenrechner)
 Am Einheitskreis erkennt man, dass es keine weiteren Winkel zwischen 0° und 360° gibt.



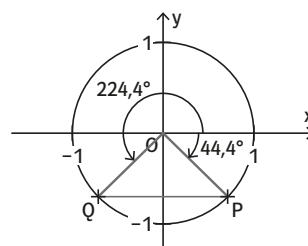
- b) $\sin(\alpha) = 0,5$; $\alpha = 30^\circ$
 (Taschenrechner)
 Zusätzlich erhält man $\alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.



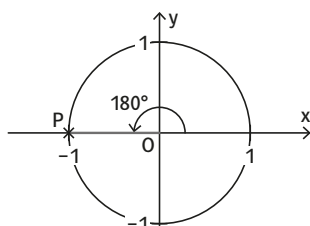
- c) $\sin(\alpha) = 0,25$; $\alpha \approx 14,5^\circ$
 (Taschenrechner)
 Zusätzlich erhält man $\alpha \approx 180^\circ - 14,5^\circ = 165,5^\circ$.



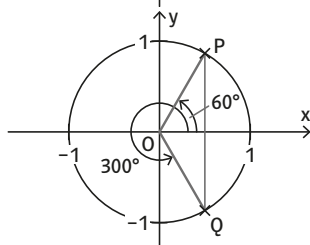
- d) $\sin(\alpha) = -0,7$; $\alpha \approx -44,4^\circ$
 (Taschenrechner)
 Zusätzlich erhält man $\alpha \approx 180^\circ - (-44,4^\circ) = 224,4^\circ$.



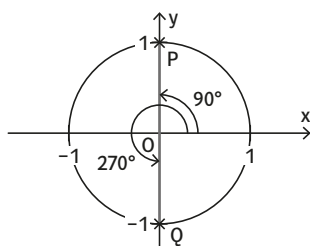
e) $\cos(\alpha) = -1$; $\alpha = 180^\circ$
(Taschenrechner)
Am Einheitskreis erkennt man, dass es keine weiteren Winkel zwischen 0° und 360° gibt.



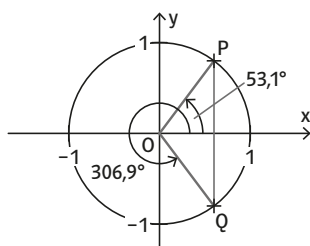
f) $\cos(\alpha) = 0,5$; $\alpha = 60^\circ$
(Taschenrechner)
Zusätzlich erhält man $\alpha = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.



g) $\cos(\alpha) = 0$; $\alpha = 90^\circ$
(Taschenrechner)
Zusätzlich erhält man $\alpha = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.



h) $\cos(\alpha) = 0,6$; $\alpha = 53,1^\circ$
(Taschenrechner)
Zusätzlich erhält man $\alpha \approx 360^\circ - (53,1^\circ) = 306,9^\circ$.



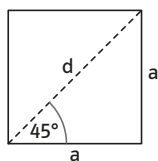
8 $\cos(180^\circ) = -1$ G
 $\cos(160^\circ) \approx -0,940$ E
 $\cos(210^\circ) \approx -0,866$ O
 $\cos(130^\circ) \approx -0,643$ M
 $\cos(270^\circ) = 0$ E
 $\cos(60^\circ) = 0,5$ T
 $\cos(340^\circ) \approx 0,940$ R
 $\cos(5^\circ) \approx 0,996$ I
 $\cos(0^\circ) = 1$ E

Das Lösungswort ist GEOMETRIE.

9 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

10 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

11 a) $d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$
 $\sin(45^\circ) = \frac{a}{d} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\cos(45^\circ) = \frac{a}{d} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$$b) h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

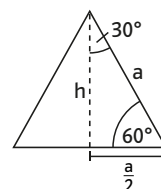
$$\sin(30^\circ) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) Skizze siehe Teilaufgabe b).

$$\sin(60^\circ) = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$



12 Für $\alpha = 45^\circ$ und $\alpha = 225^\circ$ gilt $\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$.

Begründung:

Für jeden Punkt $P(u|v)$ auf dem Einheitskreis gilt $u = \cos(\alpha)$ und $v = \sin(\alpha)$. Damit $\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$ gilt, muss also $u = v$ gelten. Dies ist nur der Fall, wenn der Punkt P auf der 1. Winkelhalbierenden liegt. Daraus folgt $\alpha = 45^\circ$ oder $\alpha = 225^\circ$.

13 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

2 Das Bogenmaß

Seite 13

Einstiegsaufgabe

Winkel α	360°	180°	90°	1°	720°	855°	k°
Strecke s (in m)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{360}$	$\frac{720}{360} = 2$	$\frac{855}{360} \approx 2,4$	$\frac{k}{360}$

Seite 14

1 a) $\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}$; $x = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{1}{4}\pi$

b) $x = \frac{20^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{1}{9}\pi$

c) $x = \frac{36^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{1}{5}\pi$

d) $x = \frac{3,6^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{1}{50}\pi$

e) $x = \frac{1^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{1}{180}\pi$

f) $x = \frac{135^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{3}{4}\pi$

2 a) $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}$; $\alpha = \frac{\pi}{2\pi} \cdot 360^\circ = 180^\circ$

b) $\alpha = \frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} \cdot 360^\circ = 45^\circ$

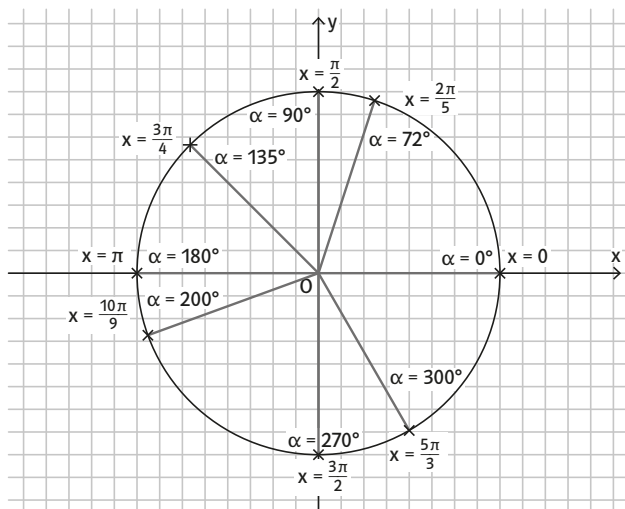
c) $\alpha = \frac{2\pi}{2\pi} \cdot 360^\circ = 360^\circ$

d) $\alpha = \frac{0,2\pi}{2\pi} \cdot 360^\circ = 36^\circ$

e) $\alpha = \frac{0,3\pi}{2\pi} \cdot 360^\circ = 54^\circ$

f) $\alpha = \frac{\frac{\pi}{18}}{2\pi} \cdot 360^\circ = 10^\circ$

3



Die Winkel $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$ und $\alpha = 270^\circ$ wurden im Grad- und Bogenmaß exakt eingezeichnet. Für die Lage der anderen Winkel genügt dann die näherungsweise Positionierung. Dies ermöglicht bereits die eindeutige Zuordnung.

Winkel im Gradmaß	Winkel im Bogenmaß
$\alpha = 72^\circ$	$x = \frac{2\pi}{5}$
$\alpha = 135^\circ$	$x = \frac{3\pi}{4}$
$\alpha = 200^\circ$	$x = \frac{10\pi}{9}$
$\alpha = 270^\circ$	$x = \frac{3\pi}{2}$
$\alpha = 300^\circ$	$x = \frac{5\pi}{3}$

4 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

5 a) $x = \frac{2,5^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{72} \approx 0,044$

b) $\alpha = \frac{-\pi}{2\pi} \cdot 360^\circ = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 360^\circ = -90^\circ$

c) $\alpha = \frac{-3\pi}{2\pi} \cdot 360^\circ = -540^\circ$

d) $x = \frac{810^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = 4,5\pi$

e) $x = \frac{-2^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{90} \approx -0,035$

f) $\alpha = \frac{2}{2\pi} \cdot 360^\circ \approx 114,59^\circ$

6 Umrechnung ins Gradmaß:

$x = \frac{\pi}{2}$: $\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 360^\circ = 90^\circ$

$x = -1,5\pi$: $\alpha = -270^\circ$

$x = 3\pi$: $\alpha = 540^\circ$

$x = -\pi$: $\alpha = -180^\circ$

$x = \frac{\pi}{4}$: $\alpha = 45^\circ$

Da auf dem Einheitskreis gilt: -270° (bzw. $-1,5\pi$) entspricht 90° (kurz $-270^\circ \triangleq 90^\circ$) gehören die Werte 90° , $\frac{\pi}{2}$ und $-1,5\pi$ zu demselben Punkt auf dem Einheitskreis. Wegen $-180^\circ \triangleq 180^\circ \triangleq 540^\circ$ gehören -180° , $-\pi$ und 3π zu demselben Punkt auf dem Einheitskreis. Ebenso gilt: $-315^\circ \triangleq 45^\circ \triangleq 405^\circ$. -315° , $\frac{\pi}{4}$ und 405° gehören zu demselben Punkt auf dem Einheitskreis.

7 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

8 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

3 Sinusfunktion und Kosinusfunktion

Seite 15

Einstiegsaufgabe

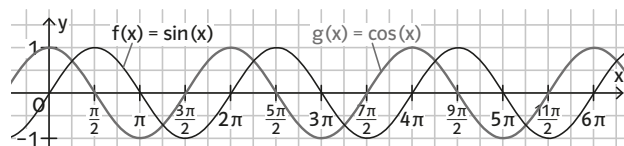
a) Der Schatten der Kugel bewegt sich ausgehend von Position 0 auf der Projektionswand nach oben bis zu $y = 1$ und dann wieder nach unten über die Ausgangsposition ($y = 0$) hinweg bis $y = -1$. Danach bewegt er sich in Richtung der Ausgangsposition ($y = 0$).

b)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
y	0	1	0	-1	0

Seite 17

1



a) $f(\pi) = \sin(\pi) = 0$;

$g(\pi) = \cos(\pi) = -1$

b) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

c) $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$

$g\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$

d) $f(-\pi) = \sin(-\pi) = 0$

$g(-\pi) = \cos(-\pi) = -1$

e) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

f) $f\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = 1$

$g\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = \cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = 0$

2 a) $\sin(0,2\pi) \approx 0,588$

b) $\sin(2) \approx 0,909$

c) $\sin(0,3) \approx 0,296$

d) $\cos(2) \approx -0,416$

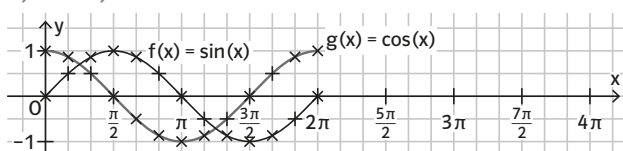
e) $\cos(0,3) \approx 0,955$

f) $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 0,809$

3 a)

x	f(x) = sin(x)	g(x) = cos(x)
0	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = 0,5$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,87$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,87$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = 0,5$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$
$\frac{2\pi}{3}$	$\approx 0,87$	$-0,5$
$\frac{5\pi}{6}$	0,5	$\approx -0,87$
π	0	-1
$\frac{7\pi}{6}$	-0,5	$\approx -0,87$
$\frac{4\pi}{3}$	$\approx -0,87$	-0,5
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
$\frac{5\pi}{3}$	$\approx -0,87$	0,5
$\frac{11\pi}{6}$	-0,5	$\approx 0,87$
2π	0	1

b) und c)



4 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

5 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

Seite 18

6 Aufgrund der 2π -Periodizität der Sinusfunktion gilt:
 $\sin(17,5\pi) = \sin(-4,5\pi) = \sin(-0,5\pi)$,
 $\sin(-3,5\pi) = \sin(4,5\pi) = \sin(12,5\pi)$,
 $\sin(17\pi) = \sin(15\pi) = \sin(-4\pi)$
 (da $\sin(\pi) = \sin(k \cdot \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$).

7 a) $\sin(x) = 0$ für $x_1 = 0$

weitere Stellen:

$$x_2 = x_1 - \pi = -\pi \in [-\pi; 3\pi]$$

$$x_3 = x_1 + \pi = \pi \in [-\pi; 3\pi]$$

$$x_4 = x_1 + 2\pi = 2\pi \in [-\pi; 3\pi]$$

$$x_5 = x_1 + 3\pi = 3\pi \in [-\pi; 3\pi]$$

An den Stellen $-\pi$, 0 , π , 2π und 3π hat die Sinusfunktion den Wert 0.

$$\sin(x) = 1 \text{ für } x_1 = \frac{\pi}{2}$$

weitere Stellen:

$$x_2 = x_1 - 2\pi = -\frac{3\pi}{2} \in [-\pi; 3\pi]$$

$$x_3 = x_1 + 2\pi = 2,5\pi \in [-\pi; 3\pi]$$

An den Stellen $0,5\pi$ und $2,5\pi$ hat die Sinusfunktion den Wert 1.

$$\sin(x) = -1 \text{ für } x_1 = \frac{3\pi}{2}$$

weitere Stellen:

$$x_2 = x_1 - 2\pi = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi; 3\pi]$$

$$x_3 = x_1 + 2\pi = 3,5\pi \notin [-\pi; 3\pi]$$

An den Stellen $-0,5\pi$ und $1,5\pi$ hat die Sinusfunktion den Wert -1.

$$\text{b) } \cos(x) = 0 \text{ für } x_1 = \frac{\pi}{2}$$

weitere Stellen:

$$x_2 = -x_1 = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi; 3\pi]$$

$$x_3 = x_1 + \pi = 1,5\pi \in [-\pi; 3\pi]$$

$$x_4 = x_1 + 2\pi = 2,5\pi \in [-\pi; 3\pi]$$

An den Stellen $-0,5\pi$, $0,5\pi$, $1,5\pi$ und $2,5\pi$ hat die Kosinusfunktion den Wert 0.

$$\cos(x) = 1 \text{ für } x_1 = 0$$

weitere Stellen:

$$x_2 = x_1 + 2\pi = 2\pi \in [-\pi; 3\pi]$$

An den Stellen 0 und 2π hat die Kosinusfunktion den Wert 1.

$$\cos(x) = -1 \text{ für } x_1 = \pi$$

weitere Stellen:

$$x_2 = x_1 - 2\pi = -\pi \in [-\pi; 3\pi]$$

$$x_3 = x_1 + 2\pi = 3\pi \in [-\pi; 3\pi]$$

An den Stellen $-\pi$, π , und 3π hat die Kosinusfunktion den Wert -1.

8 a) Dies trifft auf die Sinusfunktion zu, da $\sin(x) > 0$ für $x \in [0; \pi]$.

Dies trifft auf die Kosinusfunktion nicht zu, da

$$\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) = -0,5 < 0.$$

b) Dies trifft auf die Sinusfunktion nicht zu, da $\sin(0) = 0$.

Dies trifft auf die Kosinusfunktion zu, da $\cos(0) = 1$.

c) Dies trifft auf die Sinusfunktion nicht zu, da

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1.$$

Dies trifft auf die Kosinusfunktion nicht zu, da z.B.

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0.$$

d) Dies trifft auf die Sinusfunktion zu, da $\sin(x) < 0$ für

$$x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right].$$

Dies trifft auf die Kosinusfunktion zu, da $\cos(x) < 0$ für

$$x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right].$$

9 Interpretiert man den Graphen A bzw. B bzw. C als Ausschnitt aus $f(x) = \sin(x)$, ergeben sich

z.B. für A: $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$; für B: $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

für C: $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Interpretiert man den Graphen A bzw. B bzw. C als Ausschnitt aus $g(x) = \cos(x)$, ergeben sich z.B.

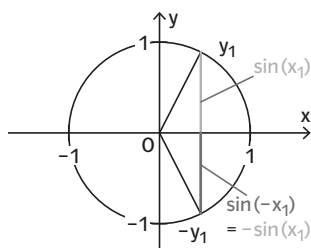
für A: $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$; für B: $[\pi; 2\pi]$, $[-\pi; 0]$;

für C: $[0; 2\pi]$, $[-2\pi; 0]$.

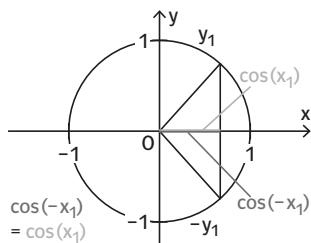
10 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

11 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

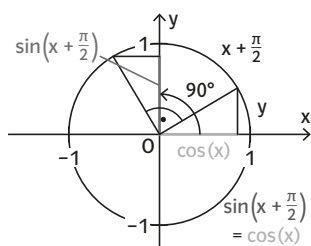
12 a) Punktsymmetrisch zum Ursprung bedeutet $f(x) = -f(-x)$.
Es gilt $\sin(-x_1) = -\sin(x_1)$ für alle $x_1 \in \mathbb{R}$, also ist der Graph der Sinusfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung.



b) Eine Funktion ist symmetrisch zur y-Achse, wenn $f(x) = f(-x)$.
Es gilt $\cos(-x_1) = \cos(x_1)$ für alle $x_1 \in \mathbb{R}$, also ist der Graph der Kosinusfunktion achsensymmetrisch zur y-Achse.



c) Drehung des Dreiecks um 90° im Gegenuhrzeigersinn:
 $\sin(\alpha + 90^\circ) = \cos(\alpha)$ entspricht im Bogenmaß
 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.



13 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

4 Die allgemeine Sinusfunktion

Seite 19

Einstiegsaufgabe

Der Graph von g geht aus dem Graphen der Sinusfunktion hervor durch Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung. Funktionsterm z.B. $h(x) = 2 \cdot \sin(x)$.

Der Graph von h geht aus dem Graphen der Sinusfunktion hervor durch Verschiebung um 2,5 in y-Richtung. Funktionsterm z.B. $g(x) = \sin(x) + 2,5$.

Der Graph von i geht aus dem Graphen der Sinusfunktion hervor durch Verschiebung um $-\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung.

Funktionsterm z.B. $i(x) = \sin(x - (-\frac{\pi}{2})) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

Aufgrund der Periodizität mit der Periode $p = 2\pi$ gibt es unendlich viele weitere Möglichkeiten diese Terme anzugeben, z.B.

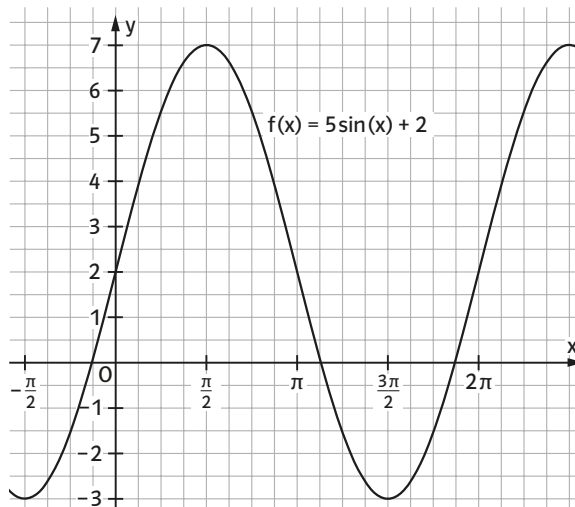
$$g(x) = \sin(x + 2\pi) + 2,5;$$

$$h(x) = 2 \cdot \sin(x + 2\pi);$$

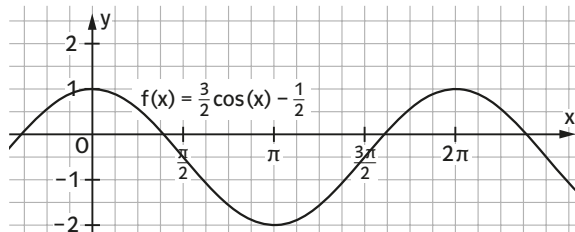
$$i(x) = 2 \cdot \sin(x + \frac{5\pi}{2}).$$

Seite 22

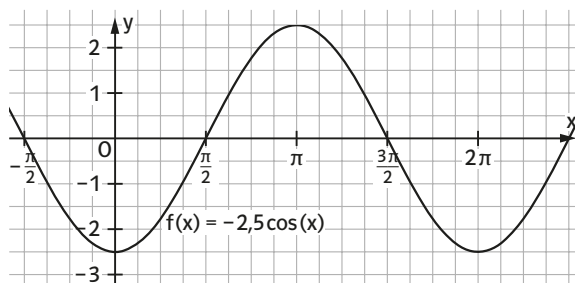
1 a) Amplitude $a = 5$, somit Streckung in y-Richtung mit Faktor 5; Verschiebung um +2 in y-Richtung.



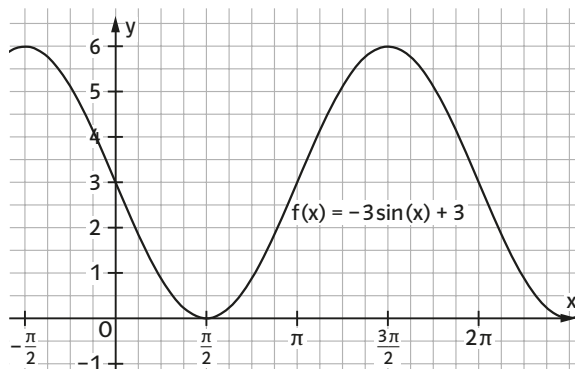
b) Amplitude $a = \frac{3}{2}$, somit Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{3}{2}$; Verschiebung um $-\frac{1}{2}$ in y-Richtung.



c) Amplitude $a = 2,5$, somit Streckung in y-Richtung mit Faktor 2,5; keine Verschiebung in y-Richtung.

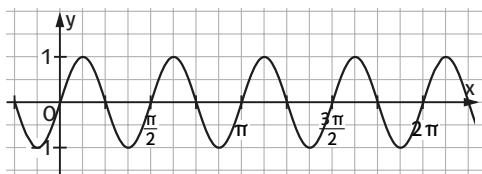


d) Amplitude $a = 3$, somit Streckung in y-Richtung mit Faktor 3; Verschiebung um 3 in y-Richtung.

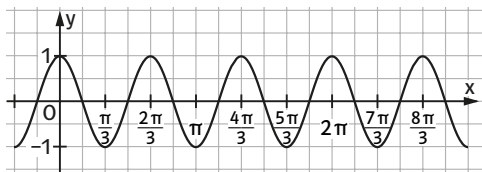


Hinweis: Das Minuszeichen bei einem negativen Streckfaktor bewirkt eine Spiegelung an der x-Achse.

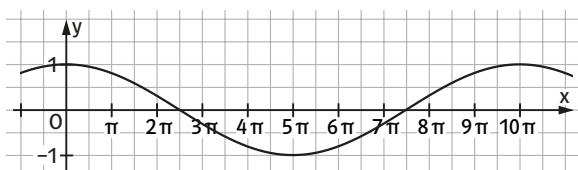
- 2 a)** $b = 4$; Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ in x-Richtung;
Periode: $p = \frac{\pi}{2}$



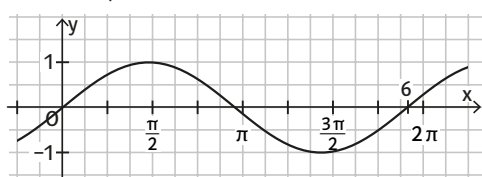
- b)** $b = 3$; Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ in x-Richtung;
Periode: $p = \frac{2\pi}{3}$



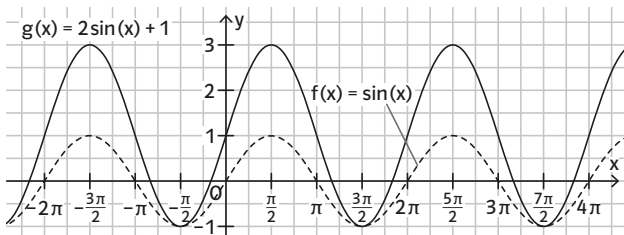
- c)** $b = \frac{1}{5}$; Streckung mit dem Faktor 5 in x-Richtung;
Periode: $p = 10\pi$



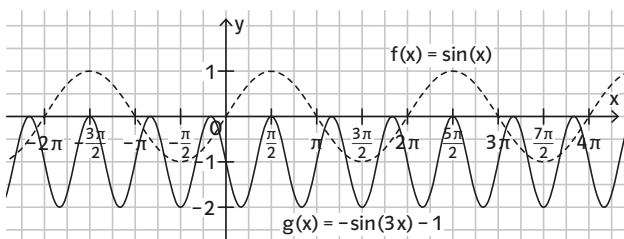
- d)** $b = \frac{\pi}{3}$; Streckung mit dem Faktor $\frac{3}{\pi}$ in x-Richtung;
Periode: $p = 6$



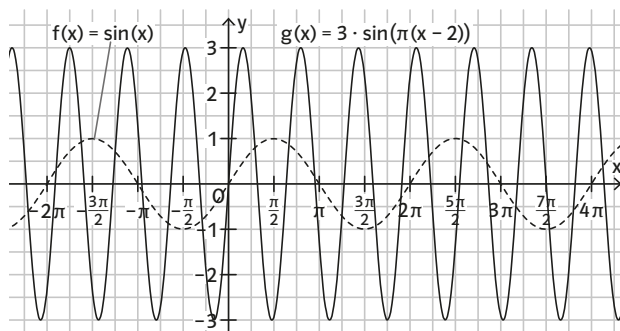
- 3 a)** Am Funktionsterm $g(x) = 2 \cdot \sin(x) + 1$ sind ablesbar: $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$ und $d = -1$. K_g geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 und eine Verschiebung nach oben um 1 hervor.



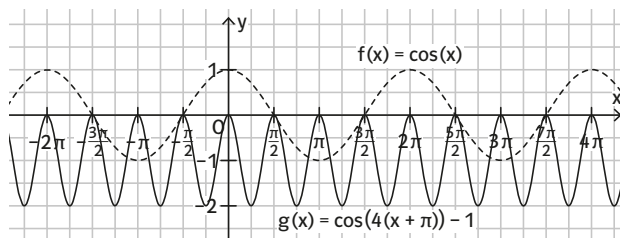
- b)** An $g(x) = -\sin(3x) - 1$ sind ablesbar: $a = -1$, $b = 3$, $c = 0$ und $d = -1$. K_g geht aus der Sinuskurve durch eine Spiegelung an der x-Achse, eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ und eine Verschiebung nach unten um 1 hervor.



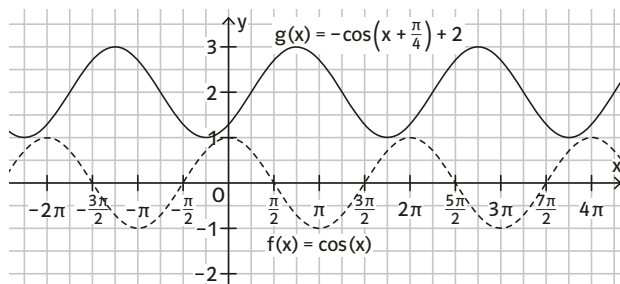
- c)** An $g(x) = 3 \cdot \sin(\pi(x - 2))$ sind ablesbar: $a = 3$, $b = \pi$, $c = 2$ und $d = 0$. K_g geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 3, eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}$ und eine Verschiebung nach rechts um 2 hervor.



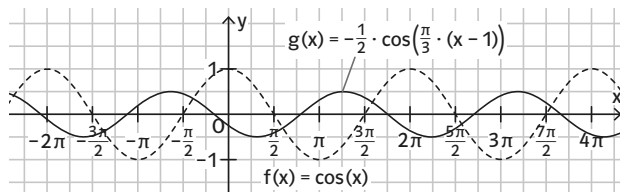
- d)** An $g(x) = \cos(4(x + \pi)) - 1$ sind ablesbar: $a = 1$, $b = 4$, $c = -\pi$ und $d = -1$. K_g geht aus der Kosinuskurve durch eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{4}$, eine Verschiebung nach links um π und eine Verschiebung nach unten um 1 hervor.



- e)** An $g(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{4}) + 2$ sind ablesbar: $a = -1$, $b = 1$, $c = -\frac{\pi}{4}$ und $d = 2$. K_g geht aus der Kosinuskurve durch eine Spiegelung an der x-Achse, eine Verschiebung nach links um $\frac{\pi}{4}$ und Verschiebung nach oben um 2 hervor.



- f)** An $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{3}(x - 1))$ sind ablesbar: $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{\pi}{3}$, $c = 1$ und $d = 0$. K_g geht aus der Kosinuskurve durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ und eine Spiegelung an der x-Achse, eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{3}{\pi}$ und eine Verschiebung nach rechts um 1 hervor.



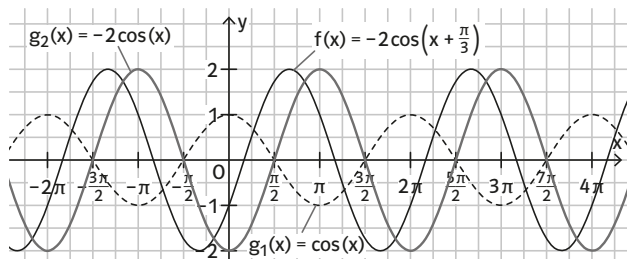
- 4 a) $g(x) = 4 \cdot \sin(x) - 1$; $A = 4$; $p = 2\pi$
 b) $g(x) = -\sin(x) + 2$; $A = 1$; $p = 2\pi$
 c) $g(x) = -2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$; $A = 2$; $p = 4\pi$
 d) $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(x + 3)$; $A = \frac{1}{2}$; $p = \pi$

Seite 23

- 5 a) K_f geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ hervor: $f(x) = \sin(2 \cdot x)$.
 b) K_f geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor 2 hervor: $f(x) = \sin(0,5 \cdot x)$.
 c) K_f geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{2}{\pi}$ hervor: $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$.
 d) K_f geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 1,5, eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}$ und eine Verschiebung nach links um 0,5 hervor: $f(x) = 1,5 \cdot \sin(\pi \cdot (x + 0,5))$.
 e) K_f geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor -0,5, eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{4}{\pi}$ hervor: $f(x) = -0,5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$.
 f) K_f geht aus der Sinuskurve durch eine Spiegelung an der x-Achse und eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ hervor: $f(x) = -\sin(3 \cdot x)$.

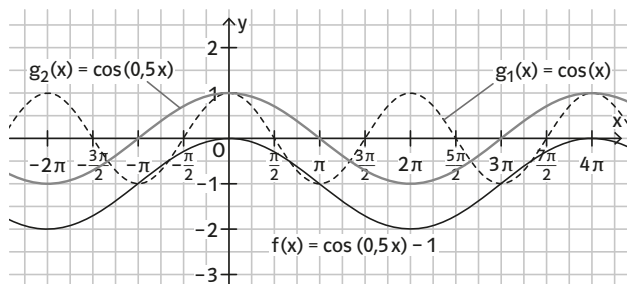
- 6 a) $f(x) = -2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

K_f geht aus der Kosinuskurve durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor -2 und eine Verschiebung nach links um $\frac{\pi}{3}$ hervor.



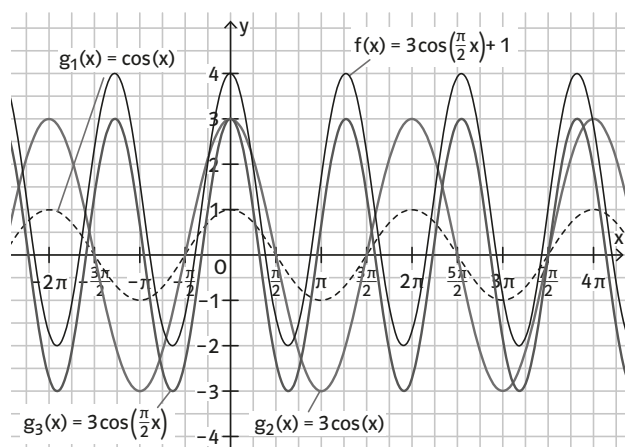
- b) $f(x) = \cos(0,5x) - 1$

K_f geht aus der Kosinuskurve durch eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor 2 und eine Verschiebung nach unten um 1 hervor.



- c) $f(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$

K_f geht aus der Kosinuskurve durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 3, eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{2}{\pi}$ und eine Verschiebung nach oben um 1 hervor.



- 7 a) K_3 b) K_2 c) K_4 d) K_1

8 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

9 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

Seite 24

- 10 a) Amplitude $A = 1$; $p = 3 \cdot 2\pi = 6\pi$

$$g(x) = -\cos\left(\frac{1}{3} \cdot x\right) - 2$$

- b) $A = 4$; $p = 2\pi$

$$g(x) = -4 \cdot \cos(x - 1) + 1$$

- c) $A = 0,5$; $p = \frac{1}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi$

$$g(x) = -0,5 \cdot \cos(3 \cdot x)$$

- d) $A = \frac{3}{2}$; $p = 2\pi$

$$g(x) = -\frac{3}{2} \cdot \cos(x + 1)$$

- 11 a) Periode 2; Amplitude 1; $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$

- b) Periode 4; Amplitude 1; $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + 1$

- c) Periode 2π ; Amplitude 2; $f(x) = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

12 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

13 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

14 a) Mithilfe des Hochpunktes $H(2|3)$ und des Tiefpunktes $T(6|-3)$ bestimmt man die Parameter a , b , c und d :

$$a = 3$$

$$p = 2 \cdot (6 - 2) = 8; \quad b = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$c = 2 - \frac{8}{4} = 0; \quad d = \frac{3 + (-3)}{2} = 0$$

Einsetzen der Parameter ergibt:

$$f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

b) $H(0|9)$; $T(3|1)$:

$$a = \frac{9-1}{2} = 4$$

$$p = 2 \cdot (3 - 0) = 6; \quad b = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$c = 0; \quad d = \frac{9+1}{2} = 5$$

Einsetzen der Parameter ergibt:

$$f(x) = 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 5.$$

c) $T(0|-1)$; $H(2\pi|2)$:

$$a = \frac{-1-2}{2} = -1,5$$

$$p = 2 \cdot (2\pi - 0) = 4\pi; \quad b = \frac{2\pi}{4\pi} = 0,5$$

$$c = 0 = -\frac{2\pi}{3}; \quad d = \frac{2 + (-1)}{2} = 0,5$$

Einsetzen der Parameter ergibt:

$$f(x) = -1,5 \cdot \cos(0,5 \cdot x) + 0,5.$$

15 a) Wahr, denn $p = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

b) Wahr, denn die Funktionswerte liegen zwischen 1 und 3.

c) Falsch; der Graph ist punktsymmetrisch zu $P(0|1)$ aufgrund der Verschiebung um 1 in y-Richtung.

d) Wahr, denn $f(2,5) = 2 \cdot \sin(2,5\pi) + 1 = 3$.

16 Eine Verschiebung der Kosinuskurve um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts ergibt die Sinuskurve. Weitere Möglichkeiten ergeben sich aufgrund der Periodizität $p = 2\pi$. Z.B. sind auch Verschiebungen der Kosinuskurve um $\frac{5\pi}{2}$ nach rechts oder um $\frac{3\pi}{2}$ nach links möglich.

17 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

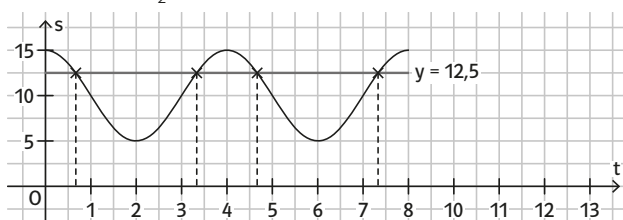
5 Trigonometrische Gleichungen

Seite 25

Einstiegsaufgabe

a) An $f(t) = 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) + 10$ ablesbar: $a = 5$, $b = \frac{\pi}{2}$, $c = 0$ und $d = 10$.

$$\text{Periode: } p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4.$$



Aus der Zeichnung abgelesene Zeitpunkte, an denen der Abstand des Gewichtsstücks vom Tisch 12,5 cm beträgt: 0,7s; 3,3s; 4,7s und 7,3s.

b) Rechnung: $f(t) = 12,5$

$$5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) + 10 = 12,5$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) = 0,5$$

Erste Lösung t_1 :

$$\frac{\pi}{2} \cdot t_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \text{da } \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,5$$

$$t_1 = \frac{2}{3} \approx 0,67$$

Zweite Lösung t_2 aufgrund der Achsensymmetrie der Kosinuskurve zur y-Achse:

$$\frac{\pi}{2} \cdot t_2 = -\frac{\pi}{3}, \quad \text{da } \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0,5.$$

$$t_2 = -\frac{2}{3} < 0.$$

Somit ist dies keiner der gesuchten Zeitpunkte.

Weitere Lösungen aufgrund der Periodizität mit $p = 4$:

$$t_3 = t_1 + 4 = \frac{14}{3} \approx 4,67,$$

$$t_4 = t_2 + 4 = \frac{10}{3} \approx 3,33.$$

$$t_5 = t_2 + 2 \cdot 4 = \frac{22}{3} \approx 7,33.$$

Die aus der Zeichnung bestimmten Werte stimmen gut mit den rechnerisch bestimmten Werten überein.

Seite 27

1 a) Ein Lineal wird auf der Höhe 0,8 angelegt und die Schnittstellen der Geraden $y = 0,8$ mit der Kosinuskurve abgelesen:

$$x_1 \approx -6,9; \quad x_2 \approx -5,6; \quad x_3 \approx -0,6; \quad x_4 \approx 0,6; \quad x_5 \approx 5,6; \quad x_6 \approx 6,9; \quad x_7 \approx 11,9; \quad x_8 \approx 13,2.$$

b) Die Schnittstellen der Geraden $y = 0,4$ mit der Kosinuskurve sind: $x_1 \approx -7,4$; $x_2 \approx -5,1$; $x_3 \approx -1,2$; $x_4 \approx 1,2$; $x_5 \approx 5,1$; $x_6 \approx 7,4$; $x_7 \approx 11,4$; $x_8 \approx 13,7$; $x_9 \approx 17,7$.

c) Die Schnittstellen der Geraden $y = -0,2$ mit der Kosinuskurve sind: $x_1 \approx -4,5$; $x_2 \approx -1,8$; $x_3 \approx 1,8$; $x_4 \approx 4,5$; $x_5 \approx 8,1$; $x_6 \approx 10,8$; $x_7 \approx 14,3$; $x_8 \approx 17,1$.

d) Die Schnittstellen der Geraden $y = -0,6$ mit der Kosinuskurve sind: $x_1 \approx -4,1$; $x_2 \approx -2,2$; $x_3 \approx 2,2$; $x_4 \approx 4,1$; $x_5 \approx 8,5$; $x_6 \approx 10,4$; $x_7 \approx 14,8$; $x_8 \approx 16,6$.

$$\mathbf{2 \ a)} \quad \sin(x) = 1; \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{b)} \quad \cos(x) = 1; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2\pi$$

$$\mathbf{c)} \quad \sin(x) = -1; \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\mathbf{d)} \quad \cos(x) = 0; \quad x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

3

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$$\mathbf{a)} \quad \sin(x) = 0,5; \quad x_1 = \frac{\pi}{6};$$

$$x_2 = \pi - x_1 = \frac{5}{6}\pi \quad L = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi \right\}$$

$$\mathbf{b)} \quad \sin(x) = -0,5; \quad x_1 = -\frac{\pi}{6}; \quad x_2 = \pi - x_1 = \frac{7}{6}\pi;$$

$$x_3 = x_1 + 2\pi = \frac{11}{6}\pi \quad L = \left\{ -\frac{\pi}{6}; \frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi \right\}$$

$$\text{c) } \sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \quad x_1 = \frac{\pi}{4};$$

$$x_2 = \pi - x_1 = \frac{3}{4}\pi \quad L = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi \right\}$$

$$\text{d) } \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad x_1 = -\frac{\pi}{3}; \quad x_2 = \pi - x_1 = \frac{4}{3}\pi;$$

$$x_3 = x_1 + 2\pi = \frac{5}{3}\pi \quad L = \left\{ \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi \right\}$$

$$\text{e) } \cos(x) = 0; \quad x_1 = \frac{\pi}{2}; \quad x_2 = -x_1 = -\frac{\pi}{2};$$

$$x_3 = x_2 + 2\pi = \frac{3}{2}\pi \quad L = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \right\}$$

$$\text{f) } \cos(x) = \frac{1}{2}; \quad x_1 = \frac{\pi}{3}; \quad x_2 = -x_1 = -\frac{\pi}{3};$$

$$x_3 = x_1 + 2\pi = \frac{5}{3}\pi \quad L = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{5}{3}\pi \right\}$$

$$\text{g) } \cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad x_1 = -\frac{\pi}{6}; \quad x_2 = -x_1 = \frac{\pi}{6};$$

$$x_3 = x_2 + 2\pi = \frac{11}{6}\pi \quad L = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{11}{6}\pi \right\}$$

$$\text{h) } \cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \quad x_1 = \frac{\pi}{4}; \quad x_2 = -x_1 = -\frac{\pi}{4};$$

$$x_3 = x_2 + 2\pi = \frac{7}{4}\pi \quad L = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{7}{4}\pi \right\}$$

$$\text{4 } \sin(x) = -0,5$$

$$\text{a) } I = [0; 2\pi]$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} \notin I$$

$$x_2 = \pi - x_1 = \frac{7}{6}\pi \in I$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11}{6}\pi \in I$$

$$\text{b) } I = [0; 4\pi]$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} \notin I$$

$$x_2 = \pi - x_1 = \frac{7}{6}\pi \in I$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11}{6}\pi \in I$$

$$x_4 = \frac{7}{6}\pi + 2\pi = \frac{19}{6}\pi \in I$$

$$x_5 = -\frac{\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi = \frac{23}{6}\pi \in I$$

$$\text{c) } I = [-\pi; 3\pi]$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} \in I$$

$$x_2 = \pi - x_1 = \frac{7}{6}\pi \in I$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11}{6}\pi \in I$$

$$x_4 = \frac{7}{6}\pi + 2\pi = \frac{19}{6}\pi \notin I$$

$$\text{d) } I = [-3\pi; \pi]$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} \in I$$

$$x_2 = \pi - x_1 = \frac{7}{6}\pi \notin I$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{13}{6}\pi \in I$$

$$x_4 = \frac{7}{6}\pi - 2\pi = -\frac{5}{6}\pi \in I$$

$$x_5 = \frac{7}{6}\pi - 2 \cdot 2\pi = -\frac{17}{6}\pi \in I$$

5 a) Individuelle Lösungen, z. B.

$$x_1 \approx 0,68; \quad x_2 = \pi - x_1 \approx 2,46$$

$$x_3 = x_1 + 2\pi \approx 6,96$$

$$x_4 = x_2 + 2\pi \approx 8,74$$

$$\text{b) } x_1 \approx 2,15; \quad x_2 = -x_1 \approx -2,15$$

$$x_3 = x_1 + 2\pi \approx 8,44$$

$$x_4 = x_2 + 2\pi \approx 4,13$$

$$\text{c) } x_1 \approx -0,25; \quad x_2 = \pi - x_1 \approx 3,39$$

$$x_3 = x_1 + 2\pi \approx 6,03$$

$$x_4 = x_2 + 2\pi \approx 9,68$$

$$\text{d) } x_1 \approx 1,23; \quad x_2 = -x_1 \approx -1,23$$

$$x_3 = x_1 + 2\pi \approx 7,51$$

$$x_4 = x_2 + 2\pi \approx 5,05$$

Seite 28

$$\text{6 } \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$\text{a) } x_1 = \frac{\pi}{3} \in I; \quad x_2 = -x_1 = -\frac{\pi}{3} \in I$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5}{3}\pi \in I$$

$$\text{z.B. } I = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{5}{3}\pi \right]$$

$$\text{b) } \text{z.B. } I = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5}{3}\pi + 2\pi \right] = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{11}{3}\pi \right]$$

$$\text{c) } \text{z.B. } I = \left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{1}{3}\pi - 2\pi \right] = \left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{7}{3}\pi \right]$$

$$\text{7 a) } x_1 \approx 0,78; \quad x_2 = \pi - x_1 \approx 2,37 \quad L = \{0,78; 2,37\}$$

$$\text{b) } x_1 = \pi; \quad x_2 = -\pi; \quad x_3 = x_1 + 2\pi = 3\pi \quad L = \{-\pi; \pi; 3\pi\}$$

$$\text{c) } x_1 = -\frac{\pi}{6}; \quad x_2 = \pi - x_1 = \frac{7}{6}\pi; \quad x_3 = x_1 + 2\pi = \frac{11}{6}\pi;$$

$$x_4 = x_2 - 2\pi = -\frac{5}{6}\pi; \quad L = \left\{ -\frac{5}{6}\pi; -\frac{1}{6}\pi; \frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi \right\}$$

$$\text{d) } x_1 = \frac{3}{4}\pi; \quad x_2 = -\frac{3}{4}\pi; \quad x_3 = x_2 + 2\pi = \frac{5}{4}\pi$$

$$L = \left\{ -\frac{3}{4}\pi; \frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi \right\}$$

$$\text{e) } x_1 \approx 0,30; \quad x_2 = \pi - x_1 \approx 2,84; \quad x_3 = x_1 - 2\pi \approx -5,98;$$

$$x_4 = x_2 - 2\pi \approx -3,45 \quad L = \{-5,98; -3,45\}$$

$$\text{f) } x_1 \approx 0,72; \quad x_2 \approx -0,72; \quad x_3 = x_2 + 2\pi \approx 5,56 \notin [-0,5; 4]$$

$$L = \{0,72\}$$

8 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

$$\text{9 a) } f(x) = 0 \text{ für } x_1 \approx -3,5; \quad x_2 \approx -2,5; \quad x_3 \approx 0,5; \quad x_4 \approx 1,5; \quad x_5 \approx 4,5; \quad x_6 \approx 5,5.$$

$$f(x) = 0,5 \text{ für } x_1 = -3; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 5$$

$$f(x) = -1 \text{ für } x_1 \approx -3,8; \quad x_2 \approx -2,2; \quad x_3 \approx 0,2; \quad x_4 \approx 1,8;$$

$$x_5 \approx 4,2; \quad x_6 \approx 5,8.$$

$$\text{b) } g(x) = 4 \text{ für } x_1 = -\pi; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = \pi; \quad x_4 = 2\pi;$$

$$g(x) = 2 \text{ für } x_1 \approx -2,2; \quad x_2 \approx -1; \quad x_3 \approx 1; \quad x_4 \approx 2,2; \quad x_5 \approx 4,1;$$

$$x_6 \approx 5,3; \quad x_7 \approx 7,2.$$

$$g(x) = 0 \text{ hat keine Lösungen.}$$

c) Der Taschenrechner kann die Werte genauer bestimmen.

$$\text{10 a) } \sin(x) = \frac{1}{2} \text{ für } x_1 = \frac{\pi}{6}; \quad x_2 = \pi - x_1 = \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{Nullstellen in } [0; 2\pi]: \frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{b) } \cos(x) = -\frac{1}{2} \text{ für } x_1 = \frac{2}{3}\pi; \quad x_2 = -x_1 = -\frac{2}{3}\pi$$

$$x_3 = x_2 + 2\pi = \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{Nullstellen in } [0; 2\pi]: \frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{c) } \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ für } x_1 = \frac{\pi}{6}; \quad x_2 = -x_1 = -\frac{\pi}{6}$$

$$\text{Nullstellen in } [-\pi; \pi]: -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}$$

$$\text{d) } \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ für } x_1 = -\frac{\pi}{4}; \quad x_2 = \pi - x_1 = \frac{5}{4}\pi$$

$$x_3 = x_1 + 2\pi = \frac{7}{4}\pi \approx 7,06$$

$$x_4 = x_2 + 2\pi = \frac{13}{4}\pi \approx 10,2$$

$$\text{Nullstellen in } [0; 9]: \frac{5}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi$$

$$\text{e) } \sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ für } x_1 = \frac{\pi}{3}; \quad x_2 = \pi - x_1 = \frac{2}{3}\pi$$

$$x_3 = x_1 - 2\pi = -\frac{5}{3}\pi \approx -5,24$$

$$x_4 = x_2 - 2\pi = -\frac{4}{3}\pi \approx -4,19$$

$$\text{Nullstellen in } [-6; 0]: -\frac{5}{3}\pi; -\frac{4}{3}\pi$$

$$\text{f) } \cos(x) = 3; \text{ keine Nullstellen}$$

11 a) $z = \frac{4}{3}x$; $\cos(z) = 0,5$;

$$z_1 = \frac{\pi}{3}; z_2 = -z_1 = -\frac{\pi}{3}$$

$$x_1 = \frac{3}{4}z_1 = \frac{\pi}{4}; x_2 = \frac{3}{4}z_2 = -\frac{\pi}{4};$$

$$\text{Periode } p = \frac{2\pi}{\frac{4}{3}} = 2\pi \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\pi$$

$$x_3 = x_1 + \frac{3}{2}\pi = \frac{7}{4}\pi \approx 5,50$$

$$x_4 = x_2 + \frac{3}{2}\pi = \frac{5}{4}\pi \approx 3,93$$

$$L = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{5}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi \right\}$$

b) $z = 0,5x$; $p = 4\pi$; $\sin(z) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $z_1 = -\frac{\pi}{3}$;

$$z_2 = -\frac{2\pi}{3}; x_1 = -\frac{2\pi}{3}; x_2 = -\frac{4\pi}{3}; \text{Periode } p = 4\pi; L = \left\{ \right\}$$

Es gibt keine Lösung, die zwischen 0 und 7 liegt.

c) $z = x + \frac{\pi}{6}$; $\cos(z) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $z_1 = \frac{\pi}{4}$; $z_2 = -\frac{\pi}{4}$;

$$x_1 = \frac{\pi}{12}; x_2 = -\frac{5\pi}{12}; \text{Periode } p = 2\pi$$

$$L = \left\{ \frac{\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}; \frac{25\pi}{12} \right\}$$

d) $z = x - \frac{\pi}{4}$; $\sin(z) = -\frac{1}{2}$; $z_1 = -\frac{\pi}{6}$; $z_2 = \frac{7}{6}\pi$;

$$x_1 = \frac{\pi}{12}; x_2 = \frac{17}{12}\pi; \text{Periode } p = 2\pi$$

$$L = \left\{ \frac{\pi}{12}; \frac{17}{12}\pi; \frac{25}{12}\pi \right\}$$

e) $z = \pi x$; $\cos(z) = \frac{1}{2}$; $z_1 = \frac{\pi}{3}$; $z_2 = -\frac{\pi}{3}$; $x_1 = \frac{1}{3}$;

$$x_2 = -\frac{1}{3}; \text{Periode } p = 2; = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{7}{3}; \frac{11}{3}; \frac{13}{3}; \frac{17}{3}; \frac{19}{3} \right\}$$

f) $\sin(x - 2) = 1,4 > 1$.

Somit hat diese Gleichung keine Lösung.

12 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

13 a) $2 \cos(x) = t$; $\cos(x) = \frac{t}{2}$

Keine Lösung für z.B. $t = 3$.

Allgemein: Keine Lösung für $t < -2$ oder $t > 2$.

Genau eine Lösung für $t = -2$.

Zwei Lösungen für $-2 < t \leq 2$.

b) $3 \sin(x) + 2t = 0$; $\sin(x) = -\frac{2t}{3}$

Keine Lösung für z.B. $t = -2$.

Allgemein: Keine Lösung für $t < -\frac{3}{2}$ oder $t > \frac{3}{2}$.

Eine Lösung für $t = -\frac{3}{2}$ und $t = \frac{3}{2}$.

Zwei Lösungen für z.B. $t = -1$.

Allgemein: Zwei Lösungen für $-\frac{3}{2} < t < 0$ oder $0 < t < \frac{3}{2}$;

drei Lösungen für $t = 0$.

c) $t \cdot \sin(x) + 5 = 0$ hat z.B. für $t = 0$ keine Lösung.

Allgemein: Keine Lösung für $-5 < t < 5$.

Eine Lösung für $t = 5$ oder $t = -5$.

Zwei Lösungen für z.B. $t = 6$.

Allgemein: Zwei Lösungen für $t < -5$ oder $t > 5$.

14 a) Substitution $z = \sin(x)$ führt zu $2z^2 - z - 1 = 0$.

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

$$z_1 = \frac{1+3}{4} \text{ d.h. } z_1 = 1; z_2 = \frac{1-3}{4} \text{ d.h. } z_2 = -\frac{1}{2}$$

Resubstitution:

$$\sin(x) = 1: x_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}: x_2 = -\frac{\pi}{6}; \text{ weitere Lösungen im Intervall}$$

$$[0; 2\pi]: x_3 = \frac{7}{6}\pi; x_4 = \frac{11\pi}{6}$$

$$L = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi \right\}$$

b) Substitution $z = \sin(x)$ führt zu $z^3 - 0,75 \cdot z = 0$.

$$z \cdot (z^2 - 0,75) = 0$$

$$\text{Es gilt } 0,75 = \frac{3}{4}.$$

$$z_1 = 0; z_2 = +\frac{\sqrt{3}}{2}; z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resubstitution:

$$\sin(x) = 0: x_1 = 0; x_2 = \pi; x_3 = 2\pi$$

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}: x_4 = \frac{\pi}{3}; x_5 = \frac{2}{3}\pi$$

$$\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}: x_6 = -\frac{\pi}{3}; x_7 = \frac{4}{3}\pi; x_8 = \frac{5}{3}\pi$$

$$L = \left\{ 0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; 2\pi \right\}$$

c) Substitution $z = \cos(x)$ führt zu $2 \cdot z^2 - z = 0$

$$z \cdot (2z - 1) = 0$$

$$z_1 = 0; z_2 = 0,5$$

Resubstitution:

$$\cos(x) = 0: x_1 = \frac{\pi}{2}; x_2 = \frac{3}{2}\pi$$

$$\cos(x) = 0,5: x_3 = \frac{\pi}{3}; x_4 = \frac{5}{3}\pi$$

$$L = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{3}\pi \right\}$$

15 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

6 Anwendungen trigonometrischer Funktionen

Seite 29

Einstiegsaufgabe

Die Periodenlänge beträgt $1,55s - 0,3s = 1,25s$.

In 1min, also 60s, macht der Schwimmer 48 Armzüge.

Seine Geschwindigkeit schwankt zwischen etwa $1,2 \frac{m}{s}$

und etwa $2,3 \frac{m}{s}$.

Seite 31

1 a) 8:00 Uhr: $t = 8$; $f(8) \approx 0,66$

14:30 Uhr: $t = 14,5$; $f(14,5) \approx 3,49$

17:20 Uhr: $t = 17 + \frac{20}{60} \approx 17,33$; $f(17,33) \approx 3,02$

b) Periode $p = \frac{2\pi}{6,2} = 12,4$

Größer Wert: $2 + 1,7 = 3,7$

Dieser Wert wird nach einer viertel Periode, also zum Zeitpunkt $t = 3,1$, und eine Periode später, also bei $t = 15,5$ erreicht.

Um 3:06 Uhr und um 15:30 Uhr wird mit 3,7m der höchste Wasserstand erreicht.

Kleinsten Wert: $2 - 1,7 = 0,3$

Dieser Wert wird nach einer dreiviertel Periode, also zum Zeitpunkt $t = 9,3$, und eine Periode später, also bei

$t = 21,7$ erreicht.

Um 9:18 Uhr und um 21:42 Uhr wird mit 0,3 m der niedrigste Wasserstand erreicht.

c) $f(t) \leq 0,4$;

$$2 + 1,7 \sin\left(\frac{\pi}{6,2}t\right) = 0,4$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6,2}t\right) = \frac{-1,6}{1,7}$$

Substitution: $z = \frac{\pi}{6,2}t$

$$\sin(z) = \frac{-1,6}{1,7}$$

$$z_1 \approx -1,23; z_2 = \pi - z_1 \approx 4,37$$

Resubstitution: $t = \frac{6,2}{\pi}z$

$$t_1 \approx -2,42; t_2 \approx 8,62; t_3 = t_1 + 12,4 \approx 9,98;$$

$$t_4 = t_1 + 2 \cdot 12,4 \approx 22,38; t_5 = t_2 + 12,4 \approx 21,02$$

Zwischen t_2 und t_3 sowie zwischen t_5 und t_4 ist $f(t) \leq 0,4$, d.h. von 8:38 Uhr bis 9:58 Uhr und von 21:02 bis 22:22 Uhr

Hinweis: Die ersten Werte wurden abgerundet und die letzten Werte aufgerundet.

2 a) $f(t) = -8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 18$

b) $f(7,5) \approx 10,6$; $f(20,75) \approx 24,0$;

Um 7:30 Uhr beträgt die Temperatur ca. $10,6^\circ\text{C}$, um 20:45 Uhr beträgt die Temperatur ca. $24,0^\circ\text{C}$

c) $f(t) = 21$ ergibt $\sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) = -\frac{3}{8}$;

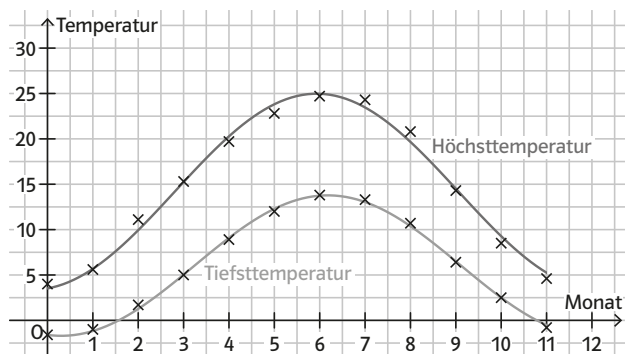
$$z = \frac{\pi}{12} \cdot t: \sin(z) = -\frac{3}{8}; z_1 \approx -0,384; z_2 \approx 3,526$$

$$t = \frac{12}{\pi} \cdot z: t_1 \approx -1,467; t_2 \approx 13,468; t_3 = t_1 + 24 \approx 22,533$$

Zwischen 13:29 Uhr und 23:36 Uhr war es wärmer als 21°C .

Seite 32

3



$$t_{\min}(x) = 7,7 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot (x - 3)\right) + 6,1, x \in [0; 11]$$

$$t_{\max}(x) = 10,35 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot (x - 3)\right) + 14,35, x \in [0; 11]$$

4 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

5 a) minimale Geschwindigkeit:

$$\sin(b \cdot t) = -1, \text{ also } 5,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 19,44 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

maximale Geschwindigkeit: $\sin(b \cdot t) = 1$, also

$$5,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 20,88 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

b) Periode $p = 2$; $b = \frac{2\pi}{2} = \pi$

6 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

7 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

Training

Seite 35

1 a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

b) $\cos(\pi) = -1$

c) $\sin(5,5\pi) = -1$

d) $\sin\left(\frac{21}{2}\pi\right) = 1$

e) $\cos(-6\pi) = 1$

f) $\cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = 0$

2 a) +

b) +

c) +

d) -

e) -

f) +

g) +

h) -

3 a) $x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{3\pi}{2}$

b) $x_1 = \pi$

c) $x_1 = 0$; $x_2 = 2\pi$

d) keine Lösung

e) $x_1 = 0$; $x_2 = \pi$

f) keine Lösung

g) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$

g) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

4 a) Beide haben recht. Leah hat die Gleichung im Bogenmaß und Pia im Gradmaß gelöst.

b) Paul hat recht. Lukas hat $\cos(0,32) = 0,95$ gerechnet.

5 Zusammen gehören die Kärtchen A, D und I; F, G und C sowie H, B und E.

6 Der Graph B gehört zur Funktion f. Er entsteht aus dem Graphen der Sinusfunktion durch eine Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung. Der Graph C gehört zur Funktion g. Er entsteht aus dem Graphen der Sinusfunktion durch Streckung mit dem Faktor 0,5 in y-Richtung.

Der Graph A gehört zur Funktion h. Er entsteht aus dem Graphen der Sinusfunktion durch Verschiebung um $-0,5$ in y-Richtung. Der Graph D gehört zur Funktion i. Er entsteht aus dem Graphen der Sinusfunktion durch Streckung mit dem Faktor $-0,5$ in y-Richtung.

7

	$f(x) = \sin(x)$	$g(x) = \cos(x)$
(1)	nein	ja
(2)	ja	ja
(3)	nein	ja
(4)	ja	nein
(5)	ja	ja

8 a) Amplitude 3; Periode 20π

b) Amplitude $\frac{1}{2}$; Periode 4π

c) Amplitude 2; Periode 4

d) Amplitude $\frac{1}{3}$; Periode 3

$$9 \quad \cos(x) = 0,5$$

$$a) \quad I = [0; 2\pi]$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \in I; \quad x_2 = -x_1 = -\frac{\pi}{3} \notin I$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5}{3}\pi \in I$$

$$b) \quad I = [0; 4\pi]$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \in I; \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} \notin I$$

$$x_3 = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7}{3}\pi \in I$$

$$x_4 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5}{3}\pi \in I$$

$$x_5 = -\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{11}{3}\pi \in I$$

$$c) \quad I = [-2\pi; 2\pi]$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \in I; \quad x_2 = -x_1 = -\frac{\pi}{3} \in I$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5}{3}\pi \in I$$

$$x_4 = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5}{3}\pi \in I$$

$$d) \quad I = [\pi; 5\pi]$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \notin I; \quad x_2 = -x_1 = -\frac{\pi}{3} \notin I$$

$$x_3 = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7}{3}\pi \in I$$

$$x_4 = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{13}{3}\pi \in I$$

$$x_5 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5}{3}\pi \in I$$

$$x_6 = -\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{11}{3}\pi \in I$$

Seite 36

10 a) Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung;

Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = \pi$

b) Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung; Nullstelle: $x_1 = \frac{\pi}{2}$

c) Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung; Spiegelung an der x-Achse; Verschiebung um 1 in y-Richtung;

Nullstellen: $x_1 = \frac{\pi}{6}$; $x_2 = \frac{5\pi}{6}$

d) Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{2}{3}$;

Verschiebung in y-Richtung um -3 ; keine Nullstellen

e) Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$;

Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{\pi}{2}$; $x_3 = \pi$

f) Streckung mit dem Faktor 3 in y-Richtung; Verschiebung in x-Richtung um -3 ; Nullstelle: $x_1 = \pi - 3$

g) Streckung in t-Richtung mit dem Faktor $\frac{2}{\pi}$ und Verschiebung in y-Richtung um -2 ; keine Nullstellen

h) Streckung mit dem Faktor 0,5 in y-Richtung; Spiegelung an der x-Achse; Verschiebung in t-Richtung um π ; Nullstellen: $t = 0$; $t_2 = \pi$

$$11 \quad a) \quad f(x) = 2 \cdot \sin(2 \cdot x)$$

$$b) \quad f(x) = 5 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2,5$$

$$c) \quad f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 1$$

$$d) \quad f(x) = 1,5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2,5$$

12 a) Der Graph entsteht durch Spiegelung an der x-Achse, Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 und Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}$ und Verschiebung um 1 in y-Richtung.

b) Der Graph entsteht durch Spiegelung an der x-Achse, Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ und Verschiebung um π in y-Richtung.

c) Der Graph entsteht durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor π und Verschiebung um -2 in y-Richtung.

$$13 \quad a) \quad H(\pi | 1); \quad T(3\pi | -3):$$

$$a = \frac{1 - (-3)}{2} = 2$$

$$p = 2 \cdot (3\pi - \pi) = 4\pi$$

$$b = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$d = \frac{1 + (-3)}{2} = -1$$

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 1$$

$$b) \quad T_1(-3 | -1); \quad H_1(-1 | 2); \quad T_2(1 | -1); \quad H_2(3 | 2); \quad T_3(5 | -1)$$

Periode 4; Amplitude 1,5; daraus folgt

$$f(x) = 1,5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 0,5$$

14 a) Periode 2π ; Amplitude 2;

$$f(x) = 2 \cdot \sin(x)$$

b) Periode 4π ; Amplitude 1;

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

c) Periode $\frac{2\pi}{3}$; Amplitude $\frac{1}{2}$;

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(3x)$$

d) Periode 2; Amplitude 1,5;

$$f(x) = 1,5 \cdot \cos(\pi x)$$

e) Periode 8; Amplitude 2;

$$f(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

f) Periode 6; Amplitude 1,5;

$$f(x) = 1,5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 1$$

$$15 \quad a) \quad x_1 \approx 0,1506; \quad x_2 \approx 2,9910$$

$$b) \quad x_1 \approx 1,2661; \quad x_2 \approx 5,0171; \quad x_3 \approx 7,5493$$

$$c) \quad x_1 \approx 0,6435; \quad x_2 \approx 2,4981; \quad x_3 \approx 6,9267; \quad x_4 \approx 8,7813$$

$$16 \quad a) \quad \cos(2x) = -\frac{1}{2};$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \quad \text{oder} \quad x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3}; \quad x_2 = \frac{2\pi}{3}; \quad x_3 = \frac{4\pi}{3}; \quad x_4 = \frac{5\pi}{3}$$

b) keine Lösung

$$c) \quad x_1 = \frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{5}{3}; \quad x_3 = \frac{13}{3}; \quad x_4 = \frac{17}{3}$$

$$17 \quad a) \quad f(x) = \sin(x) - 1$$

b) bis f) Fehler in der Aufgabenstellung. Die Aufgaben sind nicht lediglich mit den Parametern a, b und d zu lösen.

$$18 \quad \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a) \quad x_1 = \frac{\pi}{4} \in I; \quad x_2 = \pi - x_1 = \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{z.B. } I = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi \right]$$

$$b) \quad \text{z.B. } I = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} + 2\pi \right] = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{9}{4}\pi \right]$$

$$c) \quad \text{z.B. } I = \left[\frac{\pi}{4} - 2\pi; \frac{3}{4}\pi - 2\pi \right] = \left[-\frac{7}{4}\pi; -\frac{5}{4}\pi \right]$$

Seite 37

19 Zu A) gehört c) und 5)

zu B) gehört e) und 6)

zu C) gehört d) und 3)

zu D) gehört f) und 1)

zu E) gehört b) und 6)

zu F) gehört a) und 3)

Hinweis: Die Kärtchen 2 und 4 werden nicht verwendet.

$$20 \quad a) \quad 0; \frac{\pi}{2}; \pi$$

$$c) \quad \text{keine Lösung}$$

$$e) \quad \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{9}{4}$$

$$g) \quad 0; 0,4\pi; 0,8\pi$$

$$i) \quad \text{keine Lösung}$$

$$b) \quad 0; 4\pi$$

$$d) \quad \pi$$

$$f) \quad 0; 5\pi; 10\pi; 15\pi$$

$$h) \quad 0; 0,2\pi; 0,4\pi$$

$$j) \quad \frac{1}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi; \frac{7}{3}\pi; \frac{8}{3}\pi$$

$$21 \quad a) \quad x_1 = \frac{3\pi}{8}; \quad x_2 = \frac{7\pi}{8}$$

$$b) \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 6\pi$$

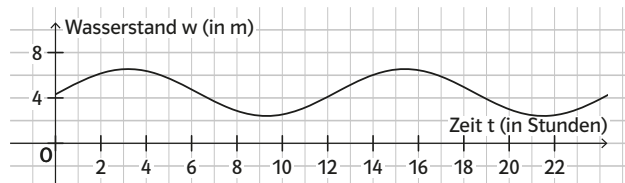
$$c) \quad x_1 = 5; \quad x_2 = 15; \quad x_3 = 25$$

$$d) \quad x_1 \approx 0,64; \quad x_2 \approx 2,50$$

$$e) \quad \text{keine Lösung}$$

$$f) \quad x_1 = \frac{10}{3}; \quad x_2 = \frac{14}{3}$$

22 a)



$$w(6) \approx 6,41; \quad w(14) \approx 5,93; \quad w(20,5) \approx 2,67$$

Der Wasserstand beträgt um 6:00 Uhr 6,41 m, um 14:00 Uhr 5,93 m und 20:30 Uhr 2,67 m.

b) Rechnerische Bestimmung (Ablesen aus der Grafik ist auch erlaubt):

$$\text{Periode } p = \frac{2\pi}{0,507} \approx 12,393$$

$$\text{Hochwasser für } t = \frac{p}{4} \approx 3,098$$

$$\text{Niedrigwasser für } t = \frac{3}{4}p \approx 9,295$$

Hochwasser wird zum ersten Mal nach ca. 3,1 Stunden und Niedrigwasser nach ca. 9,3 Stunden erreicht. Nach jeweils 12,4 Stunden wiederholt sich dieser Vorgang.

$$23 \quad a) \quad f(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

$$b) \quad f(t) = 0,5 \text{ für } t_1 = 0,32s; \quad t_2 = 3,68s$$

$$f(t) = -1,4 \text{ für } t_1 = 4,99s; \quad t_2 = 7,01s$$

24 a) Der blaue Graph entsteht aus der Sinuskurve durch eine Streckung mit Faktor 2 in y-Richtung, eine Verschiebung um 1 in y-Richtung und eine Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung. $f(x) = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

Der rote Graph entsteht aus der Sinuskurve durch eine Verschiebung um 2 in y-Richtung und eine Verschiebung um π in x-Richtung. $f(x) = \sin(x - \pi) + 2$

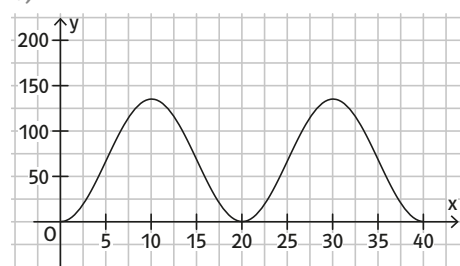
b) Der blaue Graph entsteht aus der Sinuskurve durch eine Streckung mit Faktor 0,5 in y-Richtung und eine Verschiebung um 1 in y-Richtung. $f(x) = 0,5 \cdot \sin(x) + 1$

Der rote Graph entsteht aus der Sinuskurve durch eine Streckung mit Faktor $\frac{1}{3}$ in x-Richtung und eine Verschiebung um 1 in y-Richtung $f(x) = \sin(3x) + 1$

Seite 38

$$25 \quad a) \quad s(t) = -67,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right) + 67,5$$

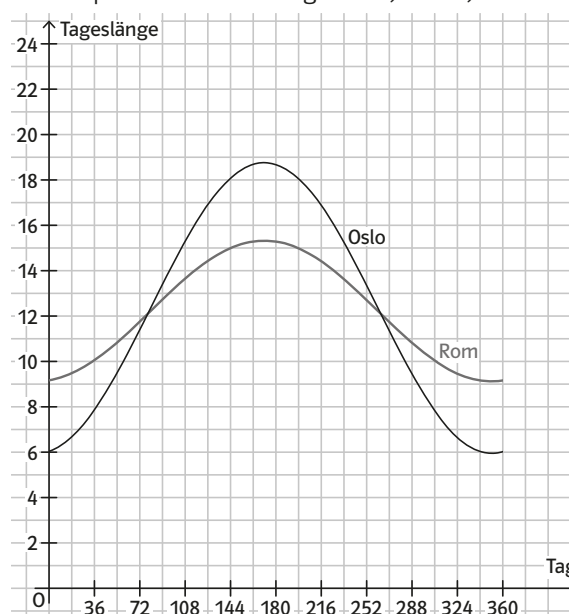
b)



$$c) \quad s(7) = 107,2 \text{ m}$$

$$d) \quad s(t) = 100 \text{ für } t = 6,6 \text{ min oder } t = 13,4 \text{ min}$$

26 Graphen zu den Teilaufgaben a) und b)



$$a) \quad \text{Oslo: } H(171|18,82); \quad T(351|5,92)$$

$$O(x) = 6,45 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{180}(x - 81)\right) + 12,37$$

$$\text{Rom: } H(171|15,23); \quad T(351|9,13)$$

$$R(x) = 3,05 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{180}(x - 81)\right) + 12,18$$

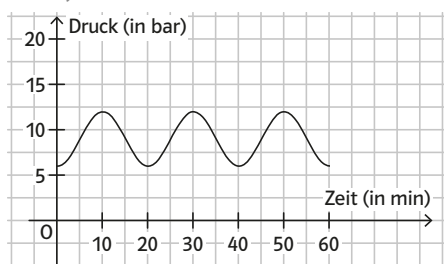
$$b) \quad \text{Oslo: } O(61) = 10,16; \text{ also 10h 10min.}$$

$$\frac{21}{631} \approx 0,03328; \quad \text{Abweichung } 3,3\%$$

$$\text{Rom: } R(61) = 11,14; \text{ also 11h 8min}$$

$$\frac{8}{676} \approx 0,0118; \quad \text{Abweichung } 1,2\%$$

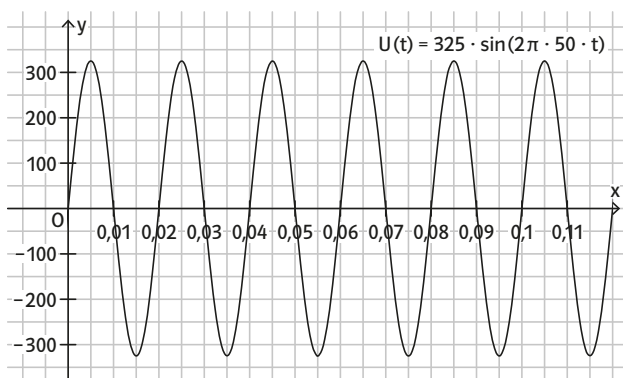
27 a)



b) $f(t) = -3 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right) + 9$

c) $f(t) = 10$ für $t = 6,08$; nach 6,1 Minuten

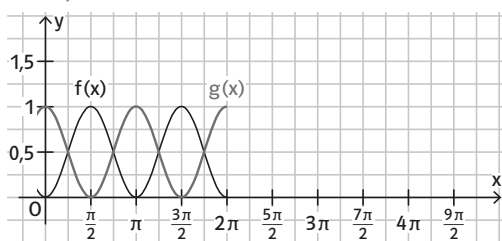
28



Amplitude $A = 325$ Volt, Periodendauer $T = \frac{1}{50 \frac{1}{s}} = 0,02$ s

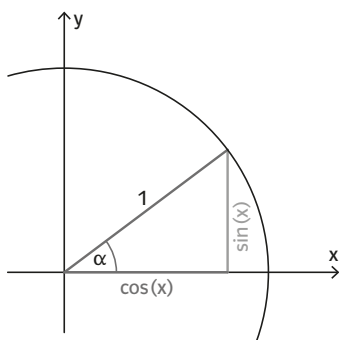
b) $A = 170$; $U(t) = 170 \cdot \sin(2\pi \cdot 60 \cdot t)$

29 a)



b) $h(x) = f(x) + g(x) = 1$

c) Begründung im Einheitsviertelkreis:



30 a) Der Graph der Kosinusfunktion ist ein um $-\frac{\pi}{2}$ auf der x-Achse verschobener Graph der Sinusfunktion.

b) Spiegelt man den Graph von $\cos(x)$ an der x-Achse und verschiebt ihn um $-\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung (bzw. um $\frac{\pi}{2}$ nach links), so entspricht er dem Graphen von $\sin(x)$.

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ist an der x-Achse gespiegelt und um $\frac{\pi}{2}$ auf der x-Achse verschoben. Der gleiche Graph entsteht bei der Verschiebung von $\sin(x)$ um $-\frac{\pi}{2}$ auf der x-Achse.

31 a) Kantenlänge $\overline{P_1P_2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1^2} = \overline{P_2P_3}$

Gesamtflächeninhalt $A = (\overline{P_1P_2})^2 + (\overline{P_2P_3})^2 = \frac{\pi^2}{2} + 2$

b) z.B. $P_1\left(\frac{\pi}{6} \mid \frac{1}{2}\right)$; $P_2\left(\frac{4\pi}{6} \mid \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $P_3\left(\frac{7\pi}{6} \mid -\frac{1}{2}\right)$:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$$

$$\overline{P_2P_3} = \sqrt{\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{4\pi}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\overline{P_2P_3} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}}$$

$$A = (\overline{P_1P_2})^2 + (\overline{P_2P_3})^2 = \frac{\pi^2}{2} + 2$$

c) Vermutung: Der Gesamtflächeninhalt ist unabhängig von der Wahl des ersten Punktes P_1 .

Beweis: $P_1(x \mid \sin(x))$ mit $x \in \mathbb{R}$

$$P_2\left(x + \frac{\pi}{2} \mid \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right); P_3(x + \pi \mid \sin(x + \pi))$$

Mit $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ und $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ folgt:

$$\begin{aligned} \overline{P_1P_2} &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \cos^2(x) - 2\cos(x) \cdot \sin(x) + \sin^2(x)} \end{aligned}$$

$$\overline{P_2P_3} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + (-\sin(x) - \cos(x))^2}$$

$$\overline{P_2P_3} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sin^2(x) + 2\sin(x) \cdot \cos(x) + \cos^2(x)}$$

$$A = (\overline{P_1P_2})^2 + (\overline{P_2P_3})^2 = \frac{\pi^2}{2} + 2(\sin^2(x) + \cos^2(x))$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1: A = \frac{\pi^2}{2} + 2$$

Prüfungsvorbereitung

Seite 40 und 41

Die Lösungen zur Prüfungsvorbereitung finden Sie am Ende vom Schulbuch.

II Differenzialrechnung

Seiten 44 und 45

Die Lösungen zum Check-in finden Sie am Ende vom Schulbuch.

1 Differenzen- und Differentialquotient

Seite 46

Einstiegsaufgabe

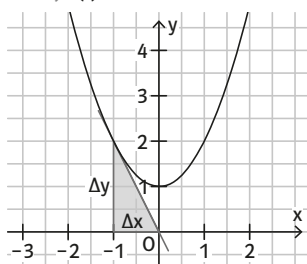
Nach anfänglich geringem Wachstum nimmt das Wachstum immer mehr zu. Die Zunahme steigert sich, bis nach drei Tagen das Wachstum immer mehr abnimmt. Die Masse nähert sich allmählich der Grenze von $4\text{ }\mu\text{g}$.

Seite 48

- 1 a) $f'(2) = 1$; $f'(-1) = -2$; $f'(-2) = -10$
 b) $f'(0)$ positiv; $f'(0,5)$ positiv; $f'(2,25)$ gleich null; $f'(-1,75)$ negativ.
 c) $f'(0,5) \approx 3$

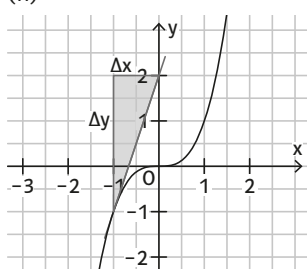
Seite 49

2 a) (I)



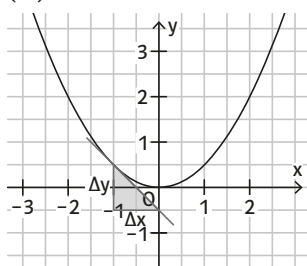
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{1} = -1$$

(II)



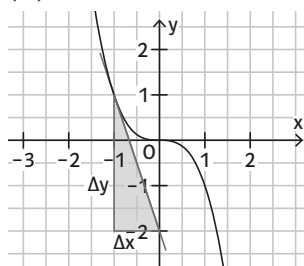
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = 3$$

(III)



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{1} = -1$$

(IV)



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{1} = -3$$

b) Berechnet wird jeweils der Quotient

$$f'(-1) \approx \frac{f(-1 + 0,001) - f(-1)}{0,001}$$

- (I) $-1,999\dots$ (II) $2,997$
 (III) $-0,9995$ (IV) $-2,997$

3 Es wird jeweils der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1,5 + \Delta x) - f(1,5)}{\Delta x} \text{ berechnet.}$$

a) $f(x) = \sqrt{x}$

Δx	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
0,1	0,40166193
0,01	0,40757014
0,001	0,40818027
0,0001	0,40824149

$$f'(1,5) \approx 0,408$$

b) $f(x) = 2^x$

Δx	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
0,1	2,03006008
0,01	1,96732664
0,001	1,96119591
0,0001	1,96058423

$$f'(1,5) \approx 1,96$$

c) $f(x) = \cos(x)$

Δx	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
0,1	-0,99936724
0,01	-0,99783204
0,001	-0,99753019
0,0001	-0,99749852

$$f'(1,5) \approx 0,997$$

4–5 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

$$6 \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3 + \Delta t) - s(3)}{\Delta t}$$

$$\Delta t = 0,1: \frac{\Delta s}{\Delta t} = 27,45$$

$$\Delta t = 0,01: \frac{\Delta s}{\Delta t} = 27,045$$

$$\Delta t = 0,001: \frac{\Delta s}{\Delta t} = 27,0045$$

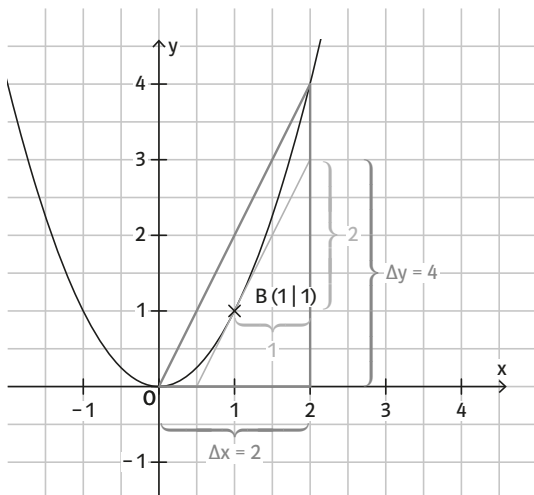
Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 3$ beträgt $27 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$\begin{aligned}
 7 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \frac{(5x^2 + 1) - (5 \cdot 2^2 + 1)}{x - 2} \\
 &= \frac{5x^2 - 5 \cdot 2^2}{x - 2} = \frac{5(x^2 - 2^2)}{x - 2} \\
 &= \frac{5(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 5(x + 2)
 \end{aligned}$$

Für $x \rightarrow 2$ gilt $5(x + 2) \rightarrow 20$. Somit ist $f'(2) = 20$.

8–9 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

10 Fehler in der 1. Auflage des Schulbuchs: Die Aussage lässt sich einfacher für das Intervall $[0; 2]$ veranschaulichen.



Die mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[0; 2]$ beträgt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$. Dieser Wert stimmt überein mit der Steigung der Tangente im Punkt $B(1|1)$.

11 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

2 Die Ableitungsfunktion

Seite 50

Einstiegsaufgabe

Die Aussage von Sarah ist an sich nicht falsch, aber ungenau. Mit den bisherigen Mitteln kann man die Steigung der Tangente des Graphen, also die Geschwindigkeit, für ein (bestimmtes) beliebig kleines Zeitintervall angeben. Um die Geschwindigkeit für jeden Zeitpunkt abgeben zu können, braucht man eine neue Funktion, eine Tangentensteigungsfunktion.

Seite 51

1 a) $f(x) = -0,5x^2$; $x_0 = 2$

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \frac{-0,5x^2 - (-0,5 \cdot 2^2)}{x - 2} \\
 &= \frac{-0,5(x^2 - 2^2)}{x - 2} \\
 &= \frac{-0,5(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\
 &= -0,5(x + 2)
 \end{aligned}$$

Es gilt $-0,5(x + 2) \rightarrow -2$ für $x \rightarrow 2$.

Also ist $f'(2) = -2$.

b) $f(x) = 4x^2$; $x_0 = -1$

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \frac{4x^2 - 4 \cdot (-1)^2}{x - (-1)} \\
 &= \frac{4x^2 - 4}{x + 1} = \frac{4(x - 1)(x + 1)}{x + 1} \\
 &= 4(x - 1)
 \end{aligned}$$

Es gilt $4(x - 1) \rightarrow -8$ für $x \rightarrow -1$.

Also ist $f'(-1) = -8$.

c) $f(x) = x^2 - 2$; $x_0 = 3$

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \frac{(x^2 - 2) - (3^2 - 2)}{x - 3} \\
 &= \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} \\
 &= x + 3
 \end{aligned}$$

Es gilt $x + 3 \rightarrow 6$ für $x \rightarrow 3$.

Also ist $f'(3) = 6$.

2 a) $f(x) = \frac{2}{x}$; $x_0 = 4$

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{2x_0}{x \cdot x_0} - \frac{2x}{x \cdot x_0}}{x - x_0} \\
 &= \frac{\frac{2x_0 - 2x}{x \cdot x_0}}{x - x_0} = \frac{-2(x - x_0)}{x \cdot x_0 \cdot (x - x_0)} \\
 &= \frac{-2}{x \cdot x_0}
 \end{aligned}$$

Es gilt $x \cdot x_0 \rightarrow x_0^2$ für $x \rightarrow x_0$.

Also ist $f'(x_0) = -\frac{2}{x_0^2}$.

Speziell ist $f'(4) = -\frac{2}{4^2} = -\frac{1}{8}$.

b) $f(x) = -\frac{3}{x}$; $x_0 = 1$

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \frac{-\frac{3}{x} - (-\frac{3}{x_0})}{x - x_0} = \frac{-\frac{3x_0}{x \cdot x_0} + \frac{3x}{x \cdot x_0}}{x - x_0} \\
 &= \frac{\frac{-3x_0 + 3x}{x \cdot x_0}}{x - x_0} = \frac{3(x - x_0)}{x \cdot x_0 \cdot (x - x_0)} \\
 &= \frac{3}{x \cdot x_0}
 \end{aligned}$$

Es gilt $x \cdot x_0 \rightarrow x_0^2$ für $x \rightarrow x_0$.

Also ist $f'(x_0) = \frac{3}{x_0^2}$.

Speziell ist $f'(1) = \frac{3}{1^2} = 3$.

c) $f(x) = x^{-2}$; $x_0 = 3$

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \frac{x^{-2} - x_0^{-2}}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0^2 - x^2}{x^2 \cdot x_0^2}}{x - x_0} \\
 &= \frac{\frac{-1 \cdot (x - x_0)(x + x_0)}{x^2 \cdot x_0^2}}{x - x_0} = \frac{-1 \cdot (x + x_0)}{x^2 \cdot x_0^2}
 \end{aligned}$$

Es gilt $\frac{-1 \cdot (x + x_0)}{x^2 \cdot x_0^2} \rightarrow \frac{-2x_0}{x_0^4} = \frac{-2}{x_0^3}$ für $x \rightarrow x_0$.

Also ist $f'(x_0) = -\frac{2}{x_0^3}$.

Speziell ist $f'(3) = -\frac{2}{27}$.

Seite 52

3 a) (1) ist der Graph der Ableitung von (2), da z.B. (1) an der Stelle $x_0 \approx 1,6$ den Wert 0 hat, (2) hat an dieser Stelle eine horizontale Tangente.

b) (2) ist die Ableitungsfunktion von (1), da z.B. an der Stelle $x_0 = 1$ (1) eine horizontale Tangente hat und (2) den Wert 0.

c) (1) ist die Ableitungsfunktion von (2), da z.B. (2) an den Stellen $x_1 \approx 1,45$ und $x_2 \approx 1,55$ jeweils den Wert 0 hat und bei (2) an diesen Stellen jeweils eine horizontale Tangente vorliegt.

Anmerkung: (2) kann dagegen nicht die Ableitungsfunktion von (1) sein, da an der Stellen $x_3 = 2$ und $x_4 = 4$ an denen (1) eine jeweils horizontale Tangente hat, (2) nicht den Wert 0 annimmt.

4–5 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch

6 (A) ist falsch. Die Steigungen der Tangenten an den Graphen sind für $x < 0$ alle negativ.

(B) ist falsch. Die Tangente im Punkt $P(4|0)$ hat eine positive Steigung.

(C) ist wahr. Die Tangente an der Stelle $x = 2$ hat die Steigung 0, die Tangente an der Stelle $x = 3$ hat eine positive Steigung.

(D) ist falsch. Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 2$ ist null. Auf dem Graphen von f' liegt daher der Punkt $P(2|0)$.

(E) ist falsch. Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = -1$ ist negativ.

7 $f(x) = x^2 - 1$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{x^2 - 1 - (x_0^2 - 1)}{x - x_0} \\ &= \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = (x + x_0)\end{aligned}$$

Es gilt $(x + x_0) \rightarrow 2x_0$ für $x \rightarrow x_0$. Also ist $f'(x) = 2x$.

$f'(x) = 1$, d.h. $2x = 1$ hat die Lösung $x = \frac{1}{2}$.

Es ist $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$.

Die Tangente im Punkt $P\left(\frac{1}{2} \mid -\frac{3}{4}\right)$ ist parallel zur ersten Winkelhalbierenden.

8 a)
$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} \\ &= \frac{(-5t^2 + 20) - (-5t_0^2 + 20)}{t - t_0} \\ &= \frac{-5(t^2 - t_0^2)}{t - t_0} \\ &= \frac{-5(t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} = -5(t + t_0)\end{aligned}$$

Es gilt $-5(t + t_0) \rightarrow -10t_0$ für $t \rightarrow t_0$.

Also ist $v(t) = h'(t) = -10t$.

b) $v(t) = -5$, d.h. $-10t = -5$, also $t = 0,5$. Nach 0,5 s hat der Stein die Geschwindigkeit $-10 \frac{m}{s}$ erreicht.

c) $h(t) = 0$, d.h. $-5t^2 + 20 = 0$.

Lösungen sind $t_1 = 2$ und $t_2 = -2$. Es kommt nur die positive Lösung in Frage.

$v(2) = -10 \cdot 2 = -20$.

Der Stein trifft nach 2 s mit der Geschwindigkeit $-20 \frac{m}{s}$ auf dem Boden auf.

9 a) $f'(-3) = -17$

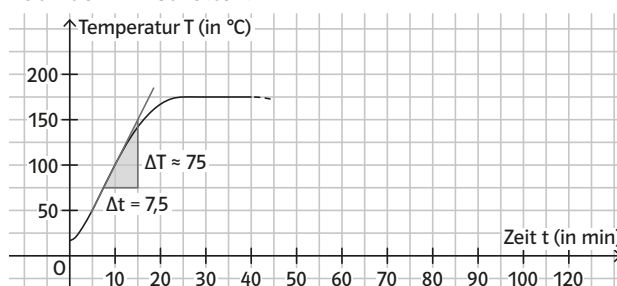
b) $f'(x_0) = -2$; d.h. $6x_0 + 1 = -2$, also $x_0 = -\frac{1}{2}$.

c) $f'(a) = 13$; d.h. $a = 2$; $f(2) = 14$; der Punkt ist $P(2|14)$.

d) $f'(c) = -5$; d.h. $c = -1$; $f(-1) = 2$; der Punkt ist $C(-1|2)$.

Seite 53

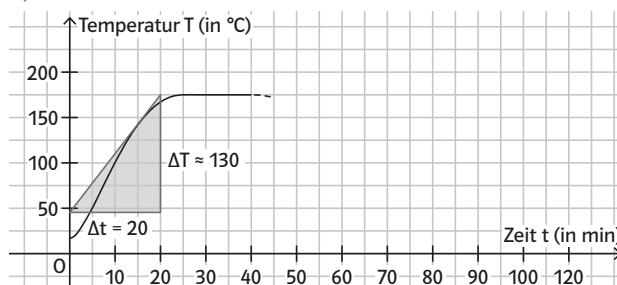
10 a) Die Temperatur steigt am schnellsten ca. 7,5 min nach dem Einschalten.



$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \approx \frac{75}{7.5} = 10$$

Die maximale Änderungsrate zu diesem Zeitpunkt beträgt etwa $10 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$.

b)



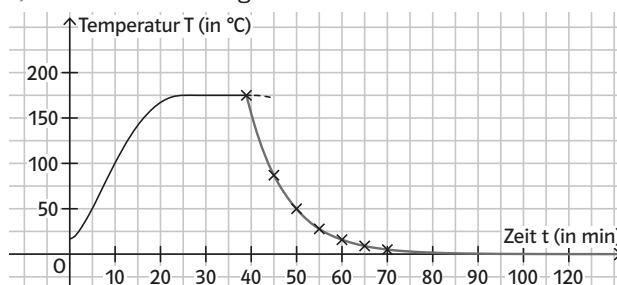
$$T(15) \approx 140$$

Nach 15 min ist im Ofen eine Temperatur von 140°C erreicht.

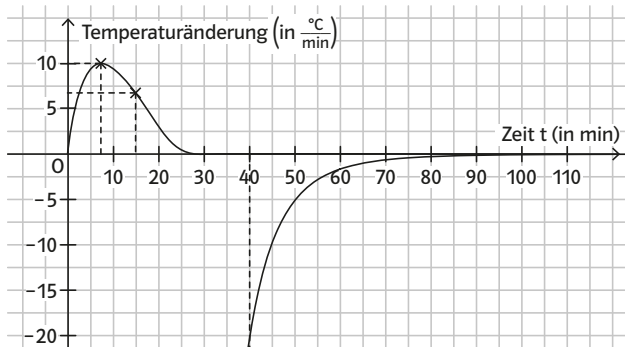
$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \approx \frac{130}{20} = 6,5$$

Die momentane Änderungsrate der Ofeninnentemperatur nach 15 min beträgt $6,5 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$.

c) Individuelle Lösungen



d)



Nach dem Öffnen der Backofentür hat man eine negative Änderung der Temperatur, die allmählich gegen 0 geht.

11 a) Die Ableitungsfunktion f' hat Nullstellen an den Stellen, an denen der Graph von f horizontale Tangenten hat.

$$x_1 = -2; x_2 = -1; x_3 = 1; x_4 = 3$$

$$\text{b) } I_1 =]-2; -1[; I_2 =]1; 3[$$

12 (A) ist wahr. Der Graph von f' schneidet die y -Achse an der Stelle $y = 2$.

(B) ist wahr. In $[2; 3[$ ist $f'(x) < 0$, d.h. die Tangentensteigungen sind alle negativ.

(C) ist wahr, da $f'(1) = 0$.

(D) ist wahr. Die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ schneidet den Graphen von f' an drei Stellen.

(E) ist falsch. Da $f'(x) < 0$ für $x < -1$ sind die Tangentensteigungen hier negativ, der Graph von f kommt demnach von links oben. Da für $x > 3$ gilt, dass $f'(x) > 0$ ist, sind die Tangentensteigungen des Graphen von f in diesem Bereich positiv, der Graph geht demnach nach rechts oben.

13 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

14 a) $f(x) = x^2 + c$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 + c - (x_0^2 + c)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = (x + x_0)$$

Somit fällt bei der Berechnung des Differenzenquotienten und damit bei der Berechnung der Ableitung c heraus.

b) Individuelle Lösungen, z.B.

$$f(x) = x^3 + c \text{ oder } f(x) = x^4 + c.$$

Auch hier fällt bei der Berechnung des Differenzenquotienten und damit bei der Berechnung der Ableitung c heraus.

15 Individuelle Lösungen.

Beispiele etwa $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$ oder

$$f(x) = -0,5x^2 + 2$$
; $f'(x) = -x$.

Eine achsensymmetrische Polynomfunktion ist eine gerade Funktion. Leitet man diese ab, erhält man eine ungerade Polynomfunktion; diese ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Eine allgemeine Begründung ist mit der Kettenregel möglich.

16 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

3 Zusammengesetzte Funktionen

Seite 54

Einstiegsaufgabe

Für $r = 40 \text{ cm}$ hat der zugehörige Punkt auf dem blauen Graphen den y -Wert 8000; der zugehörige Punkt auf dem grünen Graphen hat den y -Wert ≈ 5000 .

Der blaue Graph beschreibt den Flächeninhalt des rechteckigen Tisches.

$$\text{Gleichung des blauen Graphen: } y = 2r \cdot 100.$$

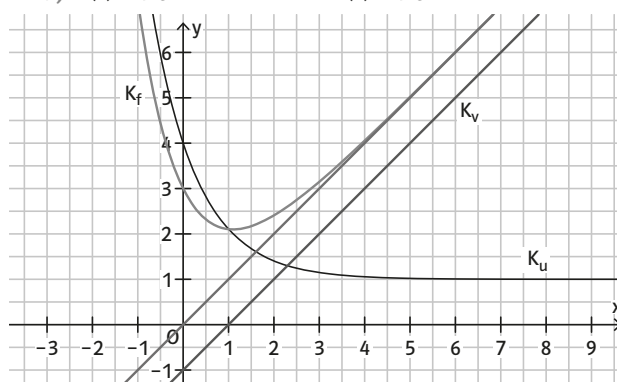
Der grüne Graph beschreibt den Flächeninhalt der beiden Halbkreise.

$$\text{Gleichung des grünen Graphen: } y = \pi \cdot r^2.$$

Der Flächeninhalt der gesamten Anlage ergibt sich für jedes r als Summe $y_{\text{blau}} + y_{\text{grün}}$.

Seite 56

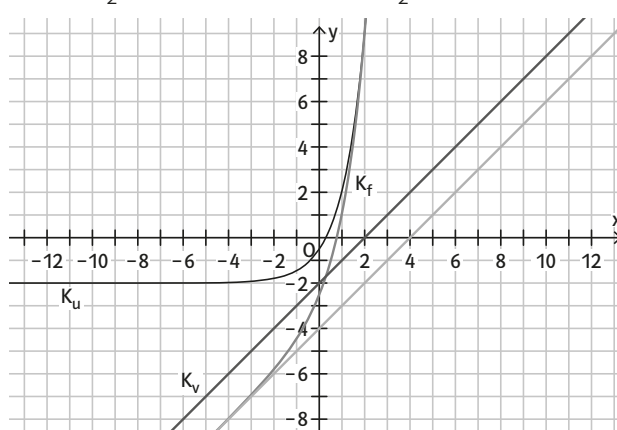
1 a) $f(x) = 3e^{-x} + 1 + x - 1$ $f(x) = 3e^{-x} + x$



Asymptote: $y = x$

$$D_u = \mathbb{R}; D_v = \mathbb{R}; D_f = \mathbb{R}$$

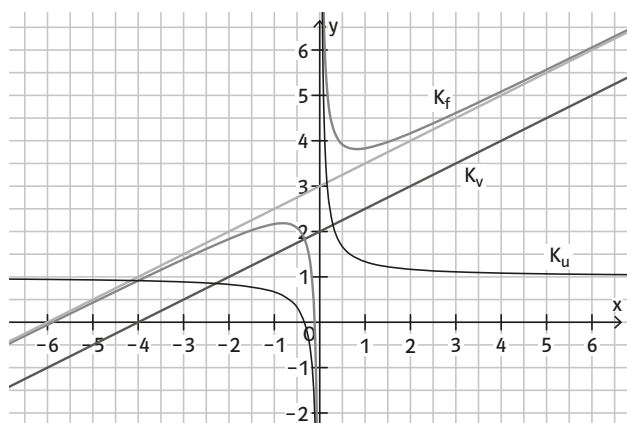
b) $f(x) = \frac{3}{2}e^x - 2 + x - 2$ $f(x) = \frac{3}{2}e^x + x - 4$



Asymptote: $y = x - 4$

$$D_u = \mathbb{R}; D_v = \mathbb{R}; D_f = \mathbb{R}$$

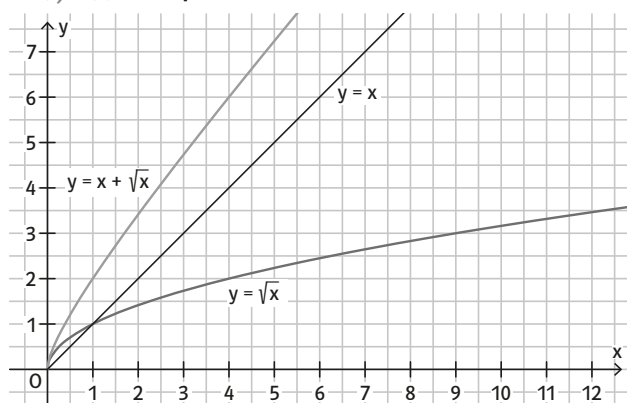
c) $f(x) = \frac{1}{3x} + 1 + \frac{1}{2}x + 2$ $f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{1}{2}x + 3$



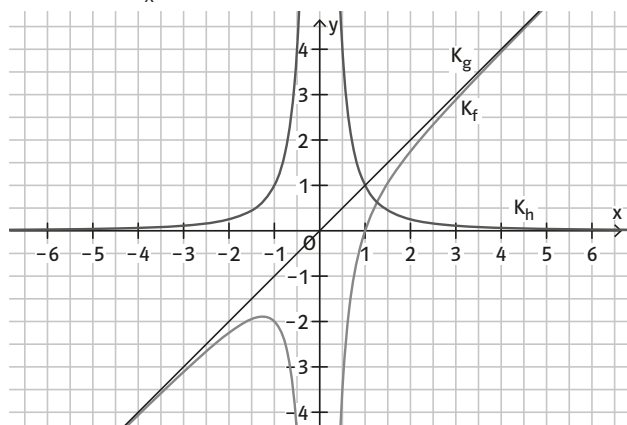
Asymptote: $y = \frac{1}{2}x + 3$

$D_u = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $D_v = \mathbb{R}$; $D_f = \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$

2 a) $f(x) = x + \sqrt{x}$



b) $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$



3 Betrachte z.B. die Stelle $x = 1$.

$(g + h)(1) = g(1) + h(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$; dann kann der Graph der Funktion $g + h$ nicht A sein, wo der Wert -1 wäre, und nicht B, wo der Wert 1 wäre. Der Graph der Funktion $g + h$ könnte der Graph C sein.

Den y-Wert 3 kann man aus dem Graphen A nicht ablesen. Man kann aber eine weitere Stelle betrachten, z.B. $x = -2$. $(g + h)(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = 4 - 4 = 0$

Betrachtet man die Stelle $x = 1$, so kann man die beiden weiteren Graphen festlegen:

$g(1) - h(1) = 1 - 2 = -1$ gehört zu Graph A.

$h(1) - g(1) = 2 - 1 = 1$ gehört zu Graph B.

4 a) $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ mit $u(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$ und $v(x) = e^{-2x} - 2$

$D_u = \mathbb{R}$; $D_v = \mathbb{R}$; $D_f = \mathbb{R}$

Nullstellen der Funktion u sind $x_1 = -2$; $x_2 = 2$;

Nullstelle der Funktion v ist $x_3 = -\frac{1}{2} \ln(2)$

Nach dem Satz vom Nullprodukt hat f damit die Nullstellen $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; $x_3 = -\frac{1}{2} \ln(2)$.

b) $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ mit $u(x) = \frac{1}{x}$ und $v(x) = x + 1$

$D_u = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $D_v = \mathbb{R}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

Die Funktion u hat keine Nullstellen. Nullstelle der Funktion v ist $x_1 = -1$.

Nach dem Satz vom Nullprodukt hat f damit die Nullstelle $x_1 = -1$.

c) $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ mit $u(x) = \sqrt{x}$ und $v(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

$D_u = \mathbb{R}_+$; $D_v = \mathbb{R}$; $D_f = \mathbb{R}_+$

Nullstelle der Funktion u ist $x_1 = 0$. Nullstelle der Funktion v ist $x_2 = 6$.

Nach dem Satz vom Nullprodukt hat f damit die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 6$.

5 Individuelle Lösungen, Lösungen sind exemplarisch.

a) $f(x) = (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (e^x - 4)$

$g(x) = 4 \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (e^x - 4)$

b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (e^x - 2) \cdot (e^x - 5)$

$g(x) = 3 \cdot \sqrt{x} \cdot (e^x - 2) \cdot (e^x - 5)$

6 $f_1(x) = \cos(x) - x + 2$

$f_2(x) = \cos(x) \cdot (-x + 2)$

Prüfung des Funktionswertes an der Stelle 0:

$f_1(0) = \cos(0) - 0 + 2 = 1 + 2 = 3$

$f_2(0) = \cos(0) \cdot (-0 + 2) = 1 \cdot 2 = 2$

Also gehört die Funktion f_1 zum Graphen A und die Funktion f_2 zum Graphen B.

7 (1) $h(x) = x$

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$

$f(-x) = g(-x) \cdot h(-x) = \sin(-x) \cdot (-x)$

$= -\sin(x) \cdot (-x) = f(x)$

Der Graph von $g(x) \cdot h(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

$k(x) = g(x) + h(x)$

$k(-x) = g(-x) + h(-x) = \sin(-x) + (-x)$

$= -\sin(x) - x = -(\sin(x) + x) = -f(x)$

Der Graph von $g(x) + h(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

(2) $h(x) = x^2$

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$

$f(-x) = g(-x) \cdot h(-x) = \sin(-x) \cdot (-x)^2$

$= -\sin(x) \cdot x^2 = -f(x)$

Der Graph von $g(x) \cdot h(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

$k(x) = g(x) + h(x)$

$k(-x) = g(-x) + h(-x) = \sin(-x) + (-x)^2$

$= -\sin(x) + x^2$

Hier ist keine Symmetrie erkennbar. Z.B. ist

$k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^4}{4} + 1 \approx 3,47$; $k\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^4}{4} - 1 \approx 1,47$.

Weder gilt $k\left(-\frac{\pi}{2}\right) = k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ noch gilt

$k\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -k\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$(3) h(x) = x^3$$

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

$$f(-x) = g(-x) \cdot h(-x) = \sin(-x) \cdot (-x)^3$$

$$= -\sin(x) \cdot (-x^3) = \sin(x) \cdot x^3 = f(x)$$

Der Graph von $g(x) \cdot h(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

$$k(x) = g(x) + h(x)$$

$$k(-x) = g(-x) + h(-x) = \sin(-x) + (-x)^3$$

$$= -\sin(x) - x^3 = -(\sin(x) + x^3) = -f(x)$$

Der Graph von $g(x) + h(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Seite 57

8–9 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

10 Der Term von g ist hier immer $g(x) = -\frac{1}{3}x + 1$.

a) $h(x) = e^x$; $f(x) = e^x - \frac{1}{3}x + 1$

b) $h(x) = -e^x$; $f(x) = -e^x - \frac{1}{3}x + 1$

c) $h(x) = -e^{-x}$; $f(x) = -e^{-x} - \frac{1}{3}x + 1$

d) $h(x) = e^{-x}$; $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{3}x + 1$

11 $h_1(x) = f(x) + g(x) = e^x + e^{-x}$

$$h_1(-x) = e^{-x} + e^x = e^x + e^{-x} = h_1(x).$$

Der Graph der Funktion h_1 ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

$$h_2(x) = f(x) - g(x) = e^x - e^{-x}$$

$$h_2(-x) = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -h_2(x).$$

Der Graph der Funktion h_2 ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

$$h_3(x) = f(x) \cdot g(x) = e^x \cdot e^{-x} = 1$$

Der Graph der Funktion h_3 ist eine Parallele zur x-Achse, somit achsensymmetrisch zur y-Achse.

12 a) $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ mit $g(x) = x^2 - 2$ und $h(x) = x^3 - x$.

Die Funktion g ist eine gerade Funktion, da sie nur gerade Exponenten hat. Die Funktion h ist eine ungerade Funktion, da sie nur ungerade Exponenten hat.

$$\text{Es gilt: } f(-x) = g(-x) \cdot h(-x) = g(x) \cdot (-h(x)) = -f(x).$$

Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

b) $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ mit $g(x) = x$ und $h(x) = \sin(x)$.

Die Funktionen g und h sind ungerade Funktionen.

$$\text{Es gilt: } f(-x) = g(-x) \cdot h(-x) = (-g(x)) \cdot (-h(x)) = f(x).$$

Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

c) $f(x) = g(x) + h(x)$ mit $g(x) = \frac{1}{x^2}$ und $h(x) = x^3$.

Die Funktion g ist eine gerade Funktion, die Funktion h ist eine ungerade Funktion.

$$\text{Es gilt: } f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) + (-h(x)) = \frac{1}{x^2} - x^3.$$

Dieser Term stimmt weder mit $f(x)$ noch mit $f(-x)$ überein. Folglich zeigt der Graph der Funktion f keine der Symmetrieeigenschaften.

13 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

14 $g(x) = (x - 1)^2$

a) $h(x) = (x + 1)^2$

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

$$f(x) = (x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 2x^2 + 2$$

Da nur gerade Exponenten vorkommen, ist der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) $h(x) = -(x + 1)^2$

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

$$f(x) = (x - 1)^2 - (x + 1)^2 = -4x$$

Da nur ungerade Exponenten vorkommen ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung.

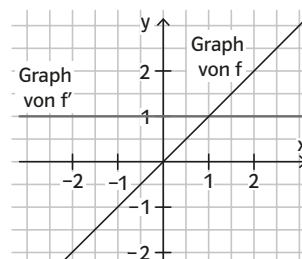
15 Die Behauptung stimmt nicht. Der Graph der Funktion $f(x) = \sin(x) + 0,5x$ „pendelt“ zwar für $x \rightarrow \pm \infty$ um die Gerade mit der Gleichung $y = 0,5x$, aber der vertikale Abstand zwischen den beiden Graphen nimmt immer wieder die Werte $+1$ oder -1 an (für $x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ bzw. für $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$).

16 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

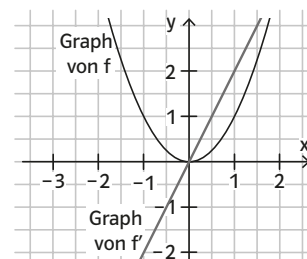
4 Ableitungsregeln, höhere Ableitungen

Seite 58

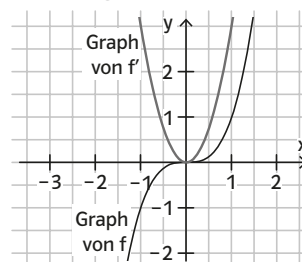
Einstiegsaufgabe



Vermutung: Der Grad der Ableitung ist 0.



Vermutung: Der Grad der Ableitung ist 1.



Vermutung: Der Grad der Ableitung ist 2.

Seite 60

1 a) $f'(x) = 6x$

c) $f'(x) = 5$

e) $f(x) = \frac{4}{x} = 4 \cdot x^{-1}$

$$f'(x) = (-1) \cdot 4 \cdot x^{-2} = -\frac{4}{x^2}$$

f) $f'(x) = \frac{2}{x^6}$

h) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

b) $f'(x) = -28x^3$

d) $f'(x) = -2x^9$

g) $f'(x) = -\frac{4}{x^7}$

2 a) $f'(x) = 6x^2 + 10x$ b) $f'(x) = 20x^4 - 3$
 c) $f'(x) = 14x^6 - 12x^3$ d) $f'(x) = -6x^2 + 2x$
 e) $f(x) = 2x^5 + 2x^4 - 2x^3$ f) $f(u) = u^3 + 6u^2 + 9u$
 $f'(x) = 10x^4 + 8x^3 - 6x^2$ $f'(u) = 3u^2 + 12u + 9$

3 a) $f'(x) = -3x + \frac{5}{4}$; $f''(x) = -3$; $f'''(x) = 0$
 b) $f'(x) = 0,6x^2 - x$; $f''(x) = 1,2x - 1$; $f'''(x) = 1,2$
 c) $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$
 $f'(x) = 3x^2 - 10x - 4$; $f''(x) = 6x - 10$; $f'''(x) = 6$
 d) $f(t) = 2t^2 - 6t + 4,5$
 $f'(t) = 4t - 6$; $f''(t) = 4$; $f'''(t) = 0$
 e) $f'(x) = -2x^{-2} + 8x^{-3}$; $f''(x) = 4x^{-3} - 24x^{-4}$;
 $f'''(x) = -12x^{-4} + 96x^{-5}$
 f) $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$; $f''(x) = \frac{6}{x^3} - x^{-\frac{3}{2}}$; $f'''(x) = -\frac{18}{x^4} + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

4 a) $f'(x) = 3x$; $f'(2) = 6$; Steigung im Punkt A: 6
 b) $f'(t) = t^3 - 5t^2$; $f'(2) = -12$; Steigung im Punkt A: -12
 c) $f'(z) = \frac{3}{2}z + 3z^{-2}$; $f'(2) = \frac{15}{4}$; Steigung im Punkt A: 3,75
 d) $f'(x) = -1 + 8x^{-5}$; $f'(2) = -1 + \frac{8}{32} = -\frac{3}{4}$; Steigung im Punkt A: -0,75

5–6 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

7 a) $f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4$
 $f'(x) = 0$ hat die Lösung $x_1 = 2$; es gilt: $f(2) = -3$.
 Der Punkt ist $P(2|-3)$.
 b) $f'(x) = 2x^2 + 2x - 12$
 $f'(x) = 0$ hat die Lösungen $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$.
 $f(-3) = 27$; $f(2) = -\frac{44}{3}$.
 Die Punkte sind $P_1(-3|27)$ und $P_2(2|-\frac{44}{3})$.
 c) $f(x) = x^5 - 80x$; $f'(x) = 5x^4 - 80$
 $f'(x)$ hat die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.
 $f(2) = -128$ und $f(-2) = 128$
 Die Punkte sind $P_1(2|-128)$ und $P_2(-2|128)$.
 d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$
 $f'(x) = 0$ hat die Lösung $x_1 = \frac{1}{4}$.
 $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$. Der Punkt ist $P(\frac{1}{4}|\frac{1}{4})$.

8 $f'(x) = 3x^2 + 4$
 Für alle reellen x gilt $3x^2 \geq 0$ und somit $f'(x) \geq 4$.
 Somit haben alle Tangenten an den Graphen von f eine positive Steigung.

9 Kärtchen A: Die Hochzahl wurde um 1 erhöht, nicht um 1 verringert.
 Richtig: $f'(x) = -3x^{-4}$.
 Kärtchen B: Der Vorfaktor -1 fehlt.
 Richtig: $f'(x) = (-1) \cdot x^{-2} = -x^{-2}$.
 Kärtchen C: Das Vorzeichen der Hochzahl ist falsch.
 Richtig: $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Seite 61

10 a) $h(1,2) = 1,2^3 = 1,728$;
 $v(t) = h'(t) = 3t^2$; $v(1,2) = 3 \cdot 1,2^2 = 4,32$
 Die Höhe nach 1,2s beträgt 1,728m, die Geschwindigkeit 4,32 $\frac{m}{s}$.

b) $3t^2 = 12$; $t = \pm 2$; nach 2s beträgt die Geschwindigkeit $12 \frac{m}{s}$.

11 a) Der Graph von g entsteht aus dem Graphen von f durch eine Streckung in y -Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ und einer Verschiebung um 4 in y -Richtung.

b) Es ist $f'(x) = 3x^2$ und $g'(x) = \frac{3}{2}x^2$.

Es ist $g'(x_0) = \frac{3}{2}x_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 3x_0^2 = \frac{1}{2} \cdot f'(x_0)$.

12 a) $f'(x) = 4x^3$; $4x^3 = 4$; also $x_0 = 1$: $P(1|1)$.
 b) $f'(x) = 3x^2$; $3x^2 = 12$; also $x_1 = -2$; $x_2 = 2$: $P_1(-2|-8)$;
 $P_2(2|8)$.
 c) $f'(x) = \frac{1}{x^2}$; $\frac{1}{x^2} = 9$; also $x_1 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{1}{3}$;

13 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

14 a) $f'(x) = 3x^2 - 12$
 $f'(x) = 0$, d.h. $3x^2 - 12 = 0$
 Lösungen sind $x_1 = -2$; $x_2 = 2$
 $f(x_1) = 16$; $f(x_2) = -16$
 $P_1(-2|16)$; $P_2(2|-16)$;
 b) Der Graph von f' ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S(0|-12)$. Folglich gilt $f'(0) = -12$ und $f'(x) > -12$ für alle $x \neq 0$.

15 a) $f'(x) = 2x - 4$
 Die x -Achse hat die Steigung 0. Folglich löst man die Gleichung $f'(x) = 0$, d.h. $2x - 4 = 0$. Diese hat die Lösung $x = 2$.
 Es ist $f(2) = 0$.
 Somit ist die x -Achse Tangente an K im Punkt $S(2|0)$.
 b) Die Wertemenge von f' ist $\mathbb{R}$, deswegen nimmt die Tangentensteigung m jede reelle Zahl an.

16 a) $f'(x) = 1,5x^2 + 4x$; $f''(x) = 3x + 4$
 Die 2. Ableitung kann von f stammen.
 b) $f'(x) = 1,5x^2 + 6x + 2$; $f''(x) = 3x + 6$
 Die 2. Ableitung stammt nicht von f .
 c) $f(x) = 0,5x^3 + 2x^2 + 2x + 5$; $f'(x) = 1,5x^2 + 4x + 2$;
 $f''(x) = 3x + 4$
 Die 2. Ableitung kann von f stammen.

17 $f(x) = u(x) + v(x)$
 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
 $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(u(x) + v(x)) - (u(x_0) + v(x_0))}{x - x_0}$
 $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(u(x) - u(x_0)) + (v(x) - v(x_0))}{x - x_0}$
 $= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \right) + \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \right)$
 $= u'(x_0) + v'(x_0)$

18 Die Ableitungsregel für $f = r \cdot g + s \cdot h$ lautet

$$f' = r \cdot g' + s \cdot h'$$

Beweis:

$$f(x) = r \cdot g(x) + s \cdot h(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k}$$

$$= \frac{(r \cdot g(x_0 + k) + s \cdot h(x_0 + k)) - (r \cdot g(x_0) + s \cdot h(x_0))}{k}$$

$$= \frac{(r \cdot g(x_0 + k) - r \cdot g(x_0)) + (s \cdot h(x_0 + k) - s \cdot h(x_0))}{k}$$

$$= r \cdot \frac{g(x_0 + k) - g(x_0)}{k} + s \cdot \frac{h(x_0 + k) - h(x_0)}{k}$$

$$\text{Für } k \rightarrow 0 \text{ gilt: } \frac{g(x_0 + k) - g(x_0)}{k} \rightarrow g'(x_0)$$

$$\frac{h(x_0 + k) - h(x_0)}{k} \rightarrow h'(x_0)$$

$$\text{Also gilt: } f'(x_0) = r \cdot g'(x_0) + s \cdot h'(x_0).$$

19 $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

a) Es soll gelten $n \cdot (-1)^{n-1} < 0$: Hierfür muss $n - 1$ ungerade sein, d.h. n muss gerade sein. Die Aussage gilt also für $n = 2; 4 \dots$

b) Für Punktsymmetrie zum Ursprung muss der Exponent $n - 1$ ungerade sein, d.h. n muss gerade sein. Die Aussage gilt also für $n = 2; 4 \dots$

c) $n \cdot (-1)^{n-1} = n \cdot 1^{n-1}$. Hierfür muss der Exponent $n - 1$ gerade sein, d.h. n muss ungerade sein. Die Aussage gilt also für $n = 1; 3 \dots$

20 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch

5 Tangenten

Seite 62

Einstiegsaufgabe

Der Rennfahrer schlittert entlang der Tangente an den Graphen im Punkt $A(4|2)$. Sie schneidet die x -Achse ungefähr im Punkt $B(5,1|0)$. Er fährt also ungefähr im Punkt $B(5,1|0)$ ins Kiesbett.

Seite 64

1 a) Tangente in A: $y = x - 3,5$.

Tangente in B: $y = -2x - 2$.

Tangente in C: $y = -2$.

b) Tangente in A: $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

Tangente in B: $y = -x + 2$.

Tangente in C: $y = -4x + 4$.

c) Tangente in A: $y = -2x - 5$.

Tangente in B: $y = -9x - 16$.

Tangente in C: $y = x$.

2 a) $f'(x) = 2x$, $f'(2) = 4$ **b)** $f'(x) = 3x^2$, $f'(1) = 3$

c) $f'(x) = 4x$, $f'(3) = 12$ **d)** $f'(x) = -x^{-2}$, $f'(2) = -\frac{1}{4}$

e) $f'(x) = 6x + 5$, $f'(-1) = -1$ **f)** $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f'(4) = \frac{1}{4}$

3 a) $t: y = 6x - 9$ **b)** $t: y = x - 2$ **c)** $t: y = 2x - \frac{2}{3}$

d) $t: y = 4x - 8$ **e)** $t: y = -8x - 9$ **f)** $t: y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

4 a) $t: y = 2x - 2$. Schnittpunkt mit der x -Achse: $N(1|0)$.

Schnittpunkt mit der y -Achse: $Y(0|2)$.

b) $t: y = -3x - \frac{4}{3}$. Schnittpunkt mit der x -Achse: $N(-\frac{4}{3}|0)$.

Schnittpunkt mit der y -Achse: $(0|-\frac{4}{3})$.

c) $t: y = -3x - 6$. Schnittpunkt mit der x -Achse: $N(-2|0)$.

Schnittpunkt mit der y -Achse: $Y(0|-6)$.

5 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

Seite 65

6 a) $f(x) = -x^2 + 3x - 4$; $f'(x) = -2x + 3$; $m = 5$

Die Bedingung $f'(x) = g'(x)$ liefert mögliche Berührstellen: $-2x + 3 = 5$ hat die Lösung $x = -1$.

$f(-1) = -8 = g(-1)$, also haben die beiden Graphen den Punkt $B(-1|-8)$ gemeinsam.

b) $f'(x) = 2x^3 - 3$

Bedingung $2x^3 - 3 = -1$; Lösung $x = 1$

$f(1) = -\frac{5}{2} = g(1)$; Berührpunkt $B(1|-\frac{5}{2})$

c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$; Bedingung $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$;

Lösung $x = 4$

Berührpunkt $B(4|0)$

d) $f'(x) = e^x$; Bedingung $e^x = e$; Lösung $x = 1$

Berührpunkt $B(1|0)$

7 a) $f'(x) = -3x^2 + 4x$; $g'(x) = 3x^2$

$f(1) = g(1) = 2$; $f'(1) = 1$; $g'(1) = 3$;

Die Graphen schneiden sich an der Stelle $x_0 = 1$, sie berühren sich aber nicht.

b) $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2$; $g'(x) = -4x + 12$

$f(2) = g(2) = 0$; $f'(2) = g'(2) = 4$;

Die Graphen berühren sich an der Stelle $x_0 = 2$.

Gemeinsame Tangente:

$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$; d.h. $t: y = 4x - 8$.

8 a) $f(x) = 4x^3 - x$, $f'(x) = 12x^2 - 1$; $f'(x) = 2$ für

$x^2 = \frac{1}{4}$; Punkte $P_1(-\frac{1}{2}|0)$ und $P_2(\frac{1}{2}|0)$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 10x$, $f'(x) = x^2 + x - 10$; $f'(x) = 2$

für $x_1 = -4$ und $x_2 = 3$; Punkte $P_1(-4|\frac{80}{3})$ und

$P_2(3|-\frac{33}{2})$

9 $f(t) = \frac{6}{t} + 37$, $f'(t) = -\frac{6}{t^2}$, $f(6) = 38$, $f'(6) = -\frac{1}{6}$

Tangente an den Graphen von f in $A(6|38)$:

$y = -\frac{1}{6} \cdot (t - 6) + 38 = -\frac{1}{6}t + 39$.

Gleichung der Geraden für lineare Abnahme:

$y = -\frac{1}{6}t + 39$.

$-\frac{1}{6}t + 39 = 37$ für $t = 12$.

Nach 12 Tagen hat Tom wieder Normaltemperatur.

10–12 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch

13 $f'(x) = x$;

Tangente in einem Punkt $P_0(x_0 | f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

ergibt $y = x^2 - x_0x - \frac{1}{2}x_0^2 + 2$.

y-Achsenabschnitt gleich 0 setzen:

$$-\frac{1}{2}x_0^2 + 2 = 0 \text{ hat die Lösungen } x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 2.$$

Tangente im Punkt $B_1(-2 | 4)$: $t_1: y = -2x$;

Tangente im Punkt $B_2(2 | 4)$: $t_2: y = 2x$.

14 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$; $f'(x) = x$; $f(2) = 5$; $B(2 | 5)$

$$f'(2) = 2$$

$g_1: y = 2x$ (s. Fig. 1).

Die Verschiebung von g_1 um 2 in x-Richtung ergibt die Gerade $g_2: y = 2(x - 2)$ (s. Fig. 2).

Die Verschiebung von g_2 um 5 in y-Richtung ergibt die Tangente an den Graphen von f im Punkt $B(2 | 5)$:

$$t: y = 2(x - 2) + 5 \text{ (s. Fig. 3)}.$$

Somit erhält man gerade die Punkt-Steigungs-Form der Tangente an den Graphen von f im Punkt B .

Umgeformt lautet die Tangentengleichung

$$t: y = 2x + 1$$

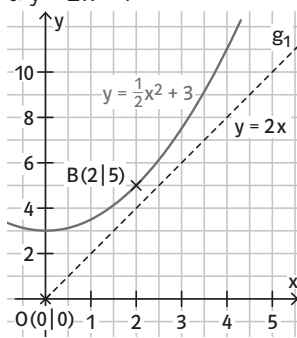


Fig. 1

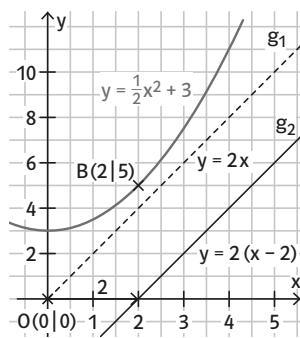


Fig. 2

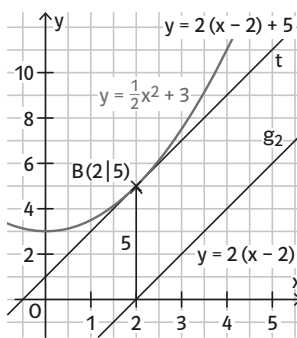


Fig. 3

15 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch

6 Ableitung trigonometrischer Funktionen

Seite 66

Einstiegsaufgabe

Zu betrachten sind vor allem die Stellen, an denen die Steigung des Graphen von f gleich null ist. Dort hat die 1. Ableitung von f eine Nullstelle.

Linke Abbildung: Der blaue Graph hat an den Stellen $x_1 \approx -1,51$ und $x_2 \approx 1,51$ Stellen, an denen die Steigung null ist. Dies entspricht den Nullstellen des orangenen Graphen.

(blau: $y = \sin(x) + 1$; orange: $y = \cos(x)$)

Rechte Abbildung: An den Stellen, an denen der blaue Graph die Steigung null hat, hat der orange Graph Nullstellen. Betrachtet man den orangenen Graph zwischen den Nullstellen, so sind die Werte des orangenen Graphen dort negativ, wo der blaue Graph monoton steigt und dort positiv, wo der orange Graph monoton fällt. Also kann der orange Graph nicht die Ableitungsfunktion des blauen Graphen darstellen.

(blau: $y = 2\cos(x)$; orange: $y = \sin(x)$)

1 a) $f'(x) = 12 \cdot \cos(x)$ **b)** $f'(x) = 2 \cdot \sin(x)$

c) $f'(x) = -\sqrt{5} \cdot \sin(x)$ **d)** $f'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \cos(x)$

e) $f'(x) = 15x^2 - \cos(x)$

f) $f'(x) = -2 \cdot \sin(x) - \cos(x)$

Seite 67

2 a) $f'(x) = 3\cos(x)$; $f'(0) = 3$

b) $f'(x) = \sin(x)$; $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

c) $f'(x) = 1 + 2\cos(x)$; $f'(\frac{\pi}{3}) = 2$

d) $f'(x) = \frac{1}{3}\cos(x)$; $f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{6}$

e) $f'(x) = \frac{1}{2}x + \cos(x)$; $f'(0) = 1$

f) $f'(x) = -5\sin(x) + 3$; $f'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{5}{2}\sqrt{2} + 3$

g) $f'(x) = \sqrt{3}\cos(x) + \sin(x)$; $f'(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$

h) $f'(x) = -\frac{1}{4}\cos(x) + \frac{1}{8}\sqrt{2}$; $f'(\frac{\pi}{4}) = 0$

i) $f'(x) = \frac{1}{4} - \sin(x)$; $f'(\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

j) $f'(x) = -2\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$; $f'(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

3 a) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{7\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $y = \frac{3}{2}x - \frac{5\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $y = (1 + \sqrt{2})x - \frac{1}{4}\sqrt{2}\pi + \sqrt{2}$

4 $f'(x) = 2\cos(x)$

$2\cos(x) = 0$ hat die Lösung $x = \frac{\pi}{2}$. Es ist $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}$.

Also ist g Tangente an den Graphen von f im Punkt $B(\frac{\pi}{2} | \frac{3}{2})$.

5–7 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

8 a) $f(x) = \sin(x)$; $f'(x) = \cos(x)$;

$g(x) = x + 1$; $g'(x) = 1$

Die Gleichung $f'(x) = g'(x)$, d.h. $\cos(x) = 1$, hat im Intervall $[-\pi; \pi]$ die Lösung $x = 0$.

Der Punkt ist $P(0 | 0)$.

b) $f(x) = -2\cos(x)$; $f'(x) = 2\sin(x)$;

$g(x) = -2x$; $g'(x) = -2$

Die Gleichung $f'(x) = g'(x)$, d.h. $2\sin(x) = -2$, hat im Intervall $[-\pi; \pi]$ die Lösung $x = -\frac{\pi}{2}$.

Der Punkt ist $P(-\frac{\pi}{2} | 0)$.

9 $f(x) = \sin(x) - 2$; $f'(x) = \cos(x)$;

$g(x) = 3 \sin(x)$; $g'(x) = 3 \cos(x)$;

Die Gleichung $f(x) = g(x)$ führt auf die Gleichung

$\sin(x) = -1$ mit den Lösungen $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ im Intervall $[-\pi; 2\pi]$.

Es ist $f'(-\frac{\pi}{2}) = g'(-\frac{\pi}{2}) = 0$ sowie $f(-\frac{\pi}{2}) = g(-\frac{\pi}{2}) = -3$

Entsprechend gilt:

$f'(\frac{3\pi}{2}) = g'(\frac{3\pi}{2}) = 0$ und $f(\frac{3\pi}{2}) = g(\frac{3\pi}{2}) = -3$

Somit berühren sich die beiden Graphen in den Punkten

$B_1(-\frac{\pi}{2} | -3)$ und $B_2(\frac{3\pi}{2} | -3)$.

10 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

11 Der grüne und der lilafarbene Graph sind die Graphen von Kosinusfunktionen (die an der x-Achse gespiegelt und entlang der y-Achse verschoben wurden). Deren Ableitungsfunktion ist die Sinusfunktion.

12 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch

7 Lineare Verkettung von Funktionen und deren Ableitung

Seite 68

Einstiegsaufgabe

Umrechnung Kelvin in Fahrenheit in einem Schritt:

$g(k) = 1,8(k - 273) + 32 = 1,8k - 459,4$

Seite 69

1 a) $f(5) = u(v(5)) = u(10) = 1000$

$f(-2) = u(v(-2)) = u(3) = 27$

b) $f(5) = u(v(5)) = u(16) = 4$

$f(-2) = u(v(-2)) = u(9) = 3$

c) $f(5) = u(v(5)) = u(-4) = -\frac{1}{4}$

$f(-2) = u(v(-2)) = u(10) = \frac{1}{10}$

2 $u_1(v_1(x)) = \sqrt{8x+1} + 2$

$u_1(v_2(x)) = \sqrt{3-2x} + 2$

$u_1(v_3(x)) = \sqrt{-4x} + 2$

$u_2(v_1(x)) = \cos(8x+1)$

$u_2(v_2(x)) = \cos(3-2x)$

$u_2(v_3(x)) = \cos(-4x)$

$u_3(v_1(x)) = 4 \cdot (8x+1)^3$

$u_3(v_2(x)) = 4 \cdot (3-2x)^3$

$u_3(v_3(x)) = 4 \cdot (-4x)^3$

3 a) $u(x) = x^2$; $v(x) = x+1$; $m = 1$

b) $u(x) = 5x^3$; $v(x) = 2x-4$; $m = 2$

c) $u(x) = \frac{4}{x}$; $v(x) = 3x-2$; $m = 3$

d) $u(x) = \cos(x)-3$; $v(x) = 2x+1$; $m = 2$

e) $u(x) = \sin(x)$; $v(x) = 3x$; $m = 3$

f) $u(x) = -3\sin(x)$; $v(x) = 0,5x+2$; $m = 0,5$

g) $u(x) = \sqrt{x}$; $v(x) = \frac{1}{2}x-3$; $m = \frac{1}{2}$

h) $u(x) = x^{-2}$; $v(x) = 4-3x$; $m = -3$

i) $u(x) = 3\sqrt{x}+2$; $v(x) = x-4$; $m = 1$

4 a) $f'(x) = 5 \cdot 3(5x+2)^2 = 15(5x+2)^2$

b) $f'(t) = 2 \cdot 3 \cdot 2(3t-1)^1 = 12(3t-1)$

c) $f'(x) = -3 \cdot (-1) \cdot 7(4-x)^6 = 21(4-x)^6$

d) $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4 \left(\frac{1}{4}x-2\right)^3 = \left(\frac{1}{4}x-2\right)^3$

e) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \left(\frac{1}{3}x+5\right)^5 = \left(\frac{1}{3}x+5\right)^5$

f) $f'(t) = (-2) \cdot 9(6-2t)^8 = -18(6-2t)^8$

g) $f'(x) = 6 \cdot 5(6x+7)^4 = 30(6x+7)^4$

h) $f'(t) = 4 \cdot 8(t+2)^7 = 32(t+2)^7$

i) $f'(x) = -5 \cdot (-3) \cdot 11(-3x+4)^{10} = 165(-3x+4)^{10}$

5 a) $f'(t) = 7 \cdot \frac{1}{2\sqrt{7t-3}}$

b) $f'(x) = -4(x+1)^{-5}$

c) $f'(t) = 6 \cdot (-2)(6t)^{-3} = -12(6t)^{-3}$

d) $f'(t) = -2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4t+6}} = -4 \cdot \frac{1}{\sqrt{4t+6}}$

e) $f'(x) = -1 \cdot (-6)(-x+2)^{-7} = 6(-x+2)^{-7}$

f) $f'(x) = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3-2x}} = -\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$

Seite 70

6 a) $f'(x) = 2 \cdot \cos(2x)$

b) $f'(t) = -5 \cdot \sin(5t)$

c) $f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

d) $f'(x) = 3 \cdot \cos(3x+4)$

e) $f'(t) = -\pi \cdot \sin(\pi t - 3)$

f) $f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot \cos(3x)$

g) $f'(x) = 6 \cdot \sin(2x-1)$

h) $f'(x) = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi x)$

i) $f'(x) = -\frac{3}{2} \cdot \cos(4-6x)$

7–8 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch

9 A: Hier wurde nur der Faktor m vor den Funktions-term geschrieben, aber nicht die Ableitung von u verwendet.

Korrekt: $f'(x) = 4 \cdot 3(4x+2)^2 = 12(4x+2)^2$.

B: Hier wurde die Ableitung von u an der Stelle x und nicht an der Stelle $v(x) = 3x$ ausgewertet.

Korrekt: $f'(x) = 12 \cos(3x)$.

C: Hier wurde der Faktor m vor der Ableitung von u vergessen.

Korrekt: $f'(x) = 2 \cdot 5(2x-5)^4 = 10(2x-5)^4$.

D: Kein Fehler.

E: Kein Fehler.

F: Hier wurde der Faktor m vor der Ableitung von u vergessen.

Korrekt: $f'(x) = 2 \cdot \cos(2x)$.

10 a) $f(x) = 2 \cdot (4x-1)^{-1}$

$f'(x) = 2 \cdot 4 \cdot (-1)(4x-1)^{-2} = -8(4x-1)^{-2}$

b) $f(x) = 5 \cdot (2-x)^{-3}$

$f'(x) = 5 \cdot (-1) \cdot (-3)(2-x)^{-4} = 15(2-x)^{-4}$

c) $f(x) = -3 \cdot (2x+3)^{-2}$

$f'(x) = -3 \cdot 2 \cdot (-2)(2x+3)^{-3} = 12(2x+3)^{-3}$

11 a) $f'(x) = 3(x-2)^2$

$f(1) = -4; f'(1) = 3$

$y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1) = 3x-7$

b) $f'(x) = -\frac{6}{(2x-1)^2}$

$f(1) = 3; f'(1) = -6$

$y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1) = -6x+9$

c) $f'(x) = \pi \cdot \cos(\pi x)$

$f(1) = 1; f'(1) = -\pi$

$y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1) = -\pi x + \pi + 1$

12 Ableitung:

$f'(x) = \frac{1}{9} \cdot 3 \cdot 3(3x+2)^2 = (3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4.$

a) $f'(2) = 64$

Der Graph von f hat im Punkt $P(2|f(2))$ die Steigung 64.

b) Ansatz: $f'(x) = 0$, d.h. $(3x+2)^2 = 0$. Lösung: $x = -\frac{2}{3}$.

Der Graph besitzt einen Punkt mit waagerechter

Tangente: $P\left(-\frac{2}{3} \mid f\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.

c) Ansatz: $f'(x) = 1$, d.h. $9x^2 + 12x + 3 = 0$.

Lösungen: $x_1 = -\frac{1}{3}$ und $x_2 = -1$.

Mit $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$ und $f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$ folgt

$y = \left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9} = x + \frac{4}{9}$ (Tangente in $Q_1\left(-\frac{1}{3} \mid \frac{1}{9}\right)$).

Mit $f(-1) = -\frac{1}{9}$ und $f'(-1) = 1$ folgt

$y = (x+1) - \frac{1}{9} = x + \frac{8}{9}$ (Tangente in $Q_2\left(-1 \mid -\frac{1}{9}\right)$).

13 a) $f(x) = 0$, d.h. $\frac{1}{8}(x-1)^4 - 2 = 0$ führt auf die Gleichung $(x-1)^4 = 16$, d.h. $x-1 = \pm 2$.

Nullstellen: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$

b) $f'(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3$

$N_1(-1|0): y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$

d.h. $t_1: y = -4x - 4$

$N_2(3|0): y = f'(3)(x - 3) + f(3)$

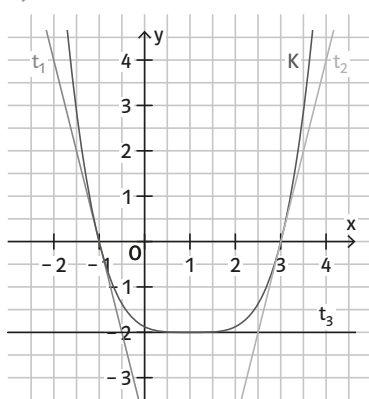
d.h. $t_2: y = 4x - 12$

c) $f'(x) = 0$, d.h. $\frac{1}{2}(x-1)^3 = 0$ hat die Lösung $x = 1$.

Es ist $f(1) = -2$.

Tangente in $P(1|-2): t_3: y = -2$

d)



14 Der Graph von f mit $f(x) = u(2x)$ entsteht aus dem Graphen von u durch Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x -Richtung. Es ist daher entweder (A) der Graph von u und (D) der Graph von f oder (B) der Graph von u und (C) der Graph von f .

Wäre (D) der Graph von f , so wäre $f'(0,5) > 2$. Dann könnte aber weder (B) noch (C) der Graph von f' sein. Somit ist (C) der Graph von f und (B) der Graph von u . Da der Graph von f z.B. an der Stelle $x = 1$ eine größere Steigung als der Graph von u hat, ist (D) der Graph von f' und (A) der Graph von u' .

15 Der Term $60 - 2t$ gibt die Kantenlänge (in cm) t Minuten nach Betätigen des Startknopfs an.

$f(t) = (60 - 2t)^3$ entspricht damit dem Volumen (in cm^3) des Würfels zu dieser Zeit.

$f'(2)$ entspricht der momentanen Änderungsrate des Würfelvolumens (in cm^3 pro min) zwei Minuten nach Betätigen des Startknopfs.

Seite 71

16 a) $x_0 = 0: u(v(0)) = u(1) = 0$

$x_0 = 0,5: u(v(0,5)) = u(0,5) = 1$

$x_0 = 1: u(v(1)) = u(0) = 0$

b) $x_0 = 0: v(0) = -0 + 1$, also

$u(v(0)) = u(1) = -4(1 - 0,5)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$

$x_0 = 0,5: v(0,5) = -0,5 + 1 = 0,5$, also

$u(v(0,5)) = u(0,5) = -4(0,5 - 0,5)^2 + 1 = 0 + 1 = 1$

$x_0 = 1: v(1) = -1 + 1 = 0$, also

$u(v(1)) = u(0) = -4(-0,5)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$

17 a) $f(2) = u(v(2)) = u(0) = 2$

$f(x) = u(v(x))$ mit $v(x) = x - 2$, also $m = 1$.

Also ist $f'(2) = 1 \cdot u'(v(2)) = u'(0) = 0$.

b) Es ist $u(x) = -0,5x^2 + 2$ und $v(x) = x - 2$.

Also gilt

$f(2) = u(v(2)) = u(2 - 2) = u(0) = -0,5 \cdot 0^2 + 2 = 2$.

Mit $u'(x) = -x$ und $m = 1$ folgt

$f'(2) = 1 \cdot u'(v(2)) = u'(0) = 0$.

18 $f'(x) = \frac{1}{2}(2x - 4) = x - 2$; $g'(x) = -x + 8$

$f(4) = 4$; $g(4) = 4$

$f'(4) = 4$; $g'(4) = 4$

Somit berühren sich die beiden Graphen im Punkt $P(4|4)$

19 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

20 a) $f(x) = (x - 7)^3$

b) $f(x) = (3x + 5)^4$

c) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$

21 a) $f(x) = \sin(7x)$; $f'(x) = 7 \cdot \cos(7x)$;

$f''(x) = -7^2 \cdot \sin(7x)$; $f'''(x) = -7^3 \cdot \cos(7x)$;

$f^{(iv)}(x) = 7^4 \cdot \sin(7x)$; $f^{(v)}(x) = 7^5 \cdot \cos(7x)$

$f^{(27)}(x) = -7^{27} \cdot \cos(7x)$

b) $g(x) = \cos(\pi x)$

$g'(x) = -\pi \cdot \sin(\pi x)$

$g''(x) = -\pi^2 \cdot \cos(\pi x)$

$g^{(3)}(x) = \pi^3 \cdot \sin(\pi x)$

$g^{(4)}(x) = \pi^4 \cdot \cos(\pi x)$

Da der Exponent von π immer um 1 zunimmt und sich die Funktionen $\sin(\pi x)$ bzw. $\cos(\pi x)$ nebst Vorzeichen alle vier Schritte wiederholen, ist dann $g^{(15)}(x) = \pi^{15} \sin(\pi x)$.

22 a) $f(x) = u(-3x + 2) = 2(-3x + 2) - 1 = -6x + 3$

$g(x) = v(2x - 1) = -3(2x - 1) + 2 = -6x + 5$

Ableitungen: $f'(x) = -6$, $g'(x) = -6$

Die Funktionen f und g stimmen nicht überein, ihre Ableitungen aber schon.

b) Es ist

$u(v(x)) = u(kx + l) = m(kx + l) + b = (mk)x + (ml + b)$, also eine lineare Funktion.

c) Es ist

$u(v(x)) = u(3x + a) = 9(3x + a) + 2 = 27x + 9a + 2$ und

$v(u(x)) = v(9x + 2) = 3(9x + 2) + a = 27x + 6 + a$.

Damit die beiden Verkettungen übereinstimmen, muss also $9a + 2 = 6 + a$ gelten. Dies ist für $a = 0,5$ der Fall.

23–24 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch

8 Die Ableitung der Exponentialfunktion

Seite 72

Einstiegsaufgabe

Der rote Graph ist tatsächlich eine Verschiebung des blauen Graphen um eine Einheit nach unten. Gleichzeitig hat es den Anschein, dass (zumindest im gewählten Ausschnitt) der rote Graph die Ableitungsfunktion darstellt. Verschiebung und Ableitung schließen sich aber nicht aus. Die Ableitung der Funktion g mit $g(x) = e^x + 1$ lautet $g'(x) = e^x$.

Seite 73

1 a) $f'(x) = e^x$

b) $f'(x) = 2 + e^x$

c) $f'(x) = 6x - 5e^{-x}$

d) $f'(x) = 2e^{x+1}$

2 a) $f'(x) = e^x$; $f''(x) = e^x$

b) $f'(x) = e^x + 1$; $f''(x) = e^x$

c) $f'(x) = e^x + 4x$; $f''(x) = e^x + 4$

d) $f'(x) = e^{-x+1}$; $f''(x) = -e^{-x+1}$

e) $f'(x) = 2 \cdot \ln(7) \cdot 7^x$

f) $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x - 4$

g) $f'(x) = -\ln(3) \cdot 3^{-x} + \cos(x)$

h) $f'(x) = e^x + e$

i) $f'(x) = 2e^x + 6x$; $f''(x) = 2e^x + 6$

j) $f'(x) = 5e^{-x} - 1,5x^2$; $f''(x) = -5e^{-x} - 3x$

k) $f'(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{3}{2}x^2$; $f''(x) = -\frac{1}{2}e^x + 3x$

l) $f'(x) = \frac{1}{4}e^x + \cos(x)$; $f''(x) = \frac{1}{4}e^x - \sin(x)$

3 a) $f'(x) = e^x$

$f(0) = 1$; $f'(0) = 1$

$y = f'(0) \cdot x + f(0) = x + 1$

b) $f'(x) = e^x$

$f(1) = e$; $f'(1) = e$

$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1) = e \cdot x$

c) $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$

$f(-1) = \frac{1}{2}$; $f'(-1) = \frac{1}{2} \ln(2)$

$y = f'(-1) \cdot (x + 1) + f(-1)$

$y = \frac{1}{2} \ln(2) \cdot x + \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2}$

d) $f'(x) = -0,5e^x$

$y = -\frac{e^2}{2}x + \frac{e^2}{2}$

D.h. $y \approx -3,69x + 3,69$.

e) $f'(x) = \ln(0,5) \cdot 0,5^x + 1$

$y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot x - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$

D.h. $y \approx -0,35x + 1,85$.

f) $f'(x) = 2e^x - 2x$

$y = 2(e^2 - 2)x - 2(e^2 - 2)$

D.h. $y \approx 10,78x - 10,78$.

4 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

5 $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$

a) $f(x) = 10$, d.h. $2^x = 10$ hat die Lösung $x = \ln_2(10)$

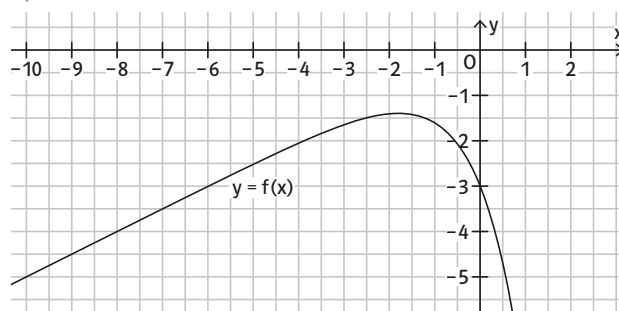
d.h. $x = \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \approx 3,32$.

b) $f'(x) = 10$, d.h. $\ln(2) \cdot 2^x = 10$ hat die Lösung

$x = \ln_2\left(\frac{10}{\ln(2)}\right) \approx 3,85$.

6 a) Asymptote: $y = \frac{1}{2}x$

b)



c) $f'(x) = -3e^x + \frac{1}{2}$

$f(0) = -3$

$f'(0) = -\frac{5}{2}$

t: $y = -\frac{5}{2}x - 3$

d) Es ist $f'(x) = -3e^x + \frac{1}{2}$. Wegen $e^x > 0$ ist $-3e^x < 0$ und folglich $f'(x) < \frac{1}{2}$. Somit gibt es kein x mit $f'(x) = 1$.

e) Aus $f'(x) = -3e^x + \frac{1}{2} = 0$ folgt $x = \ln\left(\frac{1}{6}\right) = -\ln(6)$

und damit $P\left(-\ln(6) \mid -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(6)\right)$.

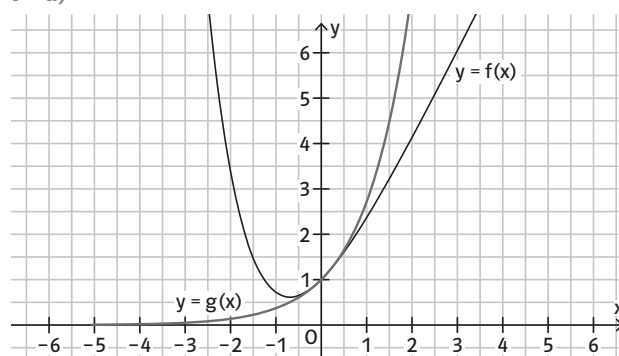
f) $f'(x) = 0$, d.h. $-3e^x + \frac{1}{2} = 0$ hat die Lösung

$x = \ln\left(\frac{1}{6}\right) \approx -1,79$;

$f\left(\ln\left(\frac{1}{6}\right)\right) \approx -1,40$

Im Punkt $B(-1,79 \mid -1,40)$ verläuft die Tangente an den Graphen von f waagrecht.

7 a)



b) $f(x) = e^{-x} + 2x$; $f'(x) = -e^{-x} + 2$

$g(x) = e^x$; $g'(x) = e^x$

Aus der Zeichnung entnimmt man als mögliche Berührstelle $x_0 = 0$.

Es ist $f(0) = 1$ und $g(0) = 1$. Es ist $f'(0) = 1$ und $g'(0) = 1$.
Folglich berühren sich die beiden Graphen an der Stelle $x_0 = 0$.

Gemeinsame Tangente: $t: y = x + 1$

Seite 74

8 a) $f(x) = e^x + 1$; $f'(x) = e^x$

$g(x) = e^x - x^2 + 2$; $g'(x) = e^x - 2x$

$f'(0) = 1$; $g'(0) = 1$; Somit sind die Tangenten in den Schnittpunkten der Graphen mit der y-Achse parallel zueinander.

b) $f(0) = 2$; $g(0) = 3$.

Der Graph der Funktion f muss um 1 in y-Richtung verschoben werden. Man erhält: $f_1(x) = e^x + 2$.

9 $f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$; $g'(x) = 2 \cdot e^x - 2x$

Gemeinsamer Punkt: $P(0|3)$

$f(0) = 3 = g(0)$

$f'(0) = 2 = g'(0)$

10 a) $f'(t) = 4800 \cdot e^t$

$f'(3) \approx 96\,411$

Nach drei Tagen beträgt die momentane Änderungsrate $96\,411 \frac{\text{Computer}}{\text{Tag}}$, d.h. würde die Ausbreitung des Virus so weitergehen, würden pro Tag 96 411 Computer neu infiziert.

b) $10 \frac{\text{Computer}}{\text{Sekunde}} = 10 \frac{1}{86\,400} \frac{\text{Computer}}{\text{Tag}} = 864\,000 \frac{\text{Computer}}{\text{Tag}}$

$f'(t) = 4800 \cdot e^t > 864\,000$ führt auf $t > \ln(180) \approx 5,1996$, also nach etwa 5 Tagen 4 Stunden 38 Minuten.

c) Die Eigenschaft $f'(t) = f(t)$ kann für die vorliegende Aufgabe wie folgt gedeutet werden: Je mehr Computer bereits infiziert sind, desto mehr Computer werden auch neu infiziert. Zu Beginn trifft dies gut zu, da von jedem infizierten Computer aus E-Mails versandt werden, die praktisch nur noch nicht befallene Computer erreichen und diese dann infizieren. Sind allerdings weltweit bereits viele Computer befallen, so wird kein exponentielles Wachstum mehr stattfinden, da die E-Mails dann in merklicher Zahl an bereits infizierte Computer gesandt werden.

11 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

12 Tangente an einen Punkt $B(u|e^u)$

$y = e^u(x - u) + e^u$

Wenn die Tangente durch $O(0|0)$ verlaufen soll, muss gelten $0 = e^u(0 - u) + e^u$, d.h. $e^u(-u + 1) = 0$, also $u = 1$.

Berührungspunkt $B(1|e)$

Tangentengleichung $y = e \cdot x$.

13 a) $f(x) = q^{2x}$

$f'(x) = 2 \cdot \ln(q) \cdot q^{2x}$

$f'(0) = 1$, also $2 \cdot \ln(q) = 1$; $\ln(q) = \frac{1}{2}$; $q = e^{\frac{1}{2}}$

b) $f(x) = q^x - q^{-x}$

$f'(x) = \ln(q) \cdot q^x + \ln(q) \cdot q^{-x}$

$f'(0) = 2$, also $\ln(q) \cdot 1 + \ln(q) \cdot 1 = 2$; $\ln(q) = 1$; $q = e$

c) $f(x) = q^x - x$

$f'(x) = \ln(q) \cdot q^x - 1$

$f'(0) = 0$, also $\ln(q) \cdot 1 - 1 = 0$; $\ln(q) = 1$; $q = e$

14 $f(x) = e^{2x} - b \cdot e^x$

a) $f(1) = 0$, d.h. $e^2 - b \cdot e = 0$

also ist $b = e$.

b) $f(0) = e^0 - b \cdot e^0 = 1 - b$

$f'(x) = 2e^{2x} - b \cdot e^x$

$f'(0) = 2e^0 - b \cdot e^0 = 2 - b$.

Aus $f'(0) = 0$ folgt $b = 2$

15 a) $f'(x) = 1 - e^x$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^x > 0$, d.h.

$-e^x < 0$. Also ist $1 - e^x < 1$, und somit verläuft der Graph von f' unterhalb der Geraden mit der Gleichung $y = 1$. Die Behauptung stimmt also.

b) $f'(x) = e^x - e^{-x}$. Die Bedingung $f'(x) = 0$ führt auf die Gleichung $e^x - e^{-x} = 0$, also $e^x = e^{-x}$ oder $e^{2x} = 1$. Diese hat die Lösung $x = 0$, also hat der Graph von f eine horizontale Tangente in $(0|2)$.

Die Behauptung ist folglich falsch.

c) $f'(x) = x + e^x$. Da für alle $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ ist, folgt $x + e^x > x$. Die Behauptung stimmt.

16 a) Beispiel $u = 2$

$f(x) = e^x$; $f'(x) = e^x$

Tangente t im Punkt $P(2|f(2))$:

$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$y = e^2(x - 2) + e^2$ bzw. $y = e^2x - e^2$

Schnittpunkt der Tangente t mit der x-Achse führt auf die Gleichung $e^2(x - 1) = 0$ mit der Lösung $x = 1$.

Der Schnittpunkt ist $N(1|0)$:

Allgemein:

Tangente t im Punkt $P(u|f(u))$:

$y = f'(u)(x - u) + f(u)$

$y = e^u(x - u) + e^u$ bzw. $y = e^u x - e^u(u - 1)$

Schnittpunkt der Tangente t mit der x-Achse führt auf die Gleichung $e^u(x - u + 1) = 0$ mit der Lösung $x = u - 1$.

Konstruktion der Tangente t an den Graphen von f : Zeichne die Gerade durch die Punkte $P(u|e^u)$ und $N(u - 1|0)$.

b) Beispiel

$f(x) = 3e^x$; $f'(x) = 3e^x$; $u = 2$

Tangente t im Punkt $P(2|f(2))$:

$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$y = 3e^2(x - 2) + 3e^2$ bzw. $y = 3e^2x - 3e^2$

Schnittpunkt der Tangente t mit der x-Achse führt auf die Gleichung $3e^2(x - 1) = 0$ mit der Lösung $x = 1$.

Der Schnittpunkt ist $N(1|0)$:

Allgemein:

$f(x) = c \cdot e^x$; $f'(x) = c \cdot e^x$

Tangente t im Punkt $P(u|f(u))$:

$y = f'(u)(x - u) + f(u)$

$y = c \cdot e^u(x - u) + c \cdot e^u$

Schnittpunkt der Tangente t mit der x-Achse führt auf die Gleichung $c \cdot e^u(x - u + 1) = 0$ mit der Lösung $x = u - 1$.

Der Schnittpunkt ist $N(u - 1|0)$:

Konstruktion der Tangente an den Graphen von f : Zeichne die Gerade durch die Punkte $P(u|c \cdot e^u)$ und $N(u - 1|0)$.

c) Allgemein:

$$f(x) = a^x; f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$$

Tangente t im Punkt $P(u | f(u))$:

$$y = f'(u)(x - u) + f(u)$$

$$y = \ln(a) \cdot a^u(x - u) + a^u$$

Schnittpunkt der Tangente t mit der x-Achse führt auf die Gleichung $a^u(\ln(a)x - \ln(a)u + 1) = 0$ mit der Lösung

$$x = u - \frac{1}{\ln(a)}. \text{ Der Schnittpunkt ist } N\left(u - \frac{1}{\ln(a)} \mid 0\right):$$

Konstruktion der Tangente an den Graphen von f:

Zeichne die Gerade durch die Punkte $P(u | a^u)$ und

$$N\left(u - \frac{1}{\ln(a)} \mid 0\right).$$

17 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch

9 Die Produktregel

Seite 75

Einstiegsaufgabe

$$f(x) = u(x) \cdot v(x); f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Seite 76

1 a) $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1 + x)e^x$

b) $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2)e^x$

c) $f'(x) = (6x^2 + 2x) \cdot e^x + (2x^3 + x^2) \cdot e^x = (2x^3 + 7x^2 + 2x) \cdot e^x$

d) $f'(x) = -2 \cdot x^{-2} \cdot e^x + 2x^{-1} \cdot e^x$

e) $f'(x) = -\frac{3}{x^2} \cdot (x^2 + 1) + \frac{3}{x} \cdot 2x = -\frac{3}{x^2} + 3$

f) $f'(x) = 3 \cdot \sqrt{x} + (3x + 2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2 a) $f'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)$

b) $f'(x) = 3 \cdot \cos(x) + 3x \cdot (-\sin(x)) = 3 \cdot \cos(x) - 3x \cdot \sin(x)$

c) $f'(x) = 4 \cdot \sqrt{x} + (4x - 2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 4 \cdot \sqrt{x} + (2x - 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = -2\sqrt{x} + (3 - 2x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos(x) + \sqrt{x} \cdot (-\sin(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos(x) - \sqrt{x} \cdot \sin(x)$

f) $f'(x) = -3 \cdot \sin(x) + (5 - 3x) \cos(x)$

g) $f'(x) = -\frac{2}{x^2} \cdot \cos(x) + \frac{2}{x} \cdot (-\sin(x)) = -\frac{2}{x^2} \cdot \cos(x) - \frac{2}{x} \cdot \sin(x)$

h) $f'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

i) $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

3 a) $f'(x) = 1 \cdot e^{3x} + x \cdot 3 \cdot e^{3x} = e^{3x}(1 + 3x)$

b) $f'(x) = 2 \cdot e^{2x} + (2x - 4) \cdot 2e^{2x} = (4x - 6) \cdot e^{2x}$

c) $f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot (3x + 2) \cdot e^x + (3x + 2)^2 \cdot e^x = (18x + 12)e^x + (3x + 2)^2 \cdot e^x = (9x^2 + 30x + 16) \cdot e^x$

d) $f'(x) = 8 \cdot e^{2x-4} + 8x \cdot 2 \cdot e^{2x-4} = (8 + 16x) \cdot e^{2x-4}$

e) $f'(x) = 2 \cdot e^{-5x+1} + (2x + 3) \cdot (-5) \cdot e^{-5x+1} = -(10x + 13) \cdot e^{-5x+1}$

f) $f'(x) = 2(x + 4) \cdot e^{-4x} + (x + 4)^2 \cdot (-4) \cdot e^{-4x} = 2(x + 4) \cdot e^{-4x} - 4(x + 4)^2 \cdot e^{-4x}$

g) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin(2x) + \sqrt{x} \cdot 2 \cdot \cos(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin(2x) + 2\sqrt{x} \cdot \cos(2x)$

h) $f'(x) = 1 \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right) + x \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{3} \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

i) $f'(x) = -\pi \cdot \sin(\pi x) \cdot e^{-2x} + \cos(\pi x) \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = -(\pi \cdot \sin(\pi x) + 2\cos(\pi x)) \cdot e^{-2x}$

4 a) Nullstellen von f: $x_1 = 1; x_2 = 3$ Gemeinsame Punkte mit der x-Achse: $N_1(1|0); N_2(3|0)$

b) $f'(x) = (x - 3)^2 + (x - 1) \cdot 2 \cdot (x - 3) = (x - 3)(3x - 5)$

$f'(1) = 4$

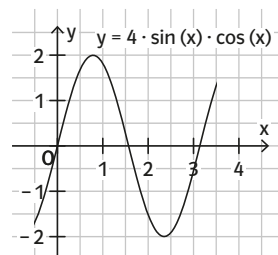
$f'(3) = 0$

c) $f'(x) = 0$, d.h. $(x - 3)(3x - 5) = 0$

Lösungen sind $x_1 = 3$ und $x_2 = \frac{5}{3}$.Die Punkte des Graphen, an denen die Tangente waagrecht ist, sind $P_1(3|0)$ und $P_2\left(\frac{5}{3} \mid \frac{32}{27}\right)$.

5 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

6 a)



b) $f'(x) = 4 \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) - 4 \cdot \sin(x) \cdot \sin(x) = 4 \cdot (\cos^2(x) - \sin^2(x))$

Tangentensteigung $m = 0$ bei $\frac{1}{4}$ Periode und $\frac{3}{4}$ Periode:

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0; f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$

Maximale Tangentensteigung $m = 4$ an den Stellen 0 und π : $f'(0) = 4; f'(\pi) = 4$

Seite 77

7 a) $f'(x) = 1 \cdot e^x + x e^x = (x + 1)e^x$

$f''(x) = 1 \cdot e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$

$f'''(x) = 1 \cdot e^x + (x + 2)e^x = (x + 3)e^x$

$f^{(IV)}(x) = (x + 4)e^x$

$f^{(V)}(x) = (x + 5)e^x$

$f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$

8 $f(x) = x^3 \cdot \cos(x)$ mit $u(x) = x^3; v(x) = \cos(x)$

$f'(x) = 3x^2 \cdot \cos(x) - x^3 \cdot \sin(x)$

a) fälschlicherweise $v'(x) = \sin(x)$ b) falsche Regel $f' = u \cdot v + u' \cdot v'$

9 Zum Beispiel:

a) $f(x) = (x + 2) \sin(x)$

b) $f(x) = 2x \cdot \sin(0,5x)$

10

	A	B	C	D	E	F	G	H
Potenzregel	x	x	x		x		x	x
Faktorregel		x		x			x	
Summenregel	x	x			x		x	x
Kettenregel		x	x		x	x	x	x
Produktregel					x	x		

11 Für f gilt: $f(0) = 1$; $f'(0) = 0$

$$g'(x) = f'(x) \cdot \cos(x) - f(x) \cdot \sin(x)$$

$$g(0) = f(0) \cdot \cos(0) = 1 \cdot 1 = 1; \quad g'(0) = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0.$$

Der Graph von g hat also ebenfalls im Punkt $P(0|1)$ eine waagerechte Tangente.

12 Bedingungen für f :

(1) $f(2) = 0$

(2) $f'(2) = 0$

$$g(x) = x \cdot f(x); \quad g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$$

Daraus folgt:

(1) $g(2) = 2 \cdot f(2) = 0$

(2) $g'(2) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$

Also: der Graph von g berührt die x -Achse in $P(2|0)$.

b) $f(x) = (x - 2)^2$; $g(x) = x \cdot (x - 2)^2$

$$f(x) = \cos(x - 2) - 1; \quad g(x) = x \cdot \cos(x - 2) - x$$

13 a) $f(x) = x^9 = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$ mit

$$u(x) = v(x) = w(x) = x^3$$

$$f'(x) = 9x^8$$

$$u'(x) = v'(x) = w'(x) = 3x^2$$

$$u'(x) \cdot v'(x) \cdot w'(x) = 27x^6 \neq f'(x)$$

b) $g'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$

$$f(x) = [x \cdot \sin(x)] \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = [x \cdot \sin(x)]' \cdot \cos(x) + x \cdot \sin(x) \cdot (-\sin(x))$$

$$= (\sin(x) + x \cdot \cos(x)) \cdot \cos(x) - x \cdot \sin^2(x)$$

$$= \sin(x) \cdot \cos(x) + x \cdot \cos^2(x) - x \cdot \sin^2(x)$$

c) $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 = (f_1 \cdot f_2) \cdot f_3$

$$f' = (f_1 \cdot f_2)' \cdot f_3 + (f_1 \cdot f_2) \cdot f_3'$$

$$= (f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2') \cdot f_3 + (f_1 \cdot f_2) \cdot f_3'$$

$$= f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3'$$

Vermutung: Für $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \dots \cdot f_n$ gilt

$$f' = f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \dots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdot \dots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3' \cdot \dots \cdot f_n$$

$$+ \dots + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \dots \cdot f_n'$$

14 $n = 2$:

$$f(x) = \cos(x)^2$$

$$f'(x) = (\cos(x) \cdot \cos(x))'$$

$$= -\sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x) \cdot (-\sin(x))$$

$$= -2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$n = 3$:

$$f(x) = \cos(x)^3$$

$$f'(x) = (\cos(x) \cdot \cos(x)^2)'$$

$$= -\sin(x) \cdot \cos(x)^2 + \cos(x) \cdot (-2 \sin(x) \cdot \cos(x))$$

$$= -3 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)^2$$

$n = 4$:

$$f(x) = \cos(x)^4$$

$$f'(x) = (\cos(x) \cdot \cos(x)^3)'$$

$$= -\sin(x) \cdot \cos(x)^3 + \cos(x) \cdot (-3 \sin(x) \cdot \cos(x)^2)$$

$$= -4 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)^3$$

Vermutung:

$$n = 5: f'(x) = -5 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)^4$$

$$n = 6: f'(x) = -6 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)^5$$

$$n = 7: f'(x) = -7 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)^6$$

Vermutlich gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{Die Ableitung von } f(x) = (\cos(x))^n$$

$$\text{ist } f'(x) = -n \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)^{n-1}.$$

b) Da in allen Ableitungen die Faktoren $\sin(x)$ und $\cos(x)$ vorkommen, haben alle Ableitungen von f an den Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ Nullstellen. Die Graphen der zugehörigen Funktionen haben somit an diesen Stellen waagerechte Tangenten.

15 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch

Exkursion: Das Newton-Verfahren

Seite 78

Einstiegsaufgabe

Da der Punkt P_1 unterhalb und der Punkt P_2 oberhalb der x -Achse liegt, schneidet die Gerade durch P_1 und P_2 die x -Achse. Die Nullstelle der Geraden durch die Punkte P_1 und P_2 ist eine gute Annäherung für die Nullstelle des Graphen der Funktion f .

Um die Nullstelle genauer zu bestimmen, rückt man die Punkte P_1 und P_2 immer näher an die Nullstelle heran, z. B. $x_1 = 0,65$ und $x_2 = 0,75$ und bestimmt erneut die Nullstelle der Geraden durch die Punkte P_1 und P_2 .

Seite 80

1 a) $f(x) = x^3 + 2x - 1$; $f'(x) = 3x^2 + 2$;

$$n(x) = x - \frac{x^3 + 2x - 1}{3x^2 + 2}$$

Startwert: 0,5

Schritt	$n(x)$
1	0,5
2	0,45454545
3	0,45339834
4	0,45339765

Näherungswert: $x^* \approx 0,4534$

b) $f(x) = x^4 + 3x - 3$; $f'(x) = 4x^3 + 3$;

$$n(x) = x - \frac{x^4 + 3x - 3}{4x^3 + 3}$$

Startwert: 1,0

Schritt	$n(x)$
1	1
2	0,8571429
3	0,8369934
4	0,8366638
5	0,8366638

Näherungswert: $x^* \approx 0,8367$

c) $f(x) = \sin(x) + x - 2$; $f'(x) = \cos(x) + 1$;

$$n(x) = x - \frac{\sin(x) + x - 2}{\cos(x) + 1}$$

Startwert: 1,5

Schritt	n(x)
1	1,5
2	1,03537153
3	1,10461802
4	1,10605952
5	1,10606016

Näherungswert: $x^* \approx 1,1061$ **2 Individuelle Lösungen.**

Für alle drei Teilaufgaben gilt: Einen Startwert für das Newton-Verfahren kann man suchen, indem man mithilfe einer Tabelle ein Intervall bestimmt, in dem die Funktion einen Vorzeichenwechsel hat.

a) $f(x) = x^3 - 3x - 1$; $f'(x) = 3x^2 - 3$;

Wertetabelle von f:

x	f(x)
-2	-3
-1	1
0	-1
1	-3
2	1
3	17

Die Funktion f hat in den Intervallen $[-2; -1]$, $[-1; 0]$ und $[1; 2]$ jeweils einen Vorzeichenwechsel und damit eine Nullstelle.

Näherungswerte: $x_1 \approx -1,532$; $x_2 \approx -0,347$; $x_3 \approx 1,879$

b) $f(x) = \sin(x) - x^2 + 1$; $f'(x) = \cos(x) - 2x$;

Wertetabelle von f:

x	f(x)
-2	-3,9092974
-1	-0,841471
0	1
1	0,84147098
2	-2,0907026
3	-7,85888

Die Funktion f hat in den Intervallen $[-1; 0]$ und $[1; 2]$ jeweils einen Vorzeichenwechsel und damit eine Nullstelle.

Näherungswerte: $x_1 \approx -0,6367$; $x_2 \approx -1,4096$

c) $f(x) = e^x + x^3 - 6x$; $f'(x) = e^x + 3x^2 - 6$;

Wertetabelle von f:

x	f(x)
-3	-8,950213
-2	4,1353353
-1	5,3678794
0	1
1	-2,281718
2	3,3890561
3	29,085537

Die Funktion f hat in den Intervallen $[-3; -2]$, $[0; 1]$ und $[1; 2]$ jeweils einen Vorzeichenwechsel und damit eine Nullstelle.

Näherungswerte: $x_1 \approx -2,4566$; $x_2 \approx 0,2063$; $x_3 \approx 1,6765$ **3 Individuelle Lösungen.**

Mögliche Strategie: Man fasst die linke Seite der Gleichung als Term einer Funktion auf, von der Nullstellen gesucht werden.

Mögliche Startwerte kann man wie in Aufgabe 2 mithilfe von Intervallen ermitteln, in denen die Funktion einen Vorzeichenwechsel hat.

Iterationsfunktion ist $n(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x + 4$; $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1$

x	f(x)
-3	-14,75
-2	-4
-1	1,75
0	4
1	4,25
2	4
3	4,75

Die Funktion f hat in dem Intervall $[-2; -1]$ einen Vorzeichenwechsel und damit eine Nullstelle.

Näherungswerte: $x_0 \approx -1,3912$

b) $f(x) = \cos(x) + x - 2$; $f'(x) = -\sin(x) + 1$

Wertetabelle von f:

x	f(x)
-1	-2,46
0	-1
1	-0,46
2	-0,416
3	0,01
4	1,346
5	3,284

Die Funktion f hat in dem Intervall $[2; 3]$ einen Vorzeichenwechsel und damit eine Nullstelle.

Näherungswerte: $x_0 \approx 2,9883$

c) $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} - 4x^3 + 2$; $f'(x) = -e^{-2x} - 12x^2$

Wertetabelle von f:

x	f(x)
-2	61,3
-1	9,69
0	2,5
1	-1,93
2	-29,99

Die Funktion f hat in dem Intervall $[0; 1]$ einen Vorzeichenwechsel und damit eine Nullstelle.

Näherungswerte: $x_0 \approx 0,8067$ **4 Individuelle Lösungen.**

Mögliche Strategie:

Die Gleichung $f(x) = g(x)$ ist äquivalent zu der Gleichung $f(x) - g(x) = 0$. Man fasst nun die linke Seite dieser Gleichung als Term einer Funktion h auf, von der Nullstellen gesucht werden.

Mögliche Startwerte kann man wie in Aufgabe 2 mithilfe von Intervallen ermitteln, in denen die Funktion einen Vorzeichenwechsel hat.

Iterationsfunktion ist $n(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)}$

a) $h(x) = -e^x + 4 - \frac{1}{2}x^2 - x$; $h'(x) = -e^x - x - 1$

Wertetabelle von h:

x	h(x)
-4	-0,018
-3	2,45
-2	3,865
-1	4,132
0	3
1	-0,218
2	-7,389

Die Funktion h hat in den Intervallen $[-4; -3]$ und $[0; 1]$ jeweils einen Vorzeichenwechsel und damit eine Nullstelle.

Näherungswerte für die Stellen, an denen sich die Graphen f und g schneiden, sind $x_1 \approx -3,994$ und $x_2 \approx 0,953$.

b) $h(x) = x^2 + x + 1 + 4 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$;

$h'(x) = 2x + 1 + 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

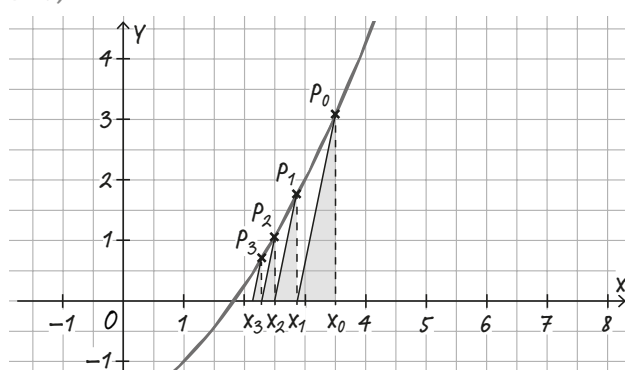
Wertetabelle von h:

x	h(x)
-4	9,363
-3	3,01
-2	-0,366
-1	-0,918
0	1
1	4,918
2	10,37

Die Funktion h hat in den Intervallen $[-3; -2]$ und $[-1; 0]$ jeweils einen Vorzeichenwechsel und damit eine Nullstelle.

Näherungswerte für die Stellen, an denen sich die Graphen f und g schneiden, sind $x_1 \approx -2,169$ und $x_2 \approx -0,384$.

5 a)



b) Individuelle Lösungen, z.B.:

$f(x) = \frac{1}{12}x^3 - 1$; $f'(x) = \frac{1}{4}x^2$

x	f(x)
0	-1
1	-0,917
2	-0,333
3	1,25
4	4,333

Die Funktion f hat in dem Intervall $[2; 3]$ einen Vorzeichenwechsel und damit eine Nullstelle.

Startwert: z.B. 3

Wert für die Steigung m z.B. $f'(3) = \frac{9}{4}$

Iterationsfunktion $n(x) = x - \frac{\frac{1}{12}x^3 - 1}{\frac{9}{4}}$

Schritt	n(x)
1	3
2	2,44444
3	2,34791
4	2,31298
5	2,29912
6	2,29345
7	2,2911
8	2,29013
9	2,28972
10	2,28955
11	2,28948
12	2,28945
13	2,28944
14	2,28943
15	2,28943

Näherungswert: $x^* \approx 2,2894$

6 a) $f(x) = x^2 - 2$; $f'(x) = 2x$

$n(x) = x - \frac{x^2 - 2}{2x}$

Startwert z.B. 2

Schritt	n(x)
1	2
2	1,5
3	1,41667
4	1,41422
5	1,41421
6	1,41421

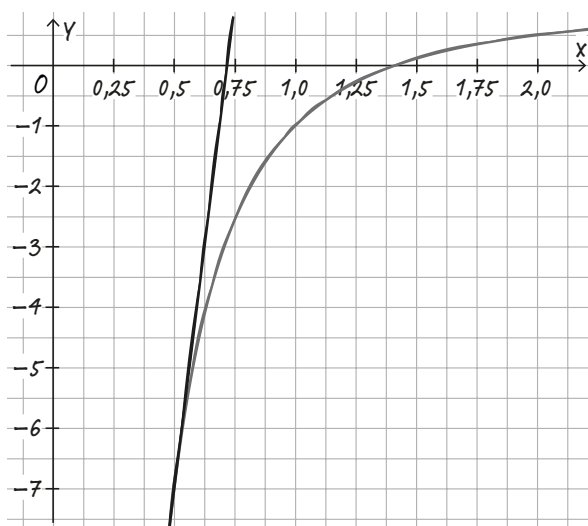
Der Näherungswert für $\sqrt{2}$ ist 1,4142.

b) $g(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$; $g'(x) = \frac{2a}{x^3}$

Eignung der Funktion g zur Berechnung von $\sqrt{a}$:

Zum einen gilt $g(\sqrt{a}) = 0$.

Dass sich mit dem Newton-Verfahren eine Zahlenfolge ergibt, die sich $\sqrt{a}$ nähert, lässt sich exemplarisch am Beispiel $a = 2$ veranschaulichen. Mit einem Startwert zwischen 0 und $\sqrt{a}$, hier 0,5, bekommt man einen verbesserten Näherungswert.



Startwert: $x = 0,5$

Schritt	$n(x)$
1	0,5
2	0,71875
3	0,985298157
4	1,238812304
5	1,382930796
6	1,413183242
7	1,414212437
8	1,414213562
9	1,414213562

Der Näherungswert für $\sqrt{2}$ ist 1,4142.

c) $f(x) = x^3 - a$; $f'(x) = 3x^2$

$$n(x) = x - \frac{x^3 - a}{3x^2}$$

Individuelle Lösungen, z.B. für $a = 2$

Startwert: $x = 2$

Schritt	$n(x)$
1	2
2	1,5
3	1,2963
4	1,26093
5	1,25992
6	1,25992

Der Näherungswert für $\sqrt[3]{2}$ ist 1,2599.

7 $f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$

a) Der Nachweis, dass 1; 3 und 4 Nullstellen von f sind, erfolgt durch Einsetzen.

b) $f'(x) = 3x^2 - 16x + 19$

$$n(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

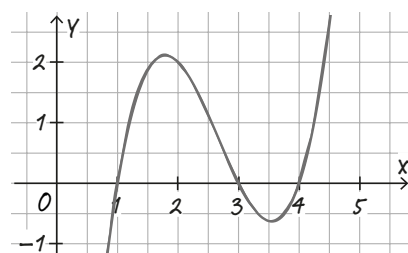
Suche nach einem möglichst großen Intervall:

Individuelle Lösungen, z.B.:

Übersicht durch Skizzieren eines Graphen der Funktion.

Mögliche Intervallgrenzen liegen zwischen den beiden Extremwerten $x_1 = \frac{1}{3}(8 - \sqrt{7}) = 1,784\dots$ und

$$x_2 = \frac{1}{3}(8 + \sqrt{7}) = 3,548\dots$$



c) Fehler im 1. Druck der 1. Auflage: Es muss $x > 3$ heißen.

Individuelle Lösungen, z.B.: Bei folgenden Startwerten streben die Näherungswerte gegen 1:

z.B. Startwert $x = 3,5$; $n(3,5) = 1$ (vgl. S. 53, Aufgabe 38)

z.B. Startwert $x = 3,51$; $n(3,51) = 0,369\dots$

z.B. Startwert $x = 3,52$; $n(3,52) = -0,707\dots$

z.B. Startwert $x = 3,545$; $n(3,545) = -29,8\dots$

z.B. Startwert $x = 3,548583$;

$n(3,548583) = -154\,824,408\dots$

Jedoch bei z.B. dem Startwert $x = 3,55$ mit $n(3,55) = 87,7$ streben die Näherungswerte gegen 4.

Training

Seite 81

1 a) Euro (€) in Dollar (\$):

$$f(x) = 0,84x; \quad x \text{ in } \$; \quad f(x) \text{ in } €$$

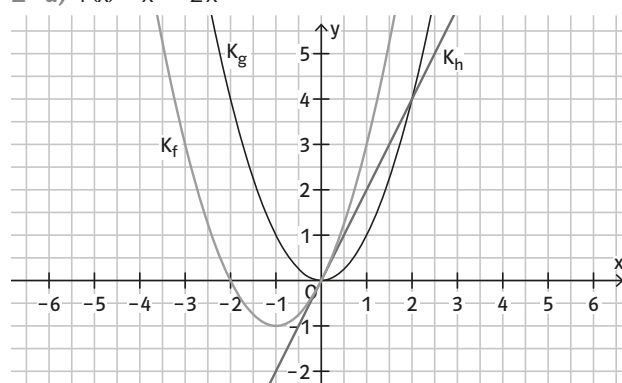
Euro (€) in Schweizer Franken (SFr):

$$g(x) = 1,07x; \quad x \text{ in } €; \quad g(x) \text{ in SFr}$$

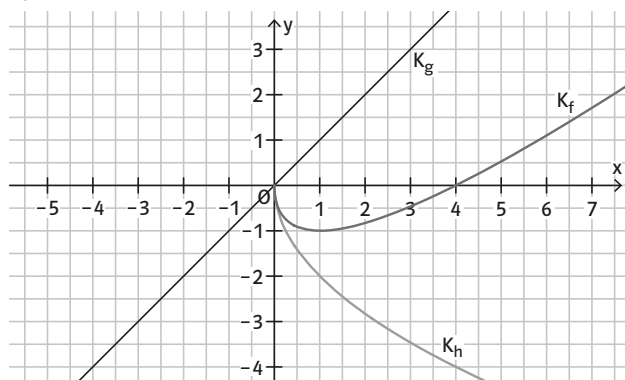
b) $h(x) = g(f(x)) = 1,07 \cdot 0,84x = 0,8988x$

x in \$; $h(x)$ in SFr

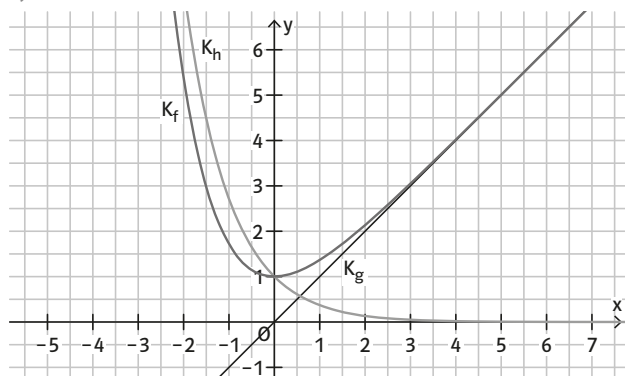
2 a) $f(x) = x^2 + 2x$



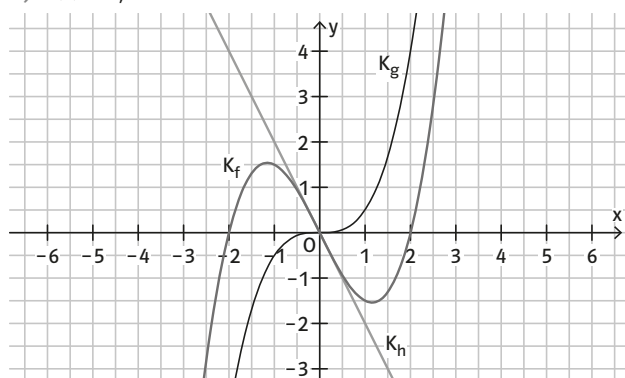
b) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$



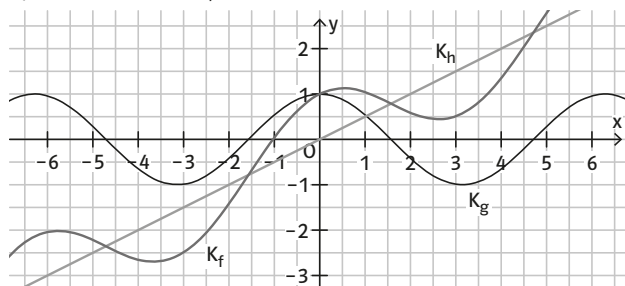
c) $f(x) = x + e^{-x}$



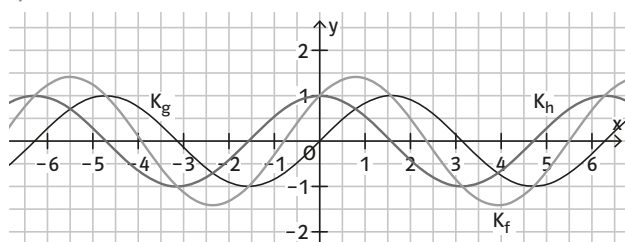
d) $f(x) = 0,5x^3 - 2x$



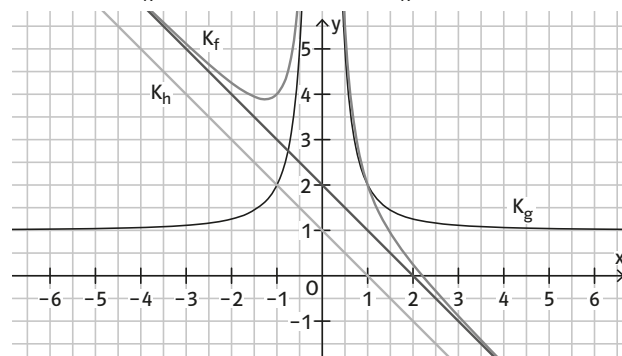
e) $f(x) = \cos(x) + 0,5x$



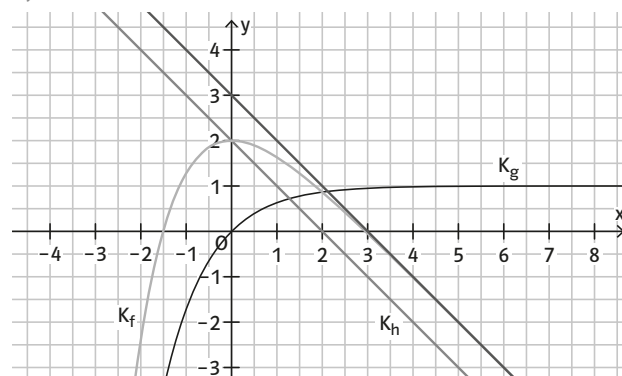
f) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$



3 a) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1 + (-x + 1)$ $f(x) = \frac{1}{x^2} - x + 2$

Asymptote: $y = -x + 2$

b) $f(x) = -e^{-x} + 1 + (-x + 2)$ $f(x) = -e^{-x} - x + 3$

Asymptote: $y = -x + 3$

4 a) $f'(x) = 4x^3 + 2x$

b) $f'(x) = 14x - 1$

c) $f'(x) = 5x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 1$

d) $f'(x) = 12x^2 + 12x + 1$

5 a) $f'(x) = -3x^{-2}$; $f'(1) = -3$

b) $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$; $f'(1) = -2$

c) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 2x$; $f'(1) = -\frac{1}{2}$

d) $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6x - \frac{2}{x^3}$; $f'(1) = -\frac{13}{2}$

6 a) $f'(x) = 18x - 6$

b) $f'(t) = -2\pi \cdot \sin(\pi t + 2)$

c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x - 2) + 3\sqrt{x}$

d) $f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}$

e) $f'(t) = \sin(t) + (t+1)\cos(t)$

f) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

7 a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}(2x+1)^4 + \frac{8}{x}(2x+1)^3$

b) $f'(x) = \sqrt{3x-2} + \frac{3x}{2\sqrt{3x-2}}$

c) $f'(x) = \cos(2x) - 2x \cdot \sin(2x)$

d) $f'(x) = 4 \sin(x) + (4x-3)\cos(x)$

e) $f'(x) = 2e^{-x} - (2x+1) \cdot e^{-x}$

f) $f'(x) = \pi \cdot \cos(\pi x) \cdot e^x + \sin(\pi x) \cdot e^x$
 $= (\pi \cdot \cos(\pi x) + \sin(\pi x)) \cdot e^x$

- 8 a) $f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$; $f''(x) = 4 \cdot e^{2x}$
 b) $f'(x) = 3\pi \cdot \cos(\pi x + 2)$; $f''(x) = -3\pi^2 \sin(\pi x + 2)$
 c) $f'(x) = 1 \cdot e^{3x} + x \cdot 3 \cdot e^{3x} = (1 + 3x) \cdot e^{3x}$
 $f''(x) = 3 \cdot e^{3x} + (1 + 3x) \cdot 3 \cdot e^{3x} = (6 + 9x) \cdot e^{3x}$
 d) $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x + 3$; $f''(x) = \ln(2)^2 \cdot 2^x$
 e) $f'(u) = -3 \ln(5) \cdot 5^{-u}$; $f''(x) = 3 \ln(5)^2 \cdot 5^{-u}$
 f) $f'(x) = 1 \cdot \cos(x+1) \cdot e^{0,5x} + \sin(x+1) \cdot 0,5 \cdot e^{0,5x}$
 $= (\cos(x+1) + 0,5 \cdot \sin(x+1)) \cdot e^{0,5x}$
 $f''(x) = (-\sin(x+1) + 0,5 \cdot \cos(x+1)) \cdot e^{0,5x}$
 $+ (\cos(x+1) + 0,5 \cdot \sin(x+1)) \cdot 0,5 \cdot e^{0,5x}$
 $= (\cos(x+1) - 0,75 \cdot \sin(x+1)) \cdot e^{0,5x}$

- 9 $f'(x) = e^{0,5x+1}$
 a) $f'(x) = 1$ für $x = -2$; Im Punkt $P(-2|1)$ hat der Graph die Steigung 1.
 b) $f'(x) = e$ für $x = 0$;
 Im Punkt $P(0|2e-1)$ hat der Graph die Steigung e .
 c) $f'(x) = 2$ für $x = 2 \ln(2) - 2$;
 Im Punkt $P(2 \ln(2) - 2|3)$ hat der Graph die Steigung 2.

- 10 a) Wahr; denn es gilt $f'(x) > 0$, für $-1 \leq x \leq 1$; also ist die Steigung des Graphen von f positiv.
 b) Falsch. Für $2 \leq x < 2,5$ ist $f'(x) > 0$ und für $x = 2,5$ ist die Ableitung gleich null. Also ist die Steigung des Graphen von f zwischen 2 und 2,5 nicht-negativ.
 c) Wahr. Es gilt $f'(-2,5) = f'(-1,5) = f'(2,5) = 0$. Damit ist die Steigung des Graphen von f für $x = -2,5$; für $x = -1,5$ und für $x = 2,5$ gleich groß.
 d) Falsch. An diesen Stellen sind die Steigungen von f' gleich 0 und damit gleich groß; nicht aber die Steigungen von f .
 e) Wahr. Die Steigung von f ist im Intervall $]-1,5; 2,5[$ überall positiv, daher ist auch die mittlere Steigung im Intervall $[-1; 2]$ positiv.
 f) Weitere Aussagen über die Steigung des Graphen von f sind denkbar:
 – Die Steigung des Graphen von f ist an der Stelle $-1,5$ null.
 – Die Steigung des Graphen von f ist an der Stelle 0 ca. 0,6.

Seite 82

- 11 a) $f_1(x) = e^{-x} + x + 2$; $f_2(x) = 2e^{-3x} + x + 2$
 b) $f_1(x) = e^x + x + 2$; $f_2(x) = 2e^{3x} + x + 2$
 c) $f_1(x) = \frac{1}{x} + x + 2$; $f_2(x) = \frac{1}{x^2} + x + 2$

- 12 a) Die Produktregel wurde nicht angewendet.
 Richtig: $f'(x) = 2e^x + (2x - 8)e^x = (2x - 6)e^x$
 b) Die Kettenregel bei der Ableitung von $\sin(3x - 1)$ wurde nicht angewendet.
 Richtig: $h'(x) = 2x \sin(3x - 1) + 3x^2 \cos(3x - 1)$
 c) Die Ableitung muss eine Potenz vierten Grades enthalten, da $k(x)$ ein Polynom fünften Grades ist.

13 Für alle Teilaufgaben gilt: Die Funktion f ist das Produkt zweier Funktionen g und h .

- a) $g(x) = \sqrt{x}$; $h(x) = x + 2$
 $D_g = \mathbb{R}_+$; $D_h = \mathbb{R}$; $D_f = \mathbb{R}_+$
 Die Nullstelle der Funktion g ist $x_1 = 0$. Die Nullstelle der Funktion h ist $x_2 = -2$. Da $x_2 \notin D_f$ ist $x_1 = 0$ die Nullstelle von f .
 b) $g(x) = e^{x-3}$; $h(x) = \sqrt{x-2}$
 $D_g = \mathbb{R}$; $D_h = [2; \infty[$; $D_f = [2; \infty[$
 Die Funktion g hat keine Nullstelle; die Nullstelle der Funktion h ist $x_1 = 2$. Also ist $x_1 = 2$ Nullstelle der Funktion f .
 c) $g(x) = \sqrt{x+3}$; $h(x) = x^2 - 9$
 $D_g = [-3; \infty[$; $D_h = \mathbb{R}$; $D_f = [-3; \infty[$
 Die Nullstelle der Funktion g ist $x_1 = -3$. Die Nullstellen der Funktion h sind $x_1 = -3$; $x_2 = 3$.
 Also sind $x_1 = -3$ und $x_2 = 3$ die Nullstellen der Funktion f .

- 14 a) $\frac{A(4) - A(0)}{4 - 0} = \frac{5,536}{4} = 1,384$; also mittlere Änderungsrate $1,384 \frac{\text{cm}^2}{\text{h}}$

- b) $A'(t) = -0,003t^2 + 0,2t + 1$; $A'(6,5) \approx 2,17 \frac{\text{cm}^2}{\text{h}}$
 c) $270 \frac{\text{mm}^2}{\text{h}} = 2,7 \frac{\text{cm}^2}{\text{h}}$; $-0,003t^2 + 0,2t + 1 = 2,7$ für
 $t_{1,2} = \frac{-0,2 \pm 0,14}{-0,006}$

Zu den Zeitpunkten $t_1 = 10 \text{ h}$ und $t_2 = 56 \text{ h } 40 \text{ min}$ ist die Wachstumsgeschwindigkeit $270 \frac{\text{mm}^2}{\text{h}}$.

- 15 a) $\frac{12}{t} - 10 = 0$ für $t = \frac{6}{5} \text{ h} = 1 \text{ h } 12 \text{ min}$. Nach 1 h 12 min sinkt die Temperatur unter 0°C .
 b) $T'(t) = -\frac{12}{t^2}$; $T'(20) = -0,03 \frac{^\circ \text{C}}{\text{h}}$
 c) $T'(t) = -\frac{12}{t^2}$ ist für alle t negativ. Also ist die Steigung des Graphen von T negativ, die Temperatur sinkt also ständig.
 d) Tangente an den Graphen von T an der Stelle $t = 24$:
 $y = -\frac{1}{48}(t - 24) - 9,5 = -\frac{1}{48}t - 9$ (lineare Abnahme).
 Es gilt $y = -10$ für $t = 48$. Nach 48 Stunden wird die Temperatur -10°C erreicht.

- 16 a) $f'(x) = 3x^2 - 1$; $f'(1) = 2$; $f(1) = 0$
 $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$
 $t: y = 2x - 2$
 b) $f'(x) = 2 \sin(2x)$; $f'(\frac{\pi}{4}) = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2})$; $f(\frac{\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = 0$
 $y = f'(\frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) + f(\frac{\pi}{4})$
 $t: y = 2x - \frac{\pi}{2}$
 b) $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$; $f'(-1) = 2e$;
 $f(-1) = -e$
 $t: y = 2ex + e$

- 17 $f(x) = e^{-x} + e \cdot x$; $f'(x) = -e^{-x} + e$
 $f(-1) = e^1 + e \cdot (-1) = 0$; $f'(-1) = -e^1 + e = 0$
 Tangente: $y = f'(-1) \cdot (x - 1) + f(-1) = 0$

18 Fehler in der 1. Auflage des Schulbuchs:

In Teilaufgabe a) muss es zweimal e^{2x} heißen.

Man kann sich an dem für die Produktregel typischen Aufbau orientieren. Mögliche Funktionen:

a) $f(x) = e^{2x} e^{2x}$

b) $f(x) = 2x \cos(x)$

c) $f(x) = \sin(\pi x) e^x$

d) $f(x) = x(x^2 + 1)^3$

19 a) $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$

Die Gleichung $f'(x) = m$, d.h. $3x^2 = m$ ist nur für $m \geq 0$ lösbar. Somit gibt es nur für Geraden mit einer nichtnegativen Steigung eine parallele Tangente an den Graphen von f .

Entsprechendes gilt für f mit $f(x) = x^5$, da die 1. Ableitung auch einen geraden Grad hat.

b) Verallgemeinerung: Ist f mit $f(x) = x^n$ eine Potenzfunktion von ungeradem Grad n , dann haben Geraden mit der Gleichung $y = mx + b$ nur dann eine parallele Tangente an den Graphen von f , wenn $m \geq 0$ ist.

20 a) $f(x) = (g(x))^2 = g(x) \cdot g(x)$

$$f'(x) = (g(x) \cdot g(x))'$$

$$= g'(x) \cdot g(x) + g(x) \cdot g'(x)$$

$$= 2 \cdot g'(x) \cdot g(x)$$

b) $n = 3$

$$f(x) = (g(x))^3 = g(x) \cdot (g(x))^2$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot (g(x))^2 + g(x) \cdot 2 \cdot g'(x) \cdot g(x)$$

$$= 3 \cdot g'(x) \cdot (g(x))^2$$

$n = 4$

$$f(x) = (g(x))^4 = g(x) \cdot (g(x))^3$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot (g(x))^3 + g(x) \cdot 3 \cdot g'(x) \cdot (g(x))^2$$

$$= 4 \cdot g'(x) \cdot (g(x))^3$$

Die Vermutung liegt nahe, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}^*$ gilt:

Die Ableitung von $f(x) = (g(x))^n$ ist $f'(x) = n \cdot g'(x) \cdot (g(x))^{n-1}$.

Prüfungsvorbereitung

Seite 84 und 85

Die Lösungen zur Prüfungsvorbereitung finden Sie am Ende vom Schulbuch.

III Extremstellen und Wendestellen

Seite 88 und 89

Die Lösungen zum Check-in finden Sie am Ende vom Schulbuch.

1 Bedeutung der ersten Ableitung – Monotonie

Seite 90

Einstiegsaufgabe

Nach ca. 23,5 km wurde eine erste maximale Höhe von ca. 930 m erreicht, dann ging es bergab bis zu einem tiefsten Punkt nach etwa 27 km mit einer Meereshöhe von 790 m. Die nächste höchste Stelle wurde nach 33 km mit 957 m erreicht; sie war auch insgesamt der absolut höchste Punkt. Die in diesem Diagramm tiefste Stelle wurde nach ca. 39 km erreicht mit etwa 785 m Meereshöhe.

Seite 91

1 a)

Intervall	Graph der Ableitung f'	Graph der Funktion f
$x < -0,5$	... verläuft unterhalb der x-Achse	... fällt streng monoton
$x \in]-0,5; 1,5[$	... verläuft oberhalb der x-Achse	... wächst streng monoton
$x \in]1,5; 3,5[$	... verläuft unterhalb der x-Achse	... fällt streng monoton
$x > 3,5$	... verläuft oberhalb der x-Achse	... wächst streng monoton

b)

Intervall	Graph der Ableitung f'	Graph der Funktion f
$x < -2$	... verläuft oberhalb der x-Achse	... wächst streng monoton
$x \in]-2; 0[$	... verläuft unterhalb der x-Achse	... fällt streng monoton
$x \in]0; 3[$	... verläuft oberhalb der x-Achse	... wächst streng monoton
$x > 3$	... verläuft oberhalb der x-Achse	... wächst streng monoton

c) Für $x < 2$ wächst die Funktion f streng monoton, denn der Graph der Ableitung f' liegt über der x-Achse, für $x > 2$ fällt die Funktion f streng monoton, weil der Graph der Ableitung f' unter der x-Achse verläuft.

2 a) $f'(x) = 3 > 0$, damit ist die Funktion f auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

b) $f'(x) = -2x$, damit ist die Funktion f auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton fallend und auf $\mathbb{R}^-$ streng monoton wachsend.

c) Die Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 3x = 3x(x - 1)$ hat die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$; der Graph der Funktion ist eine nach oben offene Parabel. Daher ist die Funktion f für $x < 0$ und für $x > 1$ streng monoton wachsend und im Bereich $]0; 1[$ streng monoton fallend.

d) Die Ableitung $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ hat die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$, der Graph der Funktion ist eine nach oben offene Parabel. Daher ist die Funktion f für $x < -1$

und für $x > 3$ streng monoton wachsend und im Bereich $] -1; 3[$ streng monoton fallend.

e) Die Ableitung $f'(x) = e^{-x}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ positiv, daher ist die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

f) Die Ableitung $f'(x) = 1 + 2e^{-2x}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ positiv, daher ist die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

g) Die Ableitung $f'(x) = \cos(x)$ ist im Intervall $]0; \frac{\pi}{2}[$ und im Intervall $]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$ positiv, daher wächst die Funktion f in diesen Bereichen streng monoton. Im Intervall $]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$ hat die Kosinusfunktion negative Funktionswerte, daher fällt die Funktion f in diesem Intervall.

h) Die Ableitung $f'(x) = -\sin(x)$ hat im Intervall $]0; \pi[$ negative Funktionswerte, daher fällt die Funktion f dort streng monoton.

i) Die Ableitung $f'(x) = -2,1 - 2\sin(2x)$ hat auf $\mathbb{R}$ negative Funktionswerte, daher fällt die Funktion f streng monoton.

3 a) Die Ableitung $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 1$ hat auf $\mathbb{R}$ nur positive Funktionswerte, folglich wächst die Funktion f auf $\mathbb{R}$ streng monoton.

b) Die Ableitung $f'(x) = 2 + \cos(x)$ hat auf $\mathbb{R}$ nur positive Funktionswerte, folglich wächst die Funktion f auf $\mathbb{R}$ streng monoton.

c) Die Ableitung $f'(x) = 1 + e^x$ hat auf $\mathbb{R}$ nur positive Funktionswerte, folglich wächst die Funktion f auf $\mathbb{R}$ streng monoton.

4 a) $f'(x) = -2$ hat auf $\mathbb{R}$ überall den Wert -2 , ist also negativ; folglich fällt die Funktion f auf $\mathbb{R}$ streng monoton.

b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ hat auf dem angegebenen Intervall I nur negative Werte, folglich ist die Funktion f auf I streng monoton fallend.

c) $f'(x) = -\frac{1}{x}$ hat auf dem angegebenen Intervall I nur negative Werte, folglich ist die Funktion f auf I streng monoton fallend.

Seite 92

5 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

6 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

7 a) $f'(x) = 4 + 2x$ hat die Nullstelle $x = -2$. Für $x < -2$ ist $f'(x) < 0$, daher ist f für $x < -2$, also im Intervall $] -\infty; -2[$ streng monoton fallend. Für $x > -2$ ist $f'(x) > 0$, daher ist f für $x > -2$, also im Intervall $] -2; \infty[$ streng monoton wachsend.

b) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ hat die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$

Für $x < 0$, also im Intervall $] -\infty; 0[$, und für $x > 2$, also im Intervall $]2; \infty[$ ist $f'(x) > 0$, daher ist f dort streng monoton wachsend. Im Intervall $]0; 2[$ ist $f'(x) < 0$, daher ist f dort streng monoton fallend.

- c) $f'(x) = 1,5 + \cos(x) > 0$ für alle reellen Werte von x .
Daher ist f auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.
- d) $f'(x) = (x+1) \cdot e^x$ hat eine Nullstelle bei $x = -1$. Für $x < -1$ ist $(x+1)$ negativ. Da $e^x > 0$ ist für alle reellen Werte von x , sind in diesem Bereich auch die Werte der Ableitungsfunktion negativ, also ist f im Intervall $]-\infty; -1[$ streng monoton fallend. Für $x > -1$ sind beide Faktoren positiv und damit auch die Werte der Ableitung. Die Funktion f ist für $x > -1$, also im Intervall $]-1; \infty[$, streng monoton wachsend.
- e) $f'(x) = (x+6) \cdot e^x$ hat eine Nullstelle bei $x = -6$. Für $x < -6$ ist $(x+6)$ negativ. Da e^x ist für alle reellen Werte von x größer null ist, sind in diesem Bereich auch die Werte der Ableitungsfunktion negativ, f ist somit im Intervall $]-\infty; -6[$ streng monoton fallend. Für $x > -6$ sind beide Faktoren positiv und damit auch die Werte der Ableitung. Die Funktion f ist für $x > -6$, also im Intervall $]-6; \infty[$, streng monoton wachsend.
- f) $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}_+$ positiv. Daher ist f auf $\mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend.

8 Aussage A: Eine lineare Funktion hat eine konstante Funktion als Ableitung. Diese hat keine Nullstellen, daher ist die Ableitung entweder nur positiv oder nur negativ. Daher hat die Funktion f immer dasselbe Monotonieverhalten in diesem Bereich.

Aussage B: Die Ableitung einer quadratischen Funktion ist linear. Diese hat auch immer eine Nullstelle, an der sich das Vorzeichen ändert. Die Nullstelle begrenzt die beiden Monotonie-Intervalle.

Aussage C: Beim Verschieben des Graphen in negativer y -Richtung wird zum zugehörigen Funktionsterm eine konstante Zahl addiert. Diese Zahl fällt beim Ableiten weg. Damit hat die Funktion des verschobenen Graphen dasselbe Monotonieverhalten, wie die Funktion f selbst.

9 a) Gegenbeispiel: $f(x) = x^2 + 4x$; f hat die Ableitung f' mit $f'(x) = 2x + 4$. Die Ableitung f' ist überall streng monoton wachsend und hat die Nullstelle $x = -2$. Dort wechselt die Ableitung f' das Vorzeichen von $-$ nach $+$. Somit hat die Funktion f einen monoton fallenden Bereich $]-\infty; -2[$ und einen monoton wachsenden Bereich $]2; \infty[$. Die Aussage ist also falsch.

b) Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$; f ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Ihr Ableitungsfunktion f' hat den Funktionsterm $f'(x) = 3x^2$; der Graph der Ableitung ist eine gestreckte Parabel, die bis zum Scheitelpunkt in $x = 0$ streng fällt und anschließend streng monoton wächst.

10 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

11 $f'(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 = x^3 \cdot (x - \frac{1}{3})$. Der Graph der Ableitung verläuft vom II. zum I. Quadranten (über den IV. Quadranten. Was erst bei einer sehr starken feinen Einteilung der x -Achse sichtbar ist.).

Im Ursprung $O(0|0)$ befindet sich eine dreifache Nullstelle, d.h. der Graph hat einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$. Da bei $x = \frac{1}{3}$ auch eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel liegt, hat die Ableitung nur im Bereich $]0; \frac{1}{3}[$ negative Werte. Dies hat zur Folge, dass der Graph der

Funktion f im Intervall $]0; \frac{1}{3}[$ streng monoton fällt.

Hinweis: Dies kann man jedoch mit bloßem Auge nicht sehen.

12 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

2 Bedeutung der zweiten Ableitung – Krümmung

Seite 93

Einstiegsaufgabe

Hier gibt es individuelle Lösungen.

Die Beschreibung sollte beinhalten, dass beide Umsatzkurven monoton wachsend sind. Die Umsatzkurve der Region A ist eine Rechtskurve, die Umsatzsteigerung nimmt ab; die Kurve der Region B ist eine Linkskurve, die Umsatzsteigerung nimmt zu. Man kann auf dieser Basis für Region A ein schwächeres und für Region B ein stärkeres Umsatzwachstum als bisher vorhersagen.

Seite 94

1 a) $f'(x) = -2x + 2$; $f''(x) = -2 < 0$.

Der Graph der Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ rechtsgekrümmt.

b) $f'(x) = -3x^2 + 6x$; $f''(x) = -6x + 6$

Für $x > 1$ ist $f''(x) < 0$, d.h. in diesem Bereich ist der Graph der Funktion f rechtsgekrümmt.

Für $x < 1$ ist $f''(x) > 0$, d.h. in diesem Bereich ist der Graph der Funktion f linksgekrümmt.

c) $f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x$; $f''(x) = 4x^2 - 4$ hat die Nullstellen $x_1 = +1$ und $x_2 = -1$.

Im Intervall $]-1; 1[$ ist $f''(x) < 0$, der Graph der Funktion f ist in diesem Bereich rechtsgekrümmt; außerhalb dieses Intervalls ist der Graph linksgekrümmt.

d) $f'(x) = e^x$; $f''(x) = e^x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ positiv. Der Graph der Funktion f ist nur linksgekrümmt.

e) $f'(t) = -3 \cdot (2-t)^2 - 6t$; $f''(t) = 6 \cdot (2-t) - 6 = 6 - 6t$ hat die Nullstelle $t = 1$.

Für $t < 1$ ist $f''(t) > 0$, d.h. in diesem Bereich ist der Graph der Funktion f linksgekrümmt.

Für $t > 1$ ist $f''(t) < 0$, d.h. in diesem Bereich ist der Graph der Funktion f rechtsgekrümmt.

f) $f'(t) = 12 \cdot (3t-6)^3 + 3$; $f''(t) = 108 \cdot (3t-6)^2 > 0$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Der Graph der Funktion f ist in beiden Intervallen $]-\infty; 2[$ und $]2; \infty[$ linksgekrümmt.

2 a) $f'(x) = 2 + e^x$; $f''(x) = e^x > 0$.

Der Graph der Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ linksgekrümmt.

b) $f'(x) = 2x + e^{-x}$;

Die zweite Ableitung

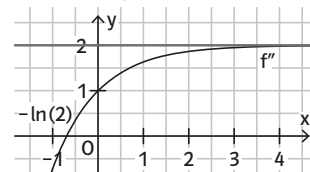
$f''(x) = 2 - e^{-x}$ hat eine Nullstelle bei $x_0 = -\ln(2)$.

Der Graph der zweiten Ableitung f'' liegt unter-

halb der „rechtsseitigen“ Asymptote $y = 2$.

Für $x < -\ln(2)$ ist $f''(x) < 0$, d.h. der Graph der Funktion f ist in diesem Bereich rechtsgekrümmt.

Für $x > -\ln(2)$ ist $f''(x) > 0$, d.h. der Graph der Funktion f ist in diesem Bereich linksgekrümmt.



c) $f'(t) = 2 - 2e^{2t}$; $f''(t) = -4e^{2t} < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion f ist überall rechtsgekrümmt.

d) $f'(x) = -2e^{-2x} + 2x$; $f''(x) = 4e^{-2x} + 2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion f ist überall linksgekrümmt.

e) $f'(x) = 6x + 3e^{-3x}$;
 $f''(x) = 6 - 9e^{-3x}$ hat eine Nullstelle bei

$$-\frac{1}{3} \ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0,135.$$

Der Graph der zweiten Ableitung f'' liegt unterhalb der „rechtsseitigen“ Asymptote $y = 6$.

Für $x < 0,135$ ist $f''(x) < 0$, d.h. der Graph der Funktion f ist in diesem Bereich rechtsgekrümmt.

Für $x > 0,135$ ist $f''(x) > 0$, d.h. der Graph der Funktion f ist in diesem Bereich linksgekrümmt.

f) $f'(t) = t + e^{-t}$;
 Der Graph der zweiten Ableitung $f''(t) = 1 - e^{-t}$ hat eine Nullstelle bei $t = 0$.

Der Graph der zweiten Ableitung f'' liegt unterhalb der rechtsseitigen Asymptote $y = 1$.

Für $t < 0$ ist $f''(t) < 0$, d.h. der Graph der Funktion f in diesem Bereich rechtsgekrümmt.

Für $t > 0$ ist $f''(t) > 0$, d.h. der Graph der Funktion f in diesem Bereich linksgekrümmt.

3 a) Die Ableitung $f'(x) = -\sin(x)$; $f''(x) = -\cos(x)$ hat die Nullstellen $x_1 = \frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \frac{3\pi}{2}$.

Im Intervall $]0; \frac{\pi}{2}[$ ist $f''(x) < 0$, somit ist der Graph der Funktion f rechtsgekrümmt.

Im Intervall $]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$ ist $f''(x) > 0$, somit ist der Graph der Funktion f linksgekrümmt.

Im Intervall $]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$ ist $f''(x) < 0$, somit ist der Graph der Funktion f rechtsgekrümmt.

b) $f'(x) = 2\cos(2x)$; $f''(x) = -4\sin(2x)$ hat die Periode π .

Im Intervall $]0; \frac{\pi}{2}[$ ist $f''(x) < 0$, somit ist der Graph der Funktion f rechtsgekrümmt.

Im Intervall $]\frac{\pi}{2}; \pi[$ ist $f''(x) > 0$, somit ist der Graph der Funktion f linksgekrümmt.

Im Intervall $]\pi; \frac{3\pi}{2}[$ ist $f''(x) < 0$, somit ist der Graph der Funktion f rechtsgekrümmt.

Im Intervall $]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$ ist $f''(x) > 0$, somit ist der Graph der Funktion f linksgekrümmt.

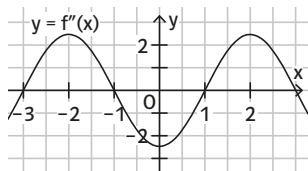
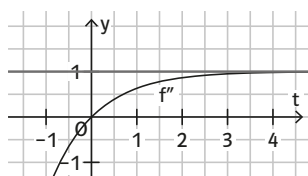
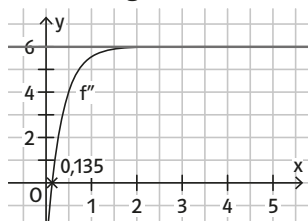
c) $f'(x) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2$;

$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ hat die Periode 4.

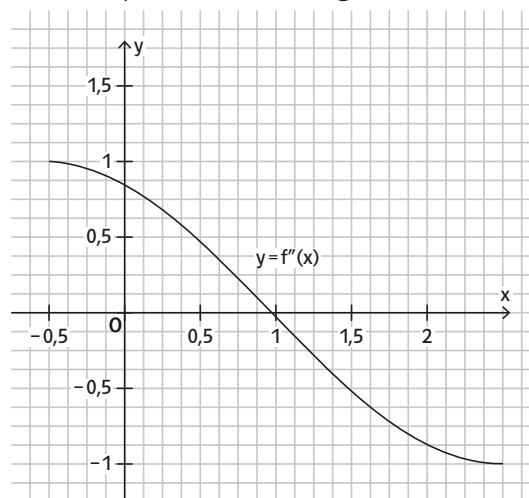
Im Intervall $]-2; -1[$ ist $f''(x) > 0$, d.h. der Graph der Funktion f ist dort linksgekrümmt.

Im Intervall $]-1; 1[$ ist $f''(x) < 0$, folglich ist der Graph der Funktion f dort rechtsgekrümmt.

Im Intervall $]1; 2[$ ist $f''(x) > 0$, folglich ist der Graph der Funktion f dort linksgekrümmt.



d) $f'(x) = \cos(x - 1) + 1$; $f''(x) = -\sin(x - 1)$ hat die Periode 2π . Im Intervall $]0; 1[$ ist $f'' > 0$, somit ist der Graph von f dort linksgekrümmt. Im Intervall $]1; 2[$ ist $f'' < 0$, somit ist der Graph von f dort rechtsgekrümmt.

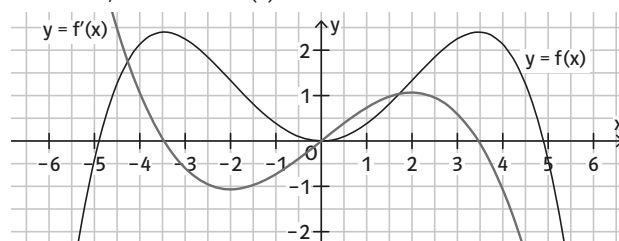


4 a) siehe Skizze unten

b) Für $x < -2$ ist der Graph der Funktion f rechtsgekrümmt. In diesem Bereich fällt der Graph der Ableitung f' streng monoton, es gilt daher $f''(x) < 0$.

Im Intervall $]-2; 2[$ ist der Graph der Funktion f linksgekrümmt. In diesem Bereich wächst der Graph der Ableitung f' streng monoton, es gilt also $f''(x) > 0$.

Für $x > 2$ ist der Graph der Funktion f rechtsgekrümmt. Der Graph der Ableitung f' fällt in diesem Bereich streng monoton, damit ist $f''(x) < 0$.

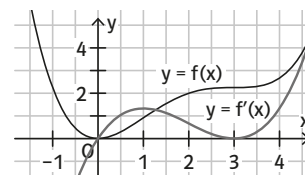


Seite 95

5 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

6 Der Graph der Funktion f ist für $x < 1$ linksgekrümmt, es gilt also $f''(x) > 0$; der Graph der Ableitung f' wächst daher in diesem Bereich streng monoton.

Der Graph der Funktion f ist im Intervall $]1; 3[$ rechtsgekrümmt, es gilt also $f''(x) < 0$; der Graph der Ableitung f' ist daher in diesem Bereich streng monoton fallend. Für $x > 3$ ist der Graph der Funktion f linksgekrümmt, der Graph der Ableitung f' wächst in diesem Bereich streng monoton.



7 Funktion f :

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + tx^2 + x + 1$$

Erste Ableitung f' :

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2tx + 1$$

Zweite Ableitung f'' :

$$f''(x) = x + 2t$$

Rechtskrümmung im Intervall $]-\infty; 2]$ ist, wenn $f''(x) < 0$. Der höchste Wert, den x in diesem Intervall annehmen kann, ist $x = 2$. Die Bedingung ist daher erfüllt, wenn $2 + 2t < 0$ gilt, also wenn $t < -\frac{2}{2} = -1$.

$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + x + 1$ ist im Intervall $]-\infty; 2]$ rechtsgekrümmt.

8 Aussage A: Der Graph der Ableitung f' liegt in Intervall $]-2; 0[$ unter der x -Achse, die Ableitung f' hat dort negative Werte. Die Aussage A ist richtig.

Aussage B: Der Graph der Ableitung f' wächst im Intervall $]-2; 0[$ streng monoton, die 2. Ableitung f'' hat daher positive Funktionswerte. Die Aussage B ist richtig.

Aussage C: Der Graph der Ableitung ist im Intervall $]0; 2[$ streng monoton fallend, die 2. Ableitung f'' hat somit negative Funktionswerte. Die Aussage C ist richtig.

Aussage D: Der Graph der Ableitung f' liegt in Intervall $[-2; 2]$ unter der x -Achse, hat jedoch einen gemeinsamen Punkt mit der x -Achse. Daher gilt $f'(x) \leq 0$. Daher fällt der Graph der Funktion f in diesem Bereich monoton und nicht streng monoton. Die Aussage ist richtig.

9 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

10 Der Graph B ist der Graph der Funktion f , der Graph A ist der Graph der zweiten Ableitung f'' .

A ist im Intervall $]-5; -1,5[$ positiv, in diesem Bereich ist der Graph B linksgekrümmt.

A ist im Intervall $]-1,5; 1,4[$ negativ, in diesem Bereich ist der Graph B rechtsgekrümmt.

A ist für $x > 1,4$ positiv, in diesem Bereich ist der Graph B linksgekrümmt.

11 a) Es ist $g'(x) = f'(x)$. Somit haben die Ableitungen von f und g dasselbe Monotonieverhalten und damit haben f und g auch dasselbe Krümmungsverhalten. Also ist auf die Funktion g auf dem Intervall rechtsgekrümmt.

b) Es ist $g'(x) = 1 + 2f'(2x)$. Der Graph der ersten Ableitung g' entsteht aus dem Graphen der ersten Ableitung f' , indem dieser um eine Einheit nach oben verschoben, mit dem Faktor 2 in y -Richtung und mit dem Faktor 0,5 in x -Richtung verschoben wird. Durch Verschieben bleibt zwar das Monotonieverhalten bestehen, die Grenzen der Monotonie-Intervalle werden aber durch die Verschiebung in x -Richtung verändert (vgl. Beispiel unten). Damit kann keine Aussage darüber getroffen werden, ob der Graph der Funktion g im gleichen Intervall rechtsgekrümmt ist, in dem auch f rechtsgekrümmt ist.

Beispiel: Polynomfunktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$g(x)$$

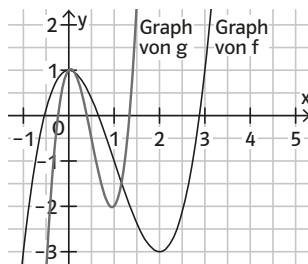
$$= x + (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 + 1$$

$$= 8x^3 - 12x^2 + x + 1$$

f ist für $x < 1$ rechtsgekrümmt; g ist aber in diesem Intervall sowohl linksgekrümmt als auch rechtsgekrümmt.

Beispiel: trigonometrische Funktion

Auch $\sin(x)$ und $x + \sin(2x)$ sind mögliche Beispiele.



c) $g'(x) = 2x + f'(x)$. Die Funktion f' ist in dem gegebenen Intervall monoton fallend. Da bei g' ein monoton wachsender Summand dazu kommt, kann man nicht sicher sagen, ob die Ableitungsfunktion g' monoton fallend ist. Also kann man keine Aussage über die Krümmung in diesem Intervall machen.

12 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

3 Extrempunkte eines Funktionsgraphen

Seite 96

Einstiegsaufgabe

Ab Position 1 fällt die Achterbahn, es geht sehr steil bergabwärts. Der Wagen wird beschleunigt. Ab Position 2 steigt die Achterbahn, es geht steil bergauf, der Wagen wird langsamer. Diese Verlangsamung hält an, bis Position 3 erreicht ist.

Ab Position 3 fällt die Strecke wieder, jedoch weniger steil, der Wagen wieder schneller bis Position 4. Zwischen Position 4 und 5 steigt die Bahn nochmal steil an, der Wagen fährt bergauf, er wird wieder langsamer.

Ab Position 5 fällt die Achterbahn, der Wagen fährt steil bergab.

Ab Position 6 ist keine Steigung mehr vorhanden.

Seite 97

1 Es gibt drei lokale Maxima:

$$f(0) = 5, f(5) = 3 \text{ und } f(10) = 4.$$

Das globale Maximum ist 5 an der Stelle 0.

Es gibt zwei lokale Minima: $f(2) = 1$ und $f(8) = 0$.

Das globale Minimum ist 0 an der Stelle 8.

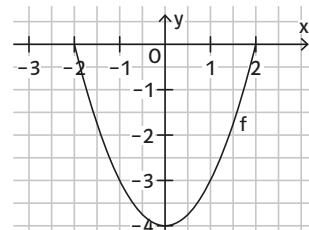
2 a) Globale Maxima 0

sind an den Stellen -2

und 2.

Ein globales Minimum -4

ist an der Stelle 0.



b) Ein globales Maximum 8

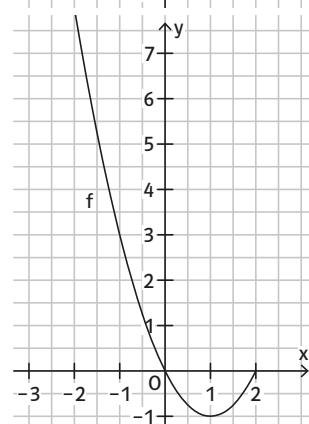
ist an der Stelle -2; ein

lokales Maximum 0 ist an

der Stelle 2.

Ein globales Minimum -1

ist an der Stelle 1.



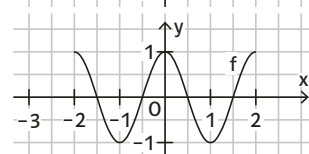
c) Globale Maxima 1 sind

an den Stellen -2, 0

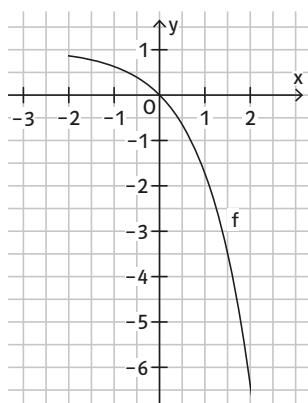
und 2.

Globale Minima -1 sind

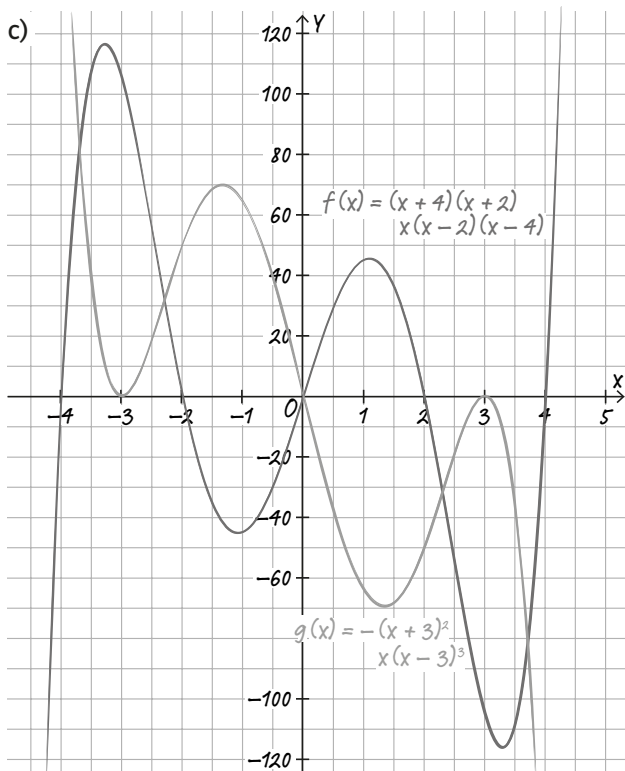
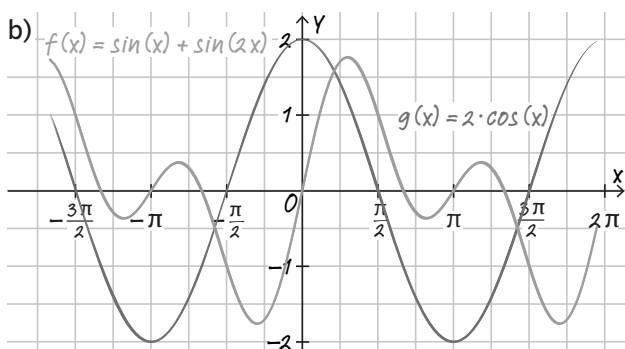
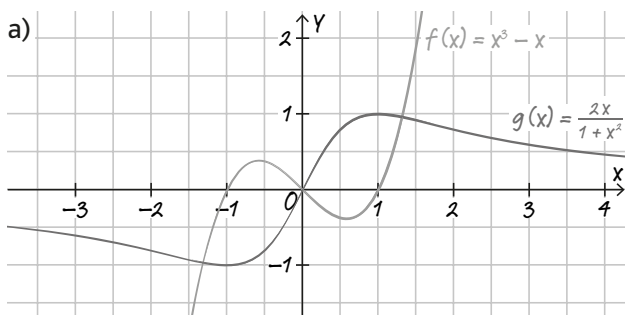
an den Stellen -1 und 1.



- d) Ein globales Maximum $1 - e^{-2} \approx 0,865$ ist an der Stelle -2 .
Ein globales Minimum $1 - e^2 \approx -6,389$ ist an der Stelle 2 .



3 Individuelle Lösungen, z.B.:



- 4 a) Punkte, die man ablesen kann:
Tiefpunkt $T(-2,5|-1,7)$; Hochpunkt $H(-1|1,2)$; Tiefpunkt $T(2|-2,2)$;
Schnittpunkte mit der x-Achse sind: $N_1(-1,7|0)$; $N_2(0|0)$ und $N_3(3,3|0)$; $N_2(0|0)$ ist auch Schnittpunkt mit der y-Achse.
b) Punkte, die man ablesen kann: Hochpunkt $H(-2|1)$; Tiefpunkt $T(0|-1)$; Hochpunkt $H(2|1)$;
Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(-3|0)$; $N_2(-1|0)$; $N_3(1|0)$ und $N_4(1|0)$;
Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0|-1)$.
c) Punkte, die man ablesen kann: Hochpunkt $H(0|4)$; Tiefpunkt $T(2|0)$; $H(0|4)$ ist auch Schnittpunkt mit der y-Achse. Links nähert sich die Funktion immer mehr der x-Achse an.

Seite 98

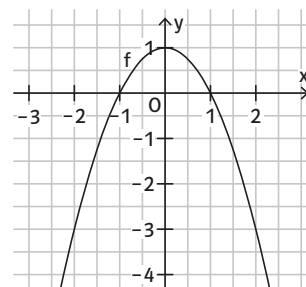
- 5 a) Der Graph kommt von unten und steigt bis zum Hochpunkt $H(0|0)$, fällt danach bis zu einem Tiefpunkt $T(2|-1)$ und steigt danach (immer weniger). Er nähert sich von unten der x-Achse an.
b) Der Graph hat keine Extrempunkte. Er ist wellenartig ansteigend und fällt nirgends. Zwischen $x = -4$ und etwa $x = -2$ verläuft er wenig steigend, fast waagrecht bei $x \approx -3$. Zwischen $x = -1$ und $x = 1$ hat der Graph eine Steigung von etwa 1. Danach steigt er etwas weniger steil an. Zwischen $x = 2$ und $x = 4$ ist die Steigung fast waagrecht, besonders im Punkt $x = 3$. Danach steigt er wieder steiler an (bis etwa auf die Steigung 1) und flacht dann wieder ab etwa bis $x = 8$. Der Verlauf wiederholt sich (und geht vermutlich immer so weiter).

- 6 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

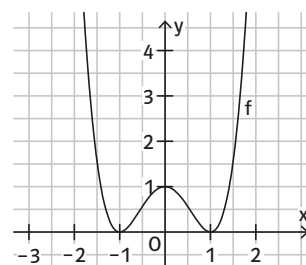
7 Individuelle Lösungen,

z.B.:

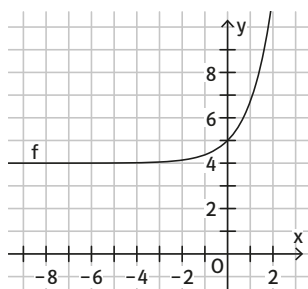
a) $f(x) = 1 - x^2$



b) $f(x) = (x^2 - 1)^2$



c) $f(x) = 4 + e^x$



8 a) Der Graph der Funktion f ist eine Parabel mit Scheitel $S(2|1)$.

Bei $x = 2$ ist das globale Minimum 1. An den Rändern ist ein globales Maximum $f(0) = 5$ und ein lokales Maximum $f(3) = 2$.

b) Die Funktion f ist linear und streng monoton fallend. Daher gibt es ein globales Maximum $f(5) = -0,5$ und ein globales Minimum $f(10) = -3$.

c) Die Funktion f hat ein globales Minimum $f(\frac{\pi}{2}) = -1$ und ein globales Maximum $f(\frac{3\pi}{2}) = 1$. Am linken Rand ist ein lokales Maximum $f(0) = 0$.

d) Die Funktion f ist streng monoton wachsend. Sie hat ein globales Minimum $f(0) = -2$ und ein globales Maximum $f(\ln(4)) = -0,5$.

9 a) $f(x) = x(x+1)(x-2)$ hat die Nullstellen

$x_1 = -1$; $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$.

Der Graph der Funktion verläuft vom III. zum II., dann zum IV. und von dort aus zum I. Quadranten.

Im Intervall $[-1; 0]$ liegt ein lokales Maximum; im Intervall $[0; 2]$ ein lokales Minimum.

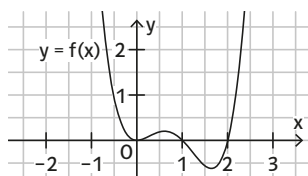
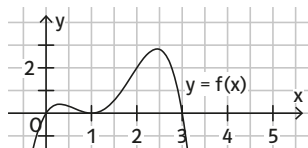
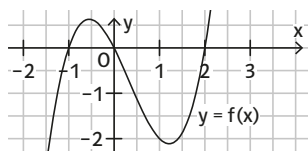
b) $f(x) = x(x-1)^2(3-x)$ hat eine einfach Nullstelle bei $x_1 = 0$ und bei $x_2 = 3$. Bei $x_3 = 1$ liegt eine doppelte Nullstelle.

Der Graph verläuft vom III. zum I. Quadranten und von da aus zum IV. Quadranten. Im Intervall $[0; 1]$ liegt ein lokales Maximum und im Intervall $[1; 3]$ ein lokales Maximum, $f(1) = 0$ ist lokales Minimum.

c) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$
 $f(x) = x^2(x^2 - 3x + 2)$ hat eine doppelte Nullstelle bei $x_0 = 0$, sowie zwei weitere bei $x_1 = 1$ und bei $x_2 = 2$. Der Graph

verläuft vom II. zum I. Quadranten und von da aus zum IV. und wieder zum I. Quadranten. Damit liegt im Ursprung ein lokales Minimum, im Intervall $[0; 1]$ liegt ein lokales Maximum und im Intervall $[1; 2]$ ein globales Minimum.

10 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.



11 a) Für $x \rightarrow \infty$ geht $f(x) \rightarrow \infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ geht $f(x) \rightarrow 0$.

Bei $x_0 = 2$ hat die Funktion f eine Nullstelle und für $x < 2$ sind die Funktionswerte negativ. Da sich der Graph links gegen die x -Achse nähert, muss er links von der Nullstelle einen Tiefpunkt haben.

b) Für $x \rightarrow \infty$ geht $f(x) \rightarrow \infty$.

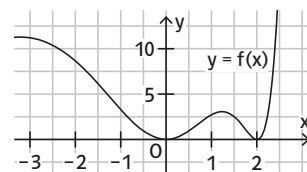
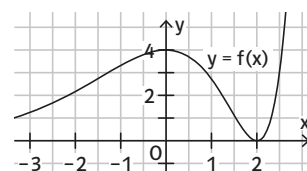
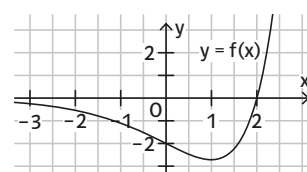
Für $x \rightarrow -\infty$ geht $f(x) \rightarrow 0$.

Bei $x_0 = 2$ hat die Funktion f eine doppelte Nullstelle; die Funktionswerte sind überall positiv. Damit hat der Graph einen Tiefpunkt bei $T(2|0)$. Da der Graph links des Tiefpunktes T sich wieder der x -Achse (von oben) annähert; wird es im Bereich $x < 2$ noch einen Hochpunkt geben.

c) Für $x \rightarrow \infty$ geht $f(x) \rightarrow \infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ geht $f(x) \rightarrow 0$.

Bei $x_1 = 2$ und bei $x_2 = 0$ hat die Funktion f je eine doppelte Nullstelle; die Funktionswerte sind überall positiv. Somit hat der Graph der Funktion f die Tiefpunkte $T_1(0|0)$ und $T_2(2|0)$. Zwischen den beiden Tiefpunkten befindet sich ein Hochpunkt. Da der Graph links des Tiefpunktes T_1 sich wieder der x -Achse annähert; wird es im Bereich $x < 0$ noch einen Hochpunkt geben.



12 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

4 Berechnung lokaler Extremstellen

Seite 99

Einstiegsaufgabe

Abbildung A zeigt den Graphen der Ableitung des Graphen aus Abbildung B. Denn bei $x = 1$ wechselt der Graph in A das Vorzeichen von positiv auf negativ und der Graph in B das Monotonieverhalten von wachsend auf fallend.

Abbildung C zeigt den Graphen der Ableitung des Graphen aus Abbildung D.

Seite 101

1 a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 6x - 1$; $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6$; $f''(x) = -3x$
 notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$-\frac{3}{2}x^2 + 6 = 0 \quad | \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad \text{hat die Lösungen } x_1 = +2 \text{ und } x_2 = -2.$$

hinreichende Bedingung:

$$f''(2) = -6, \text{ also ist hier ein Hochpunkt.}$$

$$y\text{-Koordinate berechnen: } f(2) = 7.$$

$$\text{Der Hochpunkt ist } H(2|7).$$

$$f''(-2) = 6, \text{ also ist hier ein Tiefpunkt.}$$

$$y\text{-Koordinate berechnen: } f(-2) = -9$$

$$\text{Der Tiefpunkt ist } T(-2|-9).$$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$; $f'(x) = x^3 - x$; $f''(x) = 3x^2 - 1$

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$x^3 - x = 0$$

$x(x^2 - 1) = 0$ hat die Lösungen $x_1 = +1$; $x_2 = -1$ und $x_3 = 0$.

hinreichende Bedingung:

$$f''(0) = -1, f(0) = 0. \text{ Der Hochpunkt ist } H(0|0).$$

$$f''(1) = 2, f''(-1) = 2. f(1) = -\frac{1}{4}, f(-1) = -\frac{1}{4}.$$

Tiefpunkte sind $T_1(1|-\frac{1}{4})$ und $T_2(-1|-\frac{1}{4})$.

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2$; $f'(x) = -x^3 + x^2 + 2x$;

$$f''(x) = -3x^2 + 2x + 2$$

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$-x^3 + x^2 + 2x = 0$$

$-x(x^2 - x - 2) = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 0$; $x_2 = -1$ und $x_3 = 2$.

hinreichende Bedingung:

$$f''(-1) = -3, f(-1) = \frac{5}{12}. H(-1|\frac{5}{12}) \text{ ist ein Hochpunkt.}$$

$$f''(0) = 2, f(0) = 0. T(0|0) \text{ ist ein Tiefpunkt.}$$

$$f''(2) = -6, f(2) = \frac{8}{3}. H(2|\frac{8}{3}) \text{ ist ein Hochpunkt.}$$

d) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$; $f'(x) = 12x^3 + 12x^2$; $f''(x) = 36x^2 + 24x$

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$12x^3 + 12x^2 = 0$$

$$12x^2(x + 1) = 0 \text{ hat die beiden}$$

Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$.

hinreichende Bedingung:

$f''(0) = 0$, keine Aussage möglich, doppelte Nullstelle von f' , kein Vorzeichenwechsel, also Sattelpunkt im Ursprung.

$$f''(-1) = 12, f(-1) = -1. T(-1|-1) \text{ ist ein Tiefpunkt.}$$

e) $f(x) = -(x^2 - 1)^2$; $f'(x) = -4x(x^2 - 1) = -4x^3 + 4x$;

$$f''(x) = -12x^2 + 4$$

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$-4x(x^2 - 1) = 0$ hat die Lösungen $x_1 = +1$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 0$.

hinreichende Bedingung:

$$f''(1) = -8, f''(-1) = -8. f(1) = 0, f(-1) = 0.$$

$H_1(1|0)$ und $H_2(-1|0)$ sind Hochpunkte.

$$f''(0) = 4, f(0) = -1. T(0|-1) \text{ ist ein Tiefpunkt.}$$

f) $f(x) = \frac{1}{4}x(x^2 - 12) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$; $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$; $f''(x) = \frac{3}{2}x$

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\frac{3}{4}x^2 - 3 = 0 \quad | \cdot \frac{4}{3}$$

$$x^2 - 4 = 0 \text{ hat die Lösungen } x_1 = +2 \text{ und } x_2 = -2.$$

hinreichende Bedingung:

$$f''(-2) = -3, f(-2) = 4. H(-2|4) \text{ ist ein Hochpunkt.}$$

$$f''(2) = 3, f(2) = -4. T(2|-4) \text{ ist ein Tiefpunkt.}$$

g) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 3) = x^4 - 4x^2 + 3$; $f'(x) = 4x^3 - 8x$;

$$f''(x) = 12x^2 - 8$$

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$4x^3 - 8x = 0$$

$4x(x^2 - 2) = 0$ hat die Lösungen $x_1 = +\sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$ und $x_3 = 0$.

hinreichende Bedingung:

$$f''(0) = -8, f(0) = 3. H(0|3) \text{ ist ein Hochpunkt.}$$

$$f''(\sqrt{2}) = 16, f''(-\sqrt{2}) = 16. f(\sqrt{2}) = -1, f(-\sqrt{2}) = -1.$$

$T_1(\sqrt{2}|-1)$ und $T_2(-\sqrt{2}|-1)$ sind Tiefpunkte.

h) $f(x) = x - \frac{1}{2}e^{2x} - 1$; $f'(x) = 1 - e^{2x}$; $f''(x) = -2e^{2x}$

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$1 - e^{2x} = 0$$

$e^{2x} = 1$ hat die Lösung $x_0 = 0$.

hinreichende Bedingung:

$$f''(0) = -2, f(0) = -\frac{3}{2}. H(0|-\frac{3}{2}) \text{ ist ein Hochpunkt.}$$

i) $f(x) = 3x + e^{-x}$; $f'(x) = 3 - e^{-x}$; $f''(x) = e^{-x}$

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$3 - e^{-x} = 0$$

$e^{-x} = 3$ hat die Lösung $x_0 = -\ln(3)$.

hinreichende Bedingung

$$f''(-\ln(3)) = 3, f(-\ln(3)) = -3 \ln(3) + 3 \approx -0,3.$$

$T(-\ln(3)|-0,3)$ ist ein Tiefpunkt.

2 a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x - 1$;

$$f'(x) = x^2 - 4$$

Die Nullstellen der Ableitung sind $x_1 = +2$ und $x_2 = -2$.

Bei $x_1 = -2$ ändert der

Graph der Ableitung f'

das Vorzeichen von +

nach -, hier hat der Graph der Funktion f einen Hochpunkt.

Bei $x_1 = 2$ ändert der Graph der Ableitung f' das Vorzeichen von - nach +, hier hat der Graph der Funktion f einen Tiefpunkt.

b) $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^2$;

$$f'(x) = 6x^2 - 3x^3 + 9x$$

Nullstellen von f' :

$$-3x(x^2 - 2x - 3) = 0 \text{ hat die Lösungen } x_1 = 0;$$

$$x_2 = -1 \text{ und } x_3 = 3.$$

Der Graph der Ableitung

verläuft vom II. Quadranten

über den III. und I.

zum IV. Quadranten; alle

Nullstellen sind einfache Nullstellen, es gibt also an diesen Stellen einen Vorzeichenwechsel.

Bei $x_1 = -1$ ändert der Graph der Ableitung f' das Vorzeichen von + nach -, hier hat der Graph der Funktion f einen Hochpunkt.

Bei $x_2 = 0$ ändert der Graph der Ableitung f das Vorzeichen von - nach +, hier liegt ein Tiefpunkt.

Bei $x_3 = 3$ ändert der Graph der Ableitung f' das Vorzeichen von + nach -, hier hat der Graph der Funktion f einen Hochpunkt.

c) $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x^4 - 3$;

$$f'(x) = 3x^2 + x^3$$

Nullstellen von f' :

$$x^2(3 + x) = 0 \text{ hat die}$$

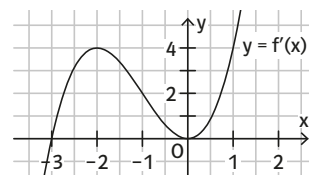
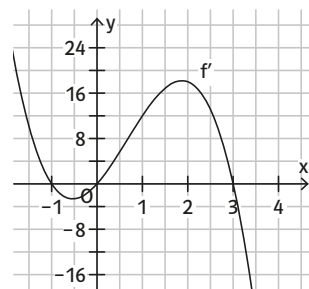
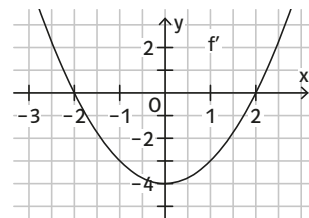
$$\text{Lösungen } x_1 = -3 \text{ und}$$

$$x_2 = 0.$$

Der Graph der Ableitung f' verläuft vom III. über den II. zum I. Quadranten. Bei $x_1 = -3$ hat die Ableitung f' eine einfache und bei $x_2 = 0$ eine doppelte Nullstelle.

Bei $x_1 = -3$ wechselt der Graph der Ableitung f' das Vorzeichen von - nach +, hier hat der Graph der Funktion f einen Tiefpunkt.

Bei $x_2 = 0$ wechselt der Graph der Ableitung f das Vorzeichen nicht (+ $\rightarrow$ +), hier hat der Graph der Funktion f einen Sattelpunkt.



d) $f(x) = x(2x - 3)^2$
 $= x(4x^2 - 12x + 9)$
 $= 4x^3 - 12x^2 + 9x$

$f'(x) = 12x^2 - 24x + 9$

Nullstellen von f' :

$4x^2 - 8x + 3 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 0,5$ und $x_2 = 1,5$.

Der Graph der Ableitung f' ist eine nach oben offene Parabel, die die x -Achse bei $x_1 = 0,5$ und $x_2 = 1,5$ schneidet. Bei $x_1 = 0,5$ wechselt der Graph der Ableitung f' das Vorzeichen von $+$ nach $-$, hier hat der Graph der Funktion f einen Tiefpunkt.

Bei $x_2 = 1,5$ wechselt der Graph der Ableitung f das Vorzeichen von $-$ nach $+$, hier hat der Graph der Funktion f einen Hochpunkt.

e) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - 1$

$f'(x) = x^4 + 2x^3$

Nullstellen von f' :

$x^3(x + 2) = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.

Der Graph der Ableitung f' verläuft vom II. über den III. zum I. Quadranten. Er hat an der Stelle $x_1 = 0$ einen Sattelpunkt und an der Stelle $x_2 = -2$ eine einfache Nullstelle.

Bei $x_1 = -2$ ändert der Graph der Ableitung f' das Vorzeichen von $+$ nach $-$, hier hat der Graph der Funktion f einen Hochpunkt.

Bei $x_2 = 0$ ändert der Graph der Ableitung f das Vorzeichen von $-$ nach $+$, hier hat der Graph der Funktion f einen Tiefpunkt.

f) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

$f'(x) = (1 - x)e^{-x}$

Nullstellen von f' :

$(1 - x)e^{-x} = 0$ hat die einzige Lösung $x = 1$. Der Graph der Ableitung f'

kommt von oben, schneidet die x -Achse und nähert sich dann der positiven x -Achse von unten an, die Asymptote ist. Bei $x = 1$ ändert der Graph der Ableitung f' das Vorzeichen von $+$ nach $-$, hier der Graph der Funktion f einen Hochpunkt.

3 a) $f'(x) = 2 - 2x$; $f''(x) = -2$

Nullstellen von f' : $x = 1$; $f''(1) = -2 < 0$; also liegt bei $x = 1$ ein lokales Maximum vor.

b) $f'(x) = 6x^2 - 6$; $f''(x) = 12x$

Nullstellen von f' : $x_{1,2} = \pm 1$; $f''(1) = 12 > 0$;

$f''(-1) = -12 < 0$; also liegt bei $x_1 = 1$ ein lokales Minimum vor und bei $x_2 = -1$ ein lokales Maximum.

c) $f'(x) = 6x^2 - 4x^3 = 2x^2(3 - 2x)$; $f''(x) = 12x - 12x^2$

Nullstellen von f' : $x_1 = 0$ (doppelt); $x_2 = 1,5$; $f''(0) = 0$;

VZW-Kriterium: $f'(-1) = 10 > 0$ und $f'(1) = 2 > 0$; also kein VZW, d.h. kein lokales Extremum bei $x_1 = 0$.

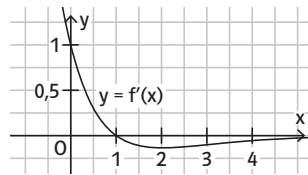
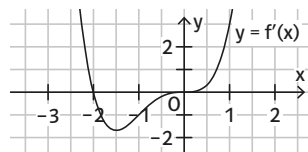
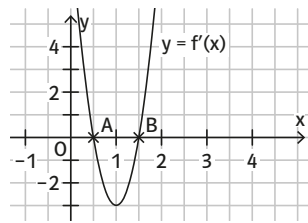
$f''(1,5) = -9 < 0$; also liegt bei $x_2 = 1,5$ ein lokales Maximum vor.

d) $f(x) = x^4 - 2x^2$; $f'(x) = 4x^3 - 4x$; $f''(x) = 12x^2 - 4$

Nullstellen von f' : $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 1$; $f''(0) = -4 < 0$;

$f''(\pm 1) = 8 > 0$

Es liegt ein lokales Maximum bei $x_1 = 0$, sowie zwei lokale Minima bei $x_{2,3} = \pm 1$ vor.



e) $f(t) = t^3 - t^4$; $f'(t) = 3t^2 - 4t^3$; $f''(t) = 6t - 12t^2$

Nullstellen von f' : $t_1 = 0$ (doppelt); $t_2 = \frac{3}{4}$; $f''(0) = 0$;

VZW-Kriterium: $f'(-1) = 7 > 0$ und $f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} > 0$; also kein VZW, d.h. kein lokales Extremum bei $t_1 = 0$. $f''(\frac{3}{4}) = \frac{3}{2} > 0$; also liegt bei $t_2 = \frac{3}{4}$ ein lokales Minimum vor.

f) mit Produkt und Kettenregel:

$f'(t) = (3 - x)^2 - 2x(3 - x) = (3 - x)(3 - x - 2x) = 3(3 - x)(1 - x)$

alternativ Ausmultiplizieren und mit Summenregel:

$f(x) = x(9 - 6x + x^2) = 9x - 6x^2 + x^3$

$f'(x) = 9 - 12x + 3x^2$; $f''(x) = -12 + 6x$;

Nullstellen von f' : $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$;

$f''(1) = -6 < 0$; somit lokales Maximum bei $x = 1$;

$f''(3) = 6 > 0$; somit lokales Minimum bei $x = 3$.

g) $f'(t) = -e^t + (1 - t)e^t = -te^t$;

$f''(t) = -e^t - te^t = -(1 + t)e^t$;

Nullstellen von f' : $t = 0$; $f''(0) = -1 < 0$, also hat f bei $t = 0$ ein lokales Maximum.

h) $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) \cdot e^x = x(2 + x) \cdot e^x$;

$f''(x) = (2 + 2x) \cdot e^x + (2x + x^2) \cdot e^x = (2 + 4x + x^2) \cdot e^x$

Nullstellen von f' : $x_1 = 0$; $x_2 = -2$;

$f''(0) = 2 > 0$, also hat f bei $x = 0$ ein lokales Maximum.

$f''(-2) = -2e^{-2} < 0$, also hat f bei $x = -2$ ein lokales Minimum.

i) $f'(x) = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x = (3x^2 + x^3) \cdot e^x = x^2(3 + x) \cdot e^x$

$f''(x) = (6x + 3x^2) \cdot e^x + (3x^2 + x^3) \cdot e^x = (6x + 6x^2 + x^3) \cdot e^x$

Nullstellen von f' : $x_1 = 0$ (doppelt); $x_2 = -3$;

$f''(0) = 0$; VZW-Kriterium: $f'(-1) = \frac{2}{e} > 0$ und $f'(1) = \frac{4}{e} > 0$;

also kein VZW, d.h. kein lokales Extremum bei $x = 0$.

$f''(-3) = 9e^{-3} > 0$, f hat dort lokales Minimum.

Seite 102

4 a) Periode: 12; Amplitude: 3; $H(3|3)$; $T(9|-3)$

b) Periode: 4; Amplitude: 1; $H_1(1|5)$; $T(3|3)$; $H_2(5|5)$

c) Periode: 6; Amplitude: 1; $H_1(0|2)$; $T_1(3|0)$; $H_2(6|2)$; $T_2(9|0)$

d) Periode: π ; Amplitude: 3; $H_1(-\pi|4)$; $T(-\frac{\pi}{2}|-2)$; $H_2(0|4)$

e) Periode: 6; Amplitude: 2; $T(-1,5|-3)$; $H(1,5|1)$

f) Periode: 8π ; Amplitude: 2; $H(-4\pi|0)$; $T(0|-2)$

5 a) Der Graph der Funktion f ist für $x < 0$ streng monoton wachsend, d.h. die Ableitung ist positiv. Der Graph der Funktion f ist für $x > 0$ streng monoton fallend, die Ableitung ist negativ. Der Graph der Funktion f ist im gesamten sichtbaren Bereich rechtsgekrümmt, folglich ist die zweite Ableitung negativ.

b) Der Graph der Funktion f ist im gesamten sichtbaren Bereich, also in $[-3; 3]$, monoton fallend, an der Stelle $x = 0$ ist die Steigung 0. Auf $[-3; 3]$ gilt folglich $f'(x) \leq 0$. Der Graph der Funktion f ist im Intervall $]-2; 0[$ linksgekrümmt und im Intervall $]0; 2[$ rechtsgekrümmt. Damit ist die zweite Ableitung im Bereich $]-2; 0[$ positiv und im Bereich $]0; 2[$ negativ. Betrachtet man die jeweils äußeren Bereiche des gegebenen Intervalls $[-3; 3]$ und den Verlauf des Graphen von f im grau markierten Bereich, sieht man, dass sich dort die Situation umdreht. Im Intervall $[-3; -2[$ ist der Graph von f rechtsgekrümmt (f'' ist negativ) und im Intervall $]2; 3]$ ist er linksgekrümmt (f'' ist positiv).

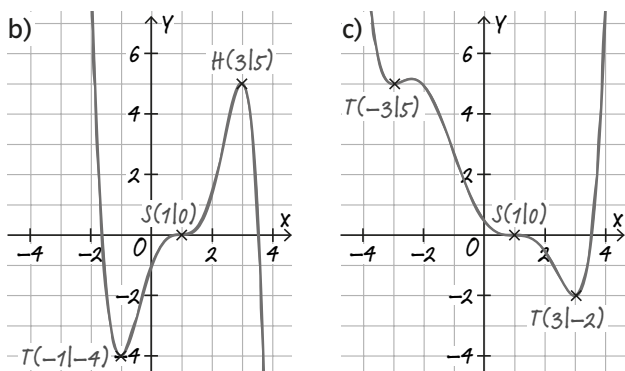
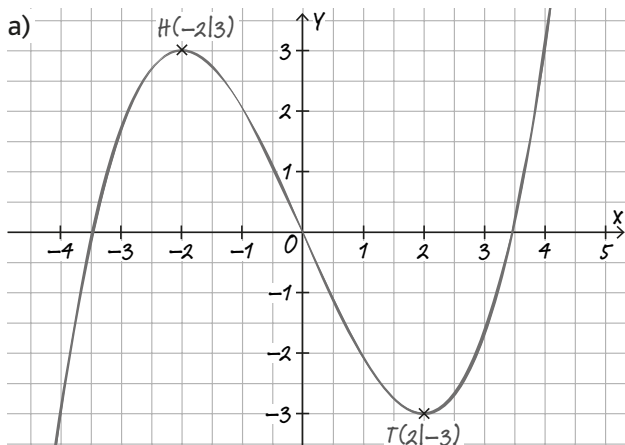
c) Der Graph der Funktion f ist im Bereich $]-2; 2[$ streng monoton fallend, im Intervall $[-3; -2[$ und im Intervall $]2; 3]$ streng monoton wachsend. Folglich gilt für die Ableitung f' :

$f'(x) < 0$ für $x \in]-2; 2[$ und $f'(x) > 0$ im Bereich $[-3; -2[$ und $f'(x) > 0$ im Bereich $]2; 3]$.

Für $x < 0$ ist der Graph der Funktion f rechtsgekrümmt und für $x > 0$ linksgekrümmt. Daher gilt für die zweite Ableitung f'' : $f''(x) < 0$ für $x < 0$ und $f''(x) > 0$ für $x > 0$.

6 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

7 Individuelle Lösungen, z.B.:



Bemerkung zu Teilaufgabe c): Ein Graph mit zwei Tiefpunkten und einem Sattelpunkt hat auch immer noch einen zusätzlichen Hochpunkt, hier $H(-2,7|5,2)$.

8 A: Die Aussage ist wahr, denn f' hat bei $x = -3$ einen VZW von $+$ nach $-$.

B: Die Aussage ist wahr, denn f' ist im Intervall $]-3; 1[$ negativ.

C: Die Aussage ist wahr, denn $f'(1,5) = 0$ und f' hat bei $x = 1,5$ keinen VZW.

D: Die Aussage ist falsch, denn bei $x = 0$ hat f' kein Extremum.

E: Die Aussage ist falsch, denn die Nullstellen von f'' sind Stellen mit waagerechter Tangente des Graphen von f' . Im Intervall $[-3; 3]$ hat aber der Graph von f' an zwei Stellen eine waagerechte Tangente: $f''(-1,5) = 0 = f''(1,5)$.

9 a) $f'(x) = 4x^3$ und $f''(x) = 12x^2$.

Minimum bei $x = 0$, da f' dort VZW von $-$ nach $+$ hat. Krümmungskriterium nicht anwendbar.

b) $f'(x) = 3(x-2)^2$. Die Ableitung f' hat keine Nullstellen bei $x = 2$ ohne Vorzeichenwechsel. Folglich befindet sich bei $x = 2$ keine Extremstelle, sondern ein Sattelpunkt. Hier ist das Krümmungskriterium nicht anwendbar.

c) $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$ und $f''(x) = 12x^2 - 6x$.

Kein VZW von f' bei $x = 0$, also dort Sattelpunkt. Krümmungskriterium hier nicht anwendbar. Minimum bei $x = \frac{3}{4}$, da f' dort einen VZW von $-$ nach $+$ hat.

Auch Krümmungskriterium $f''(\frac{3}{4}) = \frac{9}{4} > 0$ anwendbar.

d) $f'(x) = 5x^4 - 4x^3$ und $f''(x) = 20x^3 - 12x^2$.

Maximum bei $x = 0$, da f' dort einen VZW von $+$ nach $-$ hat. Krümmungskriterium nicht anwendbar.

Minimum bei $x = \frac{4}{5}$, da f' dort einen VZW von $-$ nach $+$ hat. Auch Krümmungskriterium $f''(\frac{4}{5}) = \frac{64}{25} > 0$ anwendbar.

e) $f'(x) = 6x^5 + 4x^3 = 6x^3(x^2 + \frac{2}{3})$ und

$f''(x) = 30x^4 + 12x^2$.

Minimum bei $x = 0$, da f' dort einen VZW von $-$ nach $+$ hat. Krümmungskriterium nicht anwendbar.

f) $f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$, $f''(x) = 12x^2 - 12$.

Proben für f' :

$f'(-2) = -8$, $f'(-1) = 8$, $f'(1) = -8$ und $f'(2) = 8$.

Also: Minimum bei $x = -\sqrt{3}$, da bei f' VZW von $-$ nach $+$, ebenso bei $x = \sqrt{3}$. Maximum bei $x = 0$, da für f' einen VZW von $+$ nach $-$ hat.

Wegen $f''(-\sqrt{3}) = f''(\sqrt{3}) = 24 > 0$ und $f''(0) = -12$ ist jeweils das Krümmungskriterium anwendbar.

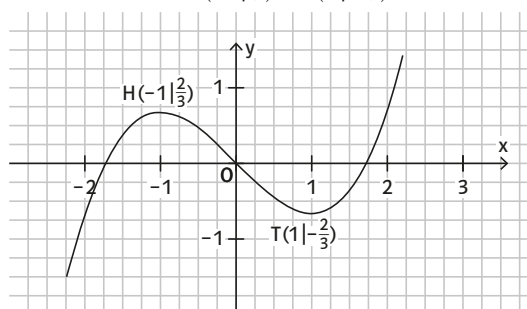
10 a) $f'(x) = x^2 - 1$; $f''(x) = 2x$

$f'(x) = 0$ für $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

$f'(-1) = -2 < 0$,

$f''(1) = 2 > 0$

Extrempunkte: $H(-1|\frac{2}{3})$; $T(1|-\frac{2}{3})$



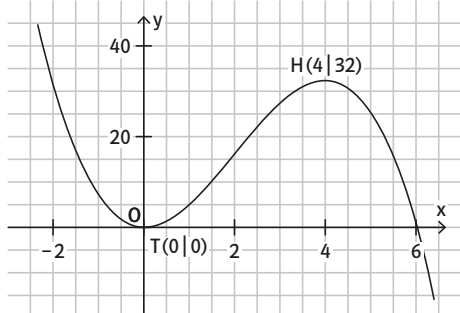
b) $f'(x) = 12x - 3x^2$; $f''(x) = 12 - 6x$

$f'(x) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.

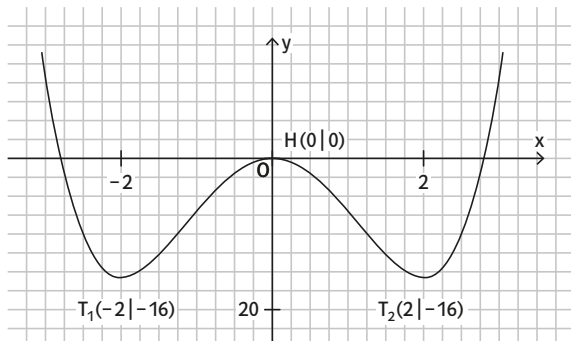
$f''(0) = 12 > 0$,

$f''(4) = -12 < 0$

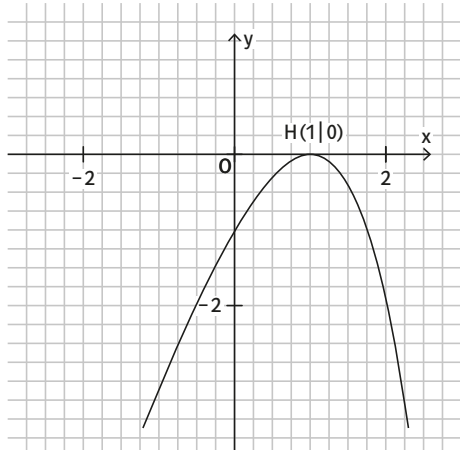
Extrempunkte: H(4|32); T(0|0)



c) $f'(x) = 4x^3 - 16x$; $f''(x) = 12x^2 - 16$
 $f'(x) = 0$ für $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$
 $f''(-2) = 32 > 0$,
 $f''(0) = -16 < 0$
 $f''(2) = 32 > 0$

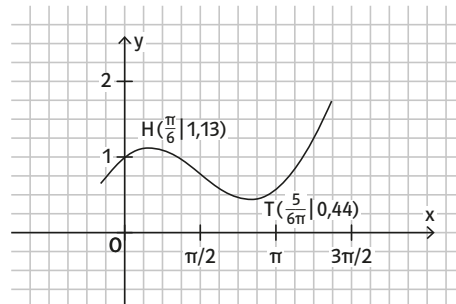
Extrempunkte: $T_1(-2|-16)$; $T_2(2|-16)$; H(0|0)

d) $f'(x) = e - e^x$; $f''(x) = -e^x$
 $f'(x) = 0$ für $x_1 = 1$
 $f''(1) = -e < 0$,
Hochpunkt H(1|0)



e) $f'(x) = e - e^{-x}$; $f''(x) = e^{-x}$
 $f'(x) = 0$ für $x_1 = -1$
 $f''(-1) = e > 0$
Tiefpunkt T(-1|-e)
f) $f'(x) = \frac{1}{2} - \sin(x)$; $f''(x) = -\cos(x)$
 $f'(x) = 0$ für $x_1 = \frac{\pi}{6}$ und $x_2 = \frac{5\pi}{6}$
 $f''(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} < 0$,
 $f''(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} < 0$
Hochpunkt $H(\frac{\pi}{6} | \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2})$;
Tiefpunkt $T(\frac{5\pi}{6} | \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2})$

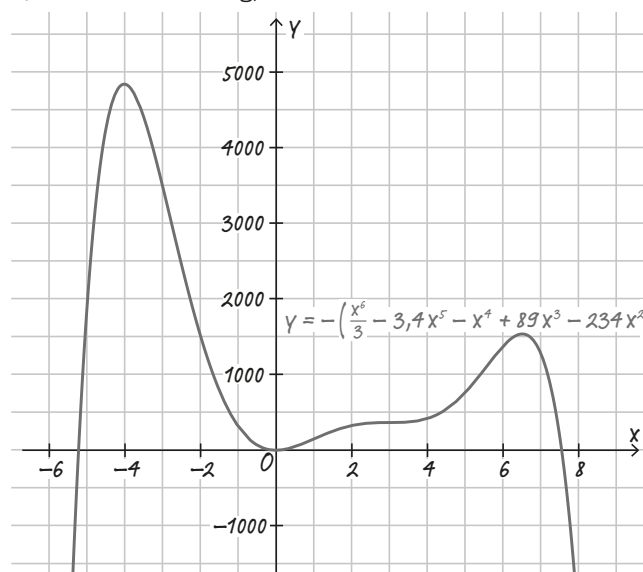
Wegen der Periodizität gibt es darüber hinaus unendlich viele weitere Hochpunkte und Tiefpunkte.



Seite 103

11 a) Mögliche Extrempunkte von f liegen an den Stellen $x = -4$, $x = 0$, $x = 3$ und $x = 6,5$. Bei $x = -4$ und $x = 6,5$ hat f' einen VZW von $+$ nach $-$, also liegt dort jeweils ein Maximum vor. Bei $x = 0$ wechselt das Vorzeichen von f' von $-$ nach $+$, dort ist ein Minimum von f . An der Stelle $x = 3$ wechselt f' nicht das Vorzeichen, an dieser Stelle liegt ein Sattelpunkt.
Für $x < -4$ und im Intervall $]0; 6,5[$ verläuft der Graph von f' außer für $N(3|0)$ oberhalb der x -Achse. Der Graph von f ist also für $x < -4$ streng monoton wachsend und für $0 < x < 6,5$ monoton wachsend.
Im Intervall $]-4; 0[$ und für $x > 6,5$ verläuft der Graph von f' unterhalb der x -Achse. Der Graph von f ist dort also streng monoton fallend.

b) Individuelle Lösung, z. B.:



12 Die Aussage A ist falsch, da an der Stelle $x = 0$ kein Vorzeichenwechsel ist. Hier hat der Graph K der Funktion f einen Sattelpunkt.

Die Aussage B ist falsch, da der Graph der Ableitung unter der x -Achse liegt. Daher fällt der Graph K der Funktion f in diesem Bereich.

Die Aussage C ist falsch. Der Graph der ersten Ableitung f' fällt im Bereich $[1,5; 2,5]$, d.h. die zweite Ableitung hat negative Funktionswerte. Daher ist der Graph K der Funktion f in diesem Bereich rechtsgekrümmt.

Die Aussage D ist falsch, da bei $x = 2$ ein Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ vorliegt, d.h. der Graph K der Funktion f hat dort einen Hochpunkt.

Die Aussage E ist falsch, da der Graph der ersten Ableitung im Bereich $[-1; 4]$ nur zwei Nullstellen mit Vorzeichenwechsel hat.

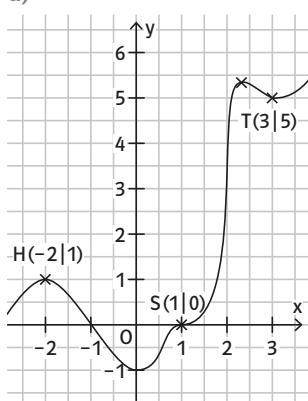
Die Aussage F ist falsch, da im Bereich $[1; 2]$ der Graph der ersten Ableitung über der x -Achse liegt und damit die Ableitung f' positive Funktionswerte hat. Somit steigt der Graph K der Funktion f in diesem Bereich streng monoton.

13 a) Die Funktion f hat im Punkt $H(-2|1)$ einen Hochpunkt.

b) Die Funktion f hat im Punkt $T(3|5)$ einen Tiefpunkt.

c) Die Funktion f hat im Punkt $W(1|0)$ einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente, also einen Sattelpunkt.

d)



14 a) $f'(x) = -2x$; $f''(x) = -2$

Bei $x = 0$ liegt ein lokales Maximum vor. Da der Graph von links unten nach rechts unten verläuft und kein weiteres Maximum vorhanden ist, handelt es sich um ein globales Maximum. $f(0) = 2$. Also sind alle Funktionswerte kleiner als 2.

b) $f'(x) = x - 4x^3$; $f''(x) = 1 - 12x^2$

Bei $x_{1,2} = \pm 0,5$ liegen relative Maxima vor. Da der Graph von links unten nach rechts unten verläuft und keine weiteren Maxima vorhanden sind, sind $f(\pm 0,5) = \frac{1}{16} < 0,07$ globale Maxima. Also sind alle Funktionswerte kleiner als 0,07.

c) $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{4}x^6$; $f'(x) = 4x - \frac{3}{2}x^5$; $f''(x) = 4 - \frac{15}{2}x^2$

Bei $x_{1,2} = \pm 2$ liegen relative Maxima vor. Da der Graph von links unten nach rechts unten verläuft und keine weiteren Maxima vorhanden ist, sind $f(\pm 2) = 4$ globale Maxima. Also sind alle Funktionswerte kleiner als 4.

d) $f'(x) = (1-x) \cdot e^x$; $f''(x) = -xe^x$

Bei $x = 1$ liegt ein lokales Maximum vor. Da der Graph sich links der x -Achse nähert und für $x > 2$ unterhalb der x -Achse verläuft, muss $f(1) = e$ ein globales Maximum sein, d.h. alle Funktionswerte sind kleiner oder gleich e .

15 a) $f'(x) = 2x - 4$; $f''(x) = 2$

Die Funktion f hat bei $x = 2$ ein lokales Minimum. Der Graph verläuft von links oben nach rechts oben, daher handelt es sich um globales Minimum, d.h. $f(2) = 0$ ist globales Minimum. Also sind alle Funktionswerte von f größer oder gleich null.

b) $f'(x) = x^3 - 4x$; $f''(x) = 3x^2 - 4$

Die Funktion f hat bei $x_{1,2} = \pm 2$ lokale Minima und bei $x_3 = 0$ ein lokales Maximum. Der Graph verläuft von links oben nach rechts oben, daher handelt es sich bei $f(\pm 2)$ um zwei globale Minima, d.h. $f(\pm 2) = 1$ ist globales Minimum. Also sind alle Funktionswerte von f größer oder gleich 0.

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2$; $f'(x) = 2x^3 - 8x$; $f''(x) = 6x^2 - 8$

Die Funktion f hat bei $x_{1,2} = \pm 2$ lokale Minima und bei $x_3 = 0$ ein lokales Maximum. Der Graph verläuft von links oben nach rechts oben, daher handelt es sich bei $f(\pm 2)$ um zwei globale Minima, d.h. $f(\pm 2) = -8$ ist globales Minimum. Also sind alle Funktionswerte von f größer oder gleich -8 .

d) $f'(x) = e^x + (x-1) \cdot e^x = x \cdot e^x$; $f''(x) = (x+1) \cdot e^x$

Bei $x = 0$ liegt ein lokales Minimum vor. Da der Graph sich links der x -Achse nähert und für $x > 1$ oberhalb der x -Achse verläuft, muss $f(0) = -1$ ein globales Minimum sein, d.h. alle Funktionswerte sind größer oder gleich -1 .

16 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

17 Der Punkt $H(x_0|0)$ ist Hochpunkt des Graphen einer Funktion f , es gilt $f''(x_0) < 0$.

Um nachzuweisen, dass $H(x_0|0)$ ein Tiefpunkt des Graphen K_f der Funktion g mit $g(x) = -x^2 \cdot f(x)$ ist, müssen gelten: $g'(x_0) = 0$ und $g''(x_0) > 0$.

Notwendige Bedingung: $g'(x) = -2x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x)$.

An der Stelle x_0 gilt: $g'(x_0) = -2x_0 \cdot 0 - x_0^2 \cdot 0 = 0$

hinreichende Bedingung:

$g''(x) = -2 \cdot f(x) - 2x \cdot f'(x) - (2x \cdot f'(x) + x^2 \cdot f''(x))$

An der Stelle x_0 gilt:

$g''(x_0) = -2 \cdot 0 - 2x_0 \cdot 0 - (2x_0 \cdot 0 + x_0^2 \cdot f''(x_0)) = -x_0^2 \cdot f''(x_0)$.

Da $f''(x_0) < 0$ ist $g''(x_0) > 0$ und somit liegt bei $H(x_0|0)$ ein Tiefpunkt.

18 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

5 Berechnung von Wendestellen

Seite 104

Einstiegsaufgabe

Auf dem gezeigten Streckenabschnitt muss man aufgrund der Kurven abwechselnd das Motorrad nach links (Linkskurve) bzw. nach rechts (Rechtskurve) neigen. Wechselt man die Neigerichtung, wird das Motorrad aufgestellt und steht „gerade“, das heißt, es hat keinerlei Neigung.

Anhand des Streckenverlaufs kann man ungefähr angeben, an welcher Stelle das Motorrad die Richtung wechselt: dies ist beim Übergang von einer Rechts- in eine Linkskurve (oder andersherum).

Seite 105

1 a) Wendepunkte sind $W_1(1|-0,5)$ und $W_2(3|0)$.

b) Die Steigung im Wendepunkt $W_1(1|-0,5)$ beträgt etwa $\frac{3}{2}$.

Die Steigung im Wendepunkt $W_1(3|0)$ beträgt etwa -1 .

Seite 106

2 a) $f'(x) = 6x - 3x^2$; $f''(x) = 6 - 6x$; $f'''(x) = -6$

Die Nullstelle der zweiten Ableitung ist $x_0 = 1$;

$f'''(1) = -6 \neq 0$, folglich ist $x_0 = 1$ Wendestelle.

Das Bestimmen der y-Koordinate $y_W = f(1) = 2$ ergibt den Wendepunkt $W(1|2)$.

b) $f'(x) = 4x - \frac{4}{3}x^3$; $f''(x) = 4 - 4x^2$; $f'''(x) = -8x$

Die Nullstellen der zweiten Ableitung sind $x_1 = +1$ und $x_2 = -1$; $f'''(1) = -8 \neq 0$; $f'''(-1) = 8 \neq 0$.

Folglich sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ Wendestellen.

$f(1) = \frac{14}{3}$ und $f(-1) = \frac{14}{3}$ ergeben die Wendepunkte

$W_1(1|\frac{14}{3})$ und $W_2(-1|\frac{14}{3})$.

c) $f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$; $f'''(x) = 24x$

Die Nullstellen der zweiten Ableitung sind $x_1 = +1$ und $x_2 = -1$; $f'''(1) = 24 \neq 0$; $f'''(-1) = -24 \neq 0$,

Folglich sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ Wendestellen.

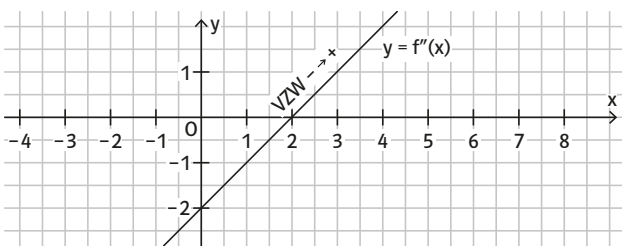
$f(1) = -5$ und $f(-1) = -5$ ergeben die Wendepunkte $W_1(1|-5)$ und $W_2(-1|-5)$.

3 a) $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$; $f''(x) = x - 2$;

Die Nullstelle der zweiten Ableitung ist $x_0 = 2$.

Die zweite Ableitungsfunktion ist linear und hat einen Vorzeichenwechsel an der Stelle $x_0 = 2$.

$f(2) = -\frac{8}{3}$; der Wendepunkt ist $W(2|-\frac{8}{3})$.



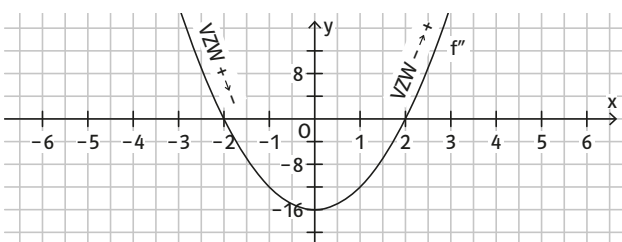
b) $f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - 16x$; $f''(x) = 4x^2 - 16$;

Die Nullstellen der zweiten Ableitung sind $x_1 = +2$ und $x_2 = -2$.

Der Graph der 2. Ableitung ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 = +2$ und $x_2 = -2$.

$f(2) = \frac{16}{3} - 32 = -\frac{80}{3}$; $f(-2) = \frac{16}{3} - 32 = -\frac{80}{3}$.

Die Wendepunkte sind $W_1(2|-\frac{80}{3})$ und $W_2(-2|-\frac{80}{3})$.



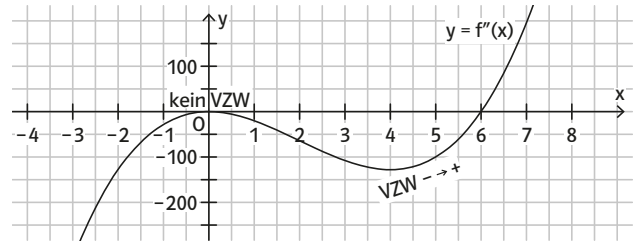
c) $f'(x) = x^4 - 8x^3$; $f''(x) = 4x^3 - 24x^2 = 4x^2(x - 6)$;

Die Nullstellen der zweiten Ableitung sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 6$.

Der Graph der zweiten Ableitung verläuft vom III. über den IV. zum I. Quadranten. Er hat bei $x = 0$ eine doppelte Nullstelle, also keinen Vorzeichenwechsel.

Bei $x = 6$ wechselt das Vorzeichen.

$f(6) = -1036,8$. Der Wendepunkt ist $W(6|-1036,8)$.



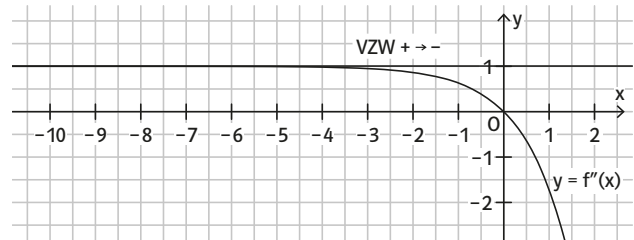
d) $f'(x) = x - e^x$; $f''(x) = 1 - e^x$;

Die Nullstelle der zweiten Ableitung ist $x_0 = 0$.

Der Graph der zweiten Ableitung verläuft nahe der Asymptote $y = 1$.

Für $x \rightarrow \infty$ geht $f''(x) \rightarrow -\infty$. Der Graph der zweiten Ableitung hat bei $x = 0$ Nullstelle mit VZW von $+$ nach $-$. $f(0) = -1$.

Der Wendepunkt ist $W(0|-1)$.

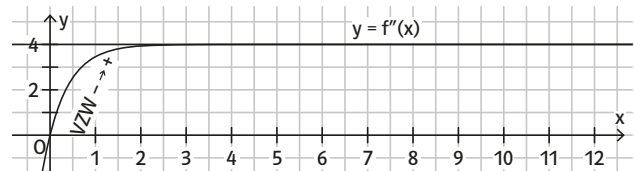


e) $f'(x) = 4x + 2e^{-2x}$; $f''(x) = 4 - 4e^{-2x}$;

Die Nullstelle der zweiten Ableitung ist $x_0 = 0$.

Für $x \rightarrow -\infty$ geht $f''(x) \rightarrow -\infty$. Der Graph der zweiten Ableitung hat im positiven Bereich die Asymptote $y = 4$. Der Graph hat bei $x = 0$ Nullstelle mit VZW von $-$ nach $+$. $f(0) = -1$.

Der Wendepunkt ist $W(0|-1)$.

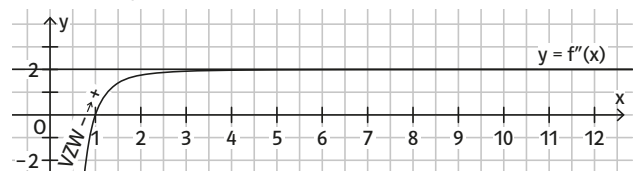


f) $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$; $f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$;

Die Nullstelle der zweiten Ableitung ist $x_0 = 1$.

Der Graph der Ableitung f' geht aus dem Graphen der Potenzfunktion $g(x) = \frac{1}{x^2}$ durch Spiegelung an der x-Achse und durch Verschiebung um zwei Einheiten nach oben hervor. Daher liegt bei $x = 1$ ein Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ vor. $f(1) = 0$.

Der Wendepunkt ist $W(1|0)$.



4 a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f''(x) = 6x - 6$; $f'''(x) = 6$;

$f''(x) = 0$ für $x = 1$; $f'''(1) \neq 0$; $f(1) = -2$.

Die Steigung an der Wendestelle beträgt $f'(1) = -3$.

Die Tangentengleichung in $W(1|-2)$ lautet

$y = -3(x - 1) - 2$ d.h. $y = -3x + 1$.

b) $f'(x) = 2x^3 - 6x$; $f''(x) = 6x^2 - 6$; $f'''(x) = 12x$;
 $f''(x) = 0$ für $x_1 = +1$ und $x_2 = -1$; $f'''(1) \neq 0$ und
 $f'''(-1) \neq 0$;

$f(1) = -2,5$ und $f(-1) = -2,5$.

Steigungen an den Wendestellen betragen: $f'(1) = -4$
und $f'(-1) = 4$.

Die Tangentengleichung in $W_1(1|-2,5)$ lautet
 $y = -4(x - 1) - 2,5$ d.h. $y = -4x + 1,5$.

Die Tangentengleichung in $W_2(-1|-2,5)$ lautet
 $y = 4(x + 1) - 2,5$ d.h. $y = 4x + 1,5$.

c) $f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2$; $f''(x) = 2x^3 - 8x$; $f'''(x) = 6x^2 - 8$;

$f''(x) = 0$ für $x_1 = +2$; $x_2 = -2$ und $x_3 = 0$.

$f'''(2) = 16 \neq 0$; $f'''(-2) = 16 \neq 0$ und $f'''(0) = -8 \neq 0$;

$f(2) = -\frac{112}{15}$; $f(-2) = -\frac{112}{15}$; $f(0) = 0$.

Die Steigung an der Wendestellen beträgt $f'(2) = -8$;
 $f'(-2) = -8$ und $f'(0) = 0$.

Die Tangentengleichung in $W_1(2|-\frac{112}{15})$ lautet
 $y = -8(x - 2) - \frac{112}{15}$ d.h. $y = -8x + \frac{128}{15}$.

Die Tangentengleichung in $W_2(-2|-\frac{112}{15})$ lautet
 $y = -8(x + 2) - \frac{112}{15}$ d.h. $y = -8x - \frac{128}{15}$.

Die Tangentengleichung in $W_3(0|0)$ lautet $y = 0$.

Der Wendepunkt ist ein Sattelpunkt.

d) $f'(x) = 3 \cdot (x - 2)^2$; $f''(x) = 6 \cdot (x - 2)$; $f'''(x) = 6$

$f''(x) = 0$ für $x_0 = 2$; $f'''(2) = 6 \neq 0$; $f(2) = -1$.

Die Steigung an der Wendestelle ist $f'(2) = 0$.

Die Tangentengleichung in $W(2|-1)$ lautet $y = -1$.

Der Wendepunkt ist ein Sattelpunkt.

e) $f'(x) = (x + 1) \cdot e^x$; $f''(x) = (x + 2) \cdot e^x$; $f'''(x) = (x + 3) \cdot e^x$;

$f''(x) = 0$ für $x = -2$; $f'''(-2) = e^{-2} \neq 0$;

$f(-2) = -2e^{-2} = -\frac{2}{e^2}$.

Die Steigung an der Wendestelle beträgt $f'(-2) = -e^{-2}$.

Die Tangentengleichung in $W(-2|-\frac{2}{e^2})$ lautet

$y = -\frac{1}{e^2}(x + 2) - \frac{2}{e^2}$ d.h. $y = -\frac{1}{e^2} \cdot x - \frac{4}{e^2}$.

f) $f'(x) = (1 - 2x) \cdot e^{-2x}$; $f''(x) = -2 \cdot (2 - 2x) \cdot e^{-2x}$;

$f''(x) = 0$ für $x = 1$; der lineare Faktor $(2 - 2x)$ hat einen
Vorzeichenwechsel an der Stelle $x = 1$, der Rest bleibt
negativ.

$f(1) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$.

Die Steigung an der Wendestelle $x = 1$ beträgt

$f'(1) = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$.

Die Tangentengleichung in $W(1|\frac{1}{e^2})$ lautet

$y = -\frac{1}{e^2}(x - 1) + \frac{1}{e^2}$ d.h. $y = -\frac{1}{e^2} \cdot x + \frac{2}{e^2}$.

5 a) $W_1(0|1)$ und $W_2(\pi|1)$

b) $W_1(\frac{\pi}{2}|-3)$ und $W_2(\frac{3\pi}{2}|-3)$

c) $W_1(\frac{\pi}{4}|1)$ und $W_2(\frac{3\pi}{4}|1)$

d) $W_1(0|-1,5)$ und $W_2(2|-1,5)$

e) $W_1(0|-\frac{1}{2})$ und $W_2(3|-\frac{1}{2})$

f) $W_1(0|0)$ und $W_2(\pi|\pi)$

6 Wenn ein Graph durchgängig gleich gekrümmt ist,
besitzt er keinen Wendepunkt.

a) $f'(x) = 2x$; $f''(x) = 2 > 0$; der Graph der Funktion f ist
linksgekrümmt.

b) $f'(x) = 2 - 2x$; $f''(x) = -2 < 0$; der Graph der Funktion f
ist rechtsgekrümmt.

c) $f'(x) = 4x^3 - 2$; $f''(x) = 12x^2 > 0$; der Graph der Funk-
tion f ist linksgekrümmt.

d) $f'(x) = -e^x$; $f''(x) = -e^x < 0$; der Graph der Funktion f
ist rechtsgekrümmt.

e) $f'(x) = 1 - e^{-x}$; $f''(x) = e^{-x} > 0$; der Graph der Funktion f
ist linksgekrümmt.

f) $f'(x) = \cos(x) + 2x$; $f''(x) = -\sin(x) + 2 > 0$; der Graph
der Funktion f ist linksgekrümmt.

7 Berechnung der Wendepunkte:

$f(x) = 6x^2 - x^4$; $f'(x) = 12x - 4x^3$; $f''(x) = 12 - 12x^2$;

$f'''(x) = -24x$;

$f''(x) = 0$ ergibt $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. $f'''(1) = -24 \neq 0$ und
 $f'''(-1) = 24 \neq 0$.

$f(1) = 5$ und $f(-1) = 5$, die beiden Wendepunkte sind
 $W_1(1|5)$ und $W_2(-1|5)$.

Die Steigung der Wendetangenten in $W_1(1|5)$ beträgt
 $m_1 = f'(1) = 8$.

Die Steigung der Wendetangenten in $W_2(-1|5)$ beträgt
 $m_2 = f'(-1) = -8$.

Die Gleichung der Wendetangente in W_1 lautet

$y = 8(x - 1) + 5$ d.h. $t_1: y = 8x - 3$.

Die Gleichung der Wendetangente in W_2 lautet:

$y = -8(x + 1) + 5$ d.h. $t_2: y = -8x - 3$.

$t_1 = t_2$ d.h. $8x - 3 = -8x - 3$ d.h. $x = 0$. Der gemein-
same Punkt ist $S(0|-3)$.

Der Graph der Funktion f ist achsensymmetrisch zur der
y-Achse. Daher sind die beiden Wendetangenten eben-
falls achsensymmetrisch zueinander. Folglich muss der
gemeinsame Punkt S auf der y-Achse liegen.

8 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom
Schulbuch.

9 A: Die Aussage ist falsch: Der Graph von f ist in die-
sem Intervall linksgekrümmt, da für diese Werte $f''(x)$
positiv ist.

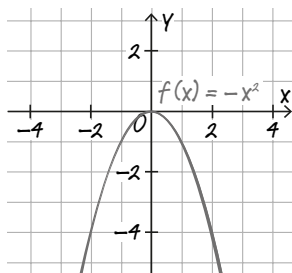
Aussage B: Der Graph der Ableitung f' hat in gezeich-
neten Bereich $[0,3; 4,5]$ drei Nullstellen und alle drei
Nullstellen haben einen VZW. Folglich hat der Graph der
Funktion f drei Wendepunkte

Aussage C: Der Graph der zweiten Ableitung f'' hat eine
Nullstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x = 0$. Beim Ab-
leiten der Funktion f' fallen die Konstanten weg. Daher
kann man nicht entscheiden, welche Steigung der Graph
der Funktion f im Ursprung hat. Folglich ist C nicht ent-
scheidbar.

Aussage D: Die Aussage ist so falsch bzw. nur zu einem
Teil richtig. Die Werte der 2. Ableitung (f'') sind im Inter-
vall $[0; 2]$ nicht negativ (denn $f''(0) = 0$ und $f''(2) = 0$).
Daher ist die Ableitung f' in dem Intervall monoton wach-
send, aber nicht streng monoton wachsend. Letzteres gilt
nur für das offene Intervall $]0; 2[$.

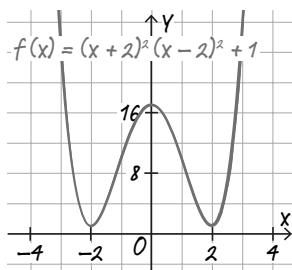
Aussage E: Die Aussage ist falsch: In einer Umgebung
von $x = 0,8$ ist $f''(x)$ positiv, der Graph von f ändert dort
sein Krümmungsverhalten also nicht.

10 a) $f(x) = -x^2$,
eine nach unten
geöffnete Normalparabel.

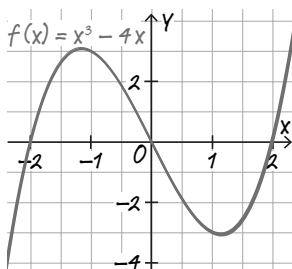


b) Eine Polynomfunktion
mit 2 Wendepunkten hat
(mindestens) den Grad
vier:

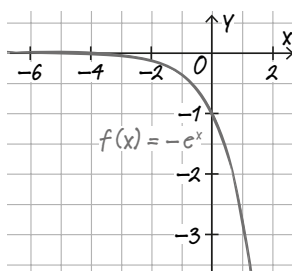
$f(x) = (x+2)^2(x-2)^2 + 1$
erfüllt alle Anforderun-
gen.



c) Eine symmetrische
Funktion dritten Grades
genügt:
 $f(x) = x^3 - 4x$.



d) $f(x) = -e^x$ hat die
Ableitungen $f'(x) = -e^x$
und $f''(x) = -e^x$, die nur
negative Funktionswerte
haben.



Seite 107

11 a) $f'(x) = 16x^3 - 12x$; $f''(x) = 48x^2 - 12$; $f'''(x) = 96x$;
 $f''(x) = 0$ ergibt $x_1 = +\frac{1}{2}$ und $x_2 = -\frac{1}{2}$; $f'''(\frac{1}{2}) = 48 \neq 0$ und
 $f'''(-\frac{1}{2}) = -48 \neq 0$.

Die kleinste Steigung für $x > 0$ beträgt $m_1 = f'(\frac{1}{2}) = -4$.

Die größte Steigung für $x < 0$ beträgt $m_2 = f'(-\frac{1}{2}) = 4$.

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}$ und $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}$,

Die Gleichung der Wendetangente in $W_1(\frac{1}{2} | -\frac{5}{4})$ lautet:

$y = -4(x - \frac{1}{2}) - \frac{5}{4}$ d.h. $t_1: y = -4x + \frac{3}{4}$.

Die Gleichung der Wendetangente in $W_2(-\frac{1}{2} | -\frac{5}{4})$ lautet

$y = 4(x + \frac{1}{2}) - \frac{5}{4}$ d.h. $t_2: y = 4x + \frac{3}{4}$.

b) $f'(x) = x^3 - 12x$; $f''(x) = 3x^2 - 12$; $f'''(x) = 6x$;
 $f''(x) = 0$ ergibt $x_1 = +2$ und $x_2 = -2$; $f'''(2) = 12 \neq 0$ und
 $f'''(-2) = -12 \neq 0$.

Die kleinste Steigung für $x > 0$ beträgt $m_1 = f'(2) = -16$.

Die größte Steigung für $x < 0$ beträgt $m_2 = f'(-2) = 16$.
 $f(2) = -17$ und $f(-2) = -17$.

Die Gleichung der Wendetangente in $W_1(2 | -17)$ lautet
 $y = -16(x - 2) - 17$ d.h. $t_1: y = -16x + 15$.

Die Gleichung der Wendetangente in $W_2(-2 | -17)$ lautet
 $y = 16(x + 2) - 17$ d.h. $t_2: y = 16x + 15$.

c) $f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 1$; $f''(x) = x^3 - 3x^2$; $f'''(x) = 3x^2 - 6x$;
 $f''(x) = 0$ ergibt $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.

$f'''(0) = 0$, f'' hat keinen Vorzeichenwechsel an der Stelle
0, daher dort auch keine Wendestelle.

$f'''(3) = 9 \neq 0$; die Stelle $x_2 = 3$ ist Wendestelle.

Die kleinste Steigung beträgt $m = f'(3) = -5,75$.

$f(3) = -5,1$

Die Gleichung der Wendetangente in $W(3 | -5,75)$ lautet
 $y = -5,75 \cdot (x - 3) - 5,1$ d.h. $t: y = -5,75x + 12,15$.

d) $f'(x) = \cos(x)$; $f''(x) = -\sin(x)$; $f'''(x) = -\cos(x)$

Die Nullstellen von f'' sind in diesem Intervall an den
Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \pi$. Es gilt $f'''(0) \neq 0$ und
 $f'''(\pi) \neq 0$, also sind dort Wendestellen.

Bei $x_1 = 0$ ist der größte Steigung 1; bei $x_2 = \pi$ ist die
kleinste Steigung -1.

Wendetangenten:

Die y-Koordinaten aller Wendestellen sind $y = 0$.

Die Gleichung der Wendetangenten in $W_1(0 | 0)$ lautet
 $y = x$.

Die Gleichung der Wendetangenten in $W_2(\pi | 0)$ lautet
 $y = -x + \pi$.

e) $f'(x) = -\sin(x)$; $f''(x) = -\cos(x)$; $f'''(x) = \sin(x)$

Nullstellen von f'' an den Stellen $x_1 = \frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. An

diesen Stellen gilt jeweils $f''' \neq 0$, also sind $x_1 = \frac{\pi}{2}$ und
 $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ Wendestellen.

Bei $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ist die kleinste Steigung -1; bei $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ ist
die größte Steigung 1.

Wendetangenten:

y-Koordinaten aller Wendestellen sind $y = 0$.

Die Gleichung der Wendetangenten in $W_1(\frac{\pi}{2} | 0)$ lautet
 $y = -x + \frac{\pi}{2}$.

Die Gleichung der Wendetangenten in $W_2(\frac{3\pi}{2} | 0)$ lautet
 $y = x - \frac{3\pi}{2}$.

f) $f'(x) = x - e^x$; $f''(x) = 1 - e^x$; $f'''(x) = -e^x$

$f''(x) = 0$ ergibt $x_0 = 0$.

$f'''(1) = -1 \neq 0$, die Stelle $x_0 = 0$ ist eine Wendestelle.

Der Graph von f fällt streng monoton. Da die Steigung
überall negativ ist, ist an der Wendestelle der kleinste
absolute Wert, d.h. der größte Wert zu finden. Dieser be-
trägt $m = f'(0) = -1$.

$f(0) = -1$.

Die Gleichung der Wendetangente in $W(0 | -1)$ lautet
 $t: y = -1 \cdot (x - 0) - 1$, also $t: y = -x - 1$.

12 Aussage A: Wahr. f' hat an den Stellen $x_1 = -3$, $x_2 = 0$
und $x_3 = 3$ jeweils eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel.
Aussage B: Falsch. Es ist $f'(0) = 0$ mit einem Vorzeichen-
wechsel von + nach -. Der Graph von f hat einen Hoch-
punkt an der Stelle $x = 0$.

Aussage C: Falsch. In $I = [-2; -1]$ ist $f'(x) > 0$, f ist in I
streng monoton wachsend und daher $f(-2) < f(-1)$.

Aussage D: Falsch. An der Stelle $x = 3$ hat f' eine Null-
stelle mit Vorzeichenwechsel von - nach +. Der Graph von
 f hat hier einen Tiefpunkt.

Aussage E: Wahr. Der Graph der Ableitung f' ist monoton wachsend für $x < -1,75$ und $x > 1,75$; monoton fallend im Intervall $]-1,75; 1,75[$.

Daher gilt für ihre Ableitungen $(f')' = f''$:

$f''(x) > 0$ für $x < -1,75$; $f''(x) < 0$, für x aus dem Intervall $]-1,75; 1,75[$ und $f''(x) > 0$ für $x > 1,75$. Daraus ergeben sich zwei Nullstellen für f'' . Diese Stellen sind auch Wendestellen, denn die Funktion f hat drei Extremwerte (zwei Tiefpunkte und einen Hochpunkt dazwischen); zwischen diesen Punkten ändert sich die Krümmung zweimal.

Aussage F: Wahr. Im $[-1; 1]$ fällt der Graph der Ableitung f' . Folglich ist in diesem Bereich $f''(x) < 0$. Daher ist der Graph der Funktion f rechtsgekrümmt.

13 Aussage A ist richtig, da die zweite Ableitung einer Polynomfunktion 2. Grades immer eine von 0 verschieden konstante Zahl ist.

Aussage B ist richtig, da die zweite Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades immer eine lineare Funktion. Lineare Funktionen schneiden die x -Achse.

Aussage C ist falsch. Die zweite Ableitung einer Polynomfunktion mit Grad n hat zwar den Grad $n - 2$, jedoch hat nicht jede Polynomfunktion $(n - 2)$ -ten Grades genau $n - 2$ Nullstellen. Sie hat höchstens $n - 2$ Nullstellen, von daher muss die korrekte Aussage C heißen: Der Graph einer Polynomfunktion n -ten Grades hat höchstens $n - 2$ Wendepunkte.

Aussage D ist richtig, bei einem Maximum ist der Graph der Funktion rechtsgekrümmt, bei einem Minimum ist der Graph der Funktion linksgekrümmt, deshalb muss dazwischen ein Krümmungswechsel stattfinden, also ein Wendepunkt liegen.

Aussage E ist falsch. Betrachtet man zum Beispiel die Funktion $f(x) = x^3(x - 2)$ mit $f''(x) = 12x^2 - 12x$. Der Graph der Funktion f hat die Wendepunkte $W_1(0|0)$ (auch Sattelpunkt) und $W_2(1|-1)$. Zwischen W_1 und W_2 gibt es keinen Extrempunkt.

14 a) $f(x) = x^3 + bx^2$; $f'(x) = 3x^2 + 2bx$; $f''(x) = 6x + 2b$; $f'''(x) = 6$

Die Nullstelle der zweiten Ableitung f'' ist $x_0 = -\frac{b}{3}$,

$$f'''(-\frac{b}{3}) = 6 \neq 0.$$

Somit hat die Funktion f immer eine Wendestelle.

b) $f(x) = ax^3 + bx^2$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$; $f''(x) = 6ax + 2b$; $f'''(x) = 6a$.

Die Nullstelle der zweiten Ableitung f'' ist $x_0 = -\frac{b}{3a}$,

$$f'''(-\frac{b}{3a}) = 6a \neq 0, \text{ da } a \neq 0.$$

$$2 = -\frac{b}{3a}, \text{ wenn } b = -6a \text{ gilt.}$$

Die Variable b muss das -6 -Fache der Variablen a sein, damit die Funktion f eine Wendestelle hat.

15 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

16 a) $g'(x) = f'(x) + 1$; $g''(x) = f''(x)$; $g'''(x) = f'''(x)$.

Folglich ist auch $g''(3) = 0$ und $g'''(3) \neq 0$.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2$ und $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + x - 2$ haben dieselbe Wendestelle $x_0 = 3$.

b) $g'(x) = 2 \cdot f'(x) + 2$; $g''(x) = 2 \cdot f''(x)$; $g'''(x) = 2 \cdot f'''(x)$. Da $f''(3) = 0$, folgt auch $g''(3) = 2 \cdot f''(3) = 0$. Wenn $f'''(3) \neq 0$, so ist auch $g'''(3) \neq 0$. Daher hat auch die Funktion g bei $x = 3$ eine Wendestelle.

Beispiel $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ und $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 2x$ haben dieselbe Wendestelle $x_0 = 3$.

c) $g'(x) = 5 - f'(x)$; $g''(x) = -f''(x)$; $g'''(x) = -f'''(x)$.

Wenn $f''(3) = 0$, ist auch $g''(3) = 0$.

Wenn $f'''(3) \neq 0$, ist auch $g'''(3) \neq 0$.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2$ und $g(x) = 5x - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2$ haben dieselbe Wendestelle $x_0 = 3$.

17 Da $S(x_0|0)$ ein Sattelpunkt ist, gilt $f(x_0) = 0$;

$$f'(x_0) = 0; f''(x_0) = 0; f'''(x_0) \neq 0.$$

$$g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x); g''(x) = 2f'(x) + x \cdot f''(x);$$

$$g'''(x) = 3f''(x) + x \cdot f'''(x)$$

$$g(x_0) = x_0 \cdot f(x_0) = 0$$

$$g'(x_0) = f(x_0) + x_0 \cdot f'(x_0) = 0$$

$$g''(x_0) = 2 \cdot f'(x_0) + x_0 \cdot f''(x_0) = 0$$

$$g'''(x_0) = 3 \cdot f''(x_0) + x_0 \cdot f'''(x_0) \neq 0, \text{ falls } x_0 \neq 0.$$

Für $x_0 \neq 0$ ist $S(x_0|0)$ auch ein Sattelpunkt des Graphen von g .

18 Punktsymmetrisch heißt $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Ein Gegenbeispiel zeigt, dass nicht jede Polynomfunktion vom Grad 3 punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

$f(x) = x^3 + x^2$ ist eine Polynomfunktion 3. Grades.

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$f(-1) = -1 + 1 = 0$$

$$f(1) \neq -f(-1)$$

Also ist die Polynomfunktion $f(x) = x^3 + x^2$ nicht punktsymmetrisch zum Ursprung.

19 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

6 Vom Funktionsterm zum Graphen

Seite 108

Einstiegsaufgabe

Bei der linken Abbildung passen Funktionsterm und Graph nicht zueinander. Dies kann man auf den ersten Blick anhand der Symmetrie erkennen: Der Graph ist achsensymmetrisch zur y -Achse. Im Funktionsterm kommen aber sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vor, was gegen Achsensymmetrie zur y -Achse spricht. Bei der rechten Abbildung legt der Funktionsterm einen symmetrischen Graphen nahe. Der Schnittpunkt des Graphen mit der y -Achse liegt im Punkt $P(0|8)$. Die Funktionswerte gehen für $x \rightarrow \pm \infty$ gegen $-\infty$. Hier könnten Funktionsterm und Graph zusammenpassen. Allerdings ist die Skizze sehr grob gezeichnet.

Seite 110

1 $f'(x) = 8x^3 + 21x^2 + 10x$; $f''(x) = 24x^2 + 42x + 10$;
 $f'''(x) = 48x + 42$

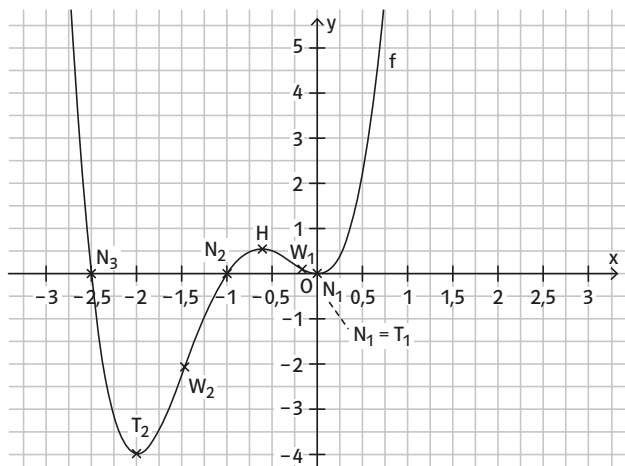
Achsenschnittpunkte: $N_1(0|0)$; $N_2(-1|0)$; $N_3(-2,5|0)$

Extrempunkte: $T_1(0|0)$; $T_2(-2|-4)$; $H(-0,625|0,55)$

Wendepunkte (Näherungswerte): $W_1(-0,28|0,26)$;

$W_2(-1,47|-2,07)$

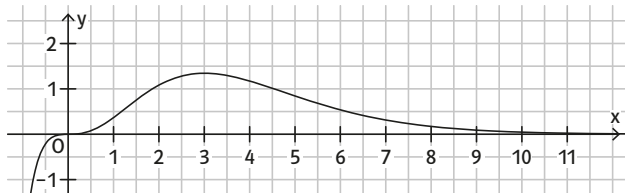
Skizze:



2 a) Für $x \rightarrow \infty$ geht $f(x) \rightarrow 0$.

Für $x \rightarrow -\infty$ geht $f(x) \rightarrow -\infty$.

Die Funktion f hat bei $x = 0$ eine dreifache Nullstelle.

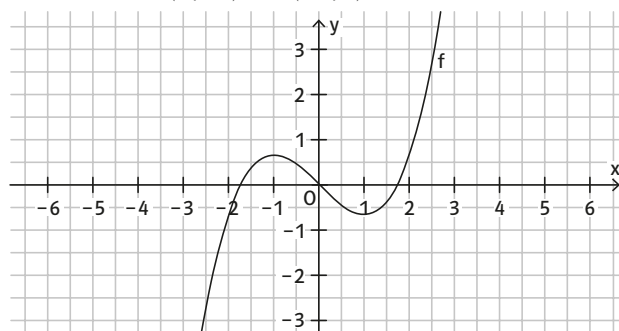


b) Extrempunkte: $f'(x) = (3x^2 - x^3) \cdot e^{-x} = (3 - x) \cdot x^2 \cdot e^{-x}$
 Die Ableitung hat eine doppelte Nullstelle ohne VZW bei $x_1 = 0$, ergibt einen Sattelpunkt im Ursprung. Sie hat ferner bei $x_2 = 3$ eine Nullstelle, deren Vorzeichen von + nach - wechselt (siehe Tabelle).

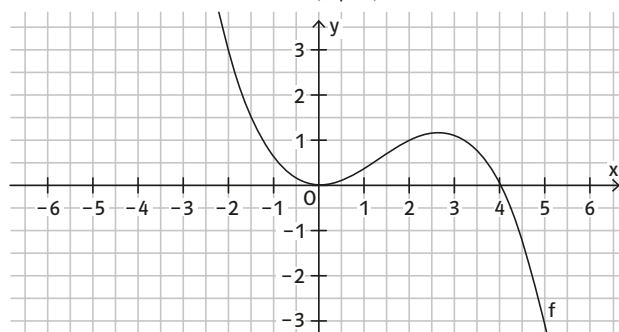
	$x < 0$	$[0; 3]$	$x > 3$
$u(x) = 3 - x$	+	+	-
$v(x) = x^2 \cdot e^{-x}$	+	+	+
$f'(x) = u(x) \cdot v(x)$	+	+	-

Der Graph der Funktion f hat einen Hochpunkt bei $x = 3$.
 y -Wert: $y_W = f(3) = \frac{27}{e^3} \approx 1,34$. Ein Kästchen in der Skizze beträgt 0,5 cm.

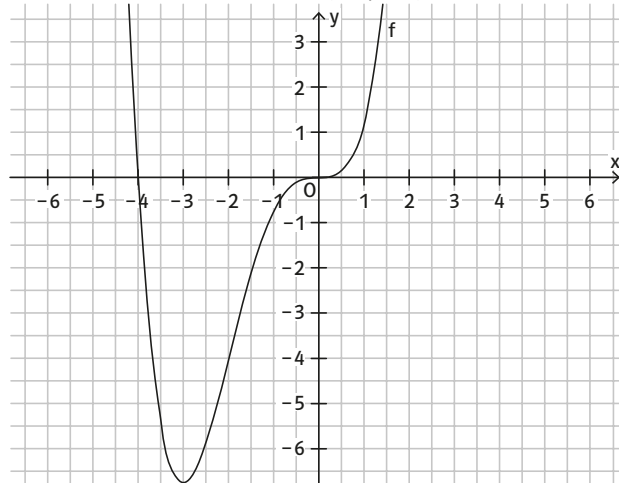
3 a) Symmetrie zum Ursprung; $N_1(0|0) = S$; $N_2(\sqrt{3}|0)$;
 $N_3(-\sqrt{3}|0)$; $T(1|-\frac{2}{3})$; $H(-1|\frac{2}{3})$



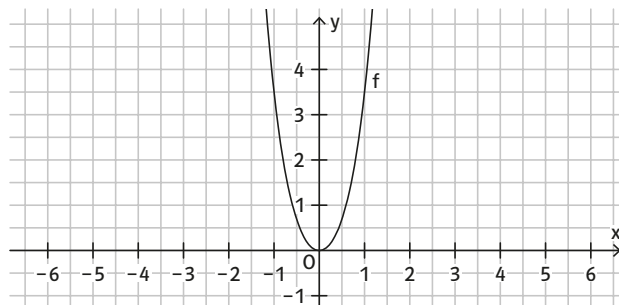
b) $N_1(0|0) = T$; $N_2(4|0)$; $H(\frac{8}{3}|\frac{32}{27})$

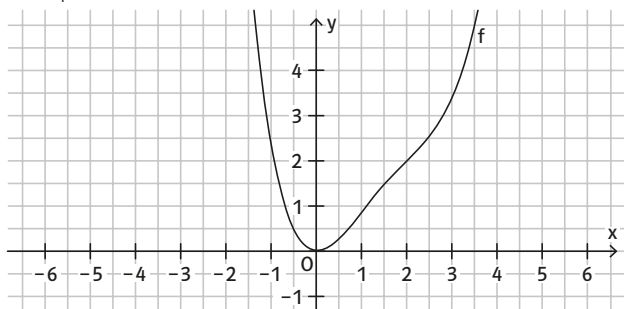


c) $N_1(0|0) = S$; $N_2(-4|0)$; $T(-3|-\frac{27}{4})$

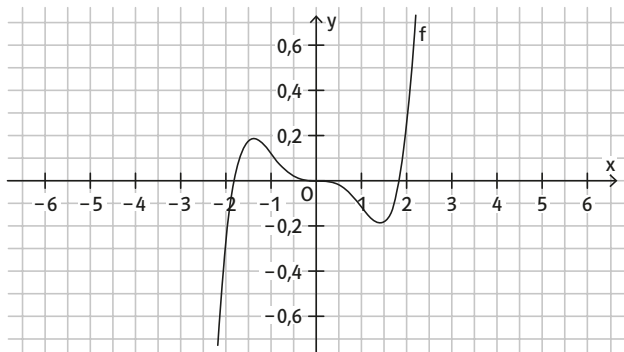


d) Symmetrie zur y-Achse; $T(0|0)$



e) $N_1(0|0) = T$ 

f) Symmetrie zum Ursprung; $N_1(0|0) = S$; $N_2(\frac{1}{3}\sqrt{30}|0)$; $N_3(-\frac{1}{3}\sqrt{30}|0)$; $T(\sqrt{2}|- \frac{2}{15}\sqrt{2})$; $H(-\sqrt{2}|\frac{2}{15}\sqrt{2})$

4 a) $f(x) = x^3 - x$

Symmetrie: Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da der ausmultiplizierte Funktionsterm nur Potenzen von x mit ungeraden Exponenten enthält.

Globales Verhalten: Der Term mit der höchsten Potenz ist x^3 , wegen des positiven Vorzeichens und der ungeraden Hochzahl verläuft der Graph von links unten nach rechts oben.

Schnittpunkte mit den Achsen: $x \cdot (x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm 1$, d.h. der Graph schneidet die x -Achse in den Punkten $N_2(1|0)$, $N_3(-1|0)$ und beide Achsen im Punkt $N_1(0|0)$.

Extrempunkte: $f'(x) = 3x^2 - 1$; $f''(x) = 6x$

$3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{4,5} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ sind mögliche Extremstellen.

Überprüfen mit der 2. Ableitung: $f''(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 2\sqrt{3} > 0$, d.h.

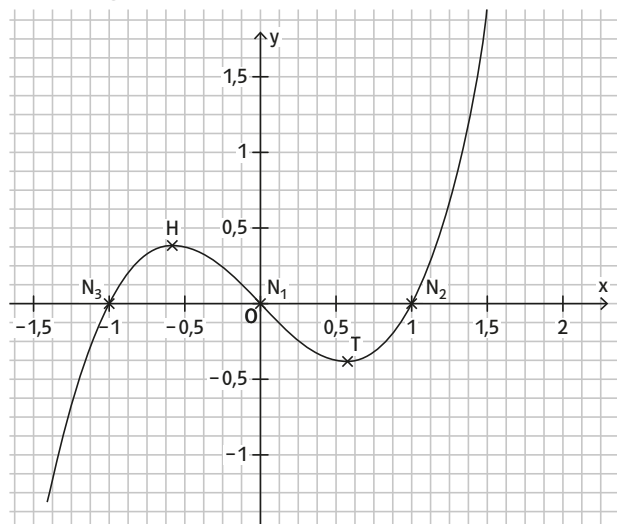
Minimum bei $x_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und $f''(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -2\sqrt{3} < 0$, d.h.

Maximum bei $x_5 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

y -Koordinaten: $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$, d.h. $T(\frac{\sqrt{3}}{3}|- \frac{2\sqrt{3}}{9})$ und

$f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, d.h. $H(-\frac{\sqrt{3}}{3}|\frac{2\sqrt{3}}{9})$

Zeichnung:

b) $f(x) = 3x^2 - x^3$

Symmetrie: Der Graph von f ist weder zur y -Achse noch zum Ursprung symmetrisch, da der ausmultiplizierte Funktionsterm sowohl Potenzen von x mit geraden als auch mit ungeraden Exponenten enthält.

Globales Verhalten: Der Term mit der höchsten Potenz ist $-x^3$, wegen des negativen Vorzeichens und der ungeraden Hochzahl verläuft der Graph von links oben nach rechts unten.

Schnittpunkte mit den Achsen: $x^2 \cdot (3 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (doppelt) und $x_2 = 3$, d.h. der Graph schneidet die x -Achse in den Punkten $N_2(3|0)$ und berührt beide Achsen im Punkt $N_1(0|0)$.

Extrempunkte: $f'(x) = 6x - 3x^2$; $f''(x) = 6 - 6x$

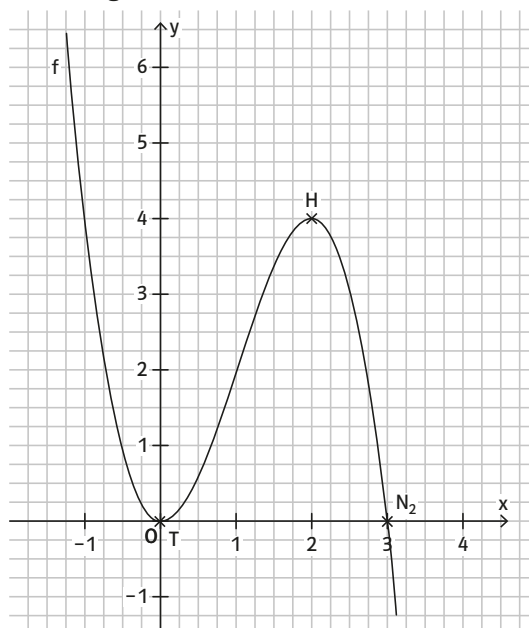
$6x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x(2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_3 = 2$ sind mögliche Extremstellen.

Überprüfen mit der 2. Ableitung: $f''(0) = 6 > 0$, d.h.

Minimum bei $x_1 = 0$ und $f''(2) = -12 < 0$, d.h. Maximum bei $x_3 = 2$.

y -Koordinaten: $T(0|0)$ und $f(2) = 4$, d.h. $H(2|4)$.

Zeichnung:



c) $f(x) = x^4 - 4x^2$

Symmetrie: Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y -Achse, da der ausmultiplizierte Funktionsterm nur Potenzen von x mit geraden Exponenten enthält.

Globales Verhalten: Der Term mit der höchsten Potenz ist x^4 , wegen des positiven Vorzeichens und der geraden Hochzahl verläuft der Graph von links oben nach rechts oben.

Schnittpunkte mit den Achsen: $x^2 \cdot (x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (doppelt) und $x_{2,3} = \pm 2$, d.h. der Graph schneidet die x -Achse in den Punkten $N_2(2|0)$ und $N_3(-2|0)$ und berührt beide Achsen im Punkt $N_1(0|0)$.

Extrempunkte: $f'(x) = 4x^3 - 8x$; $f''(x) = 12x^2 - 8$

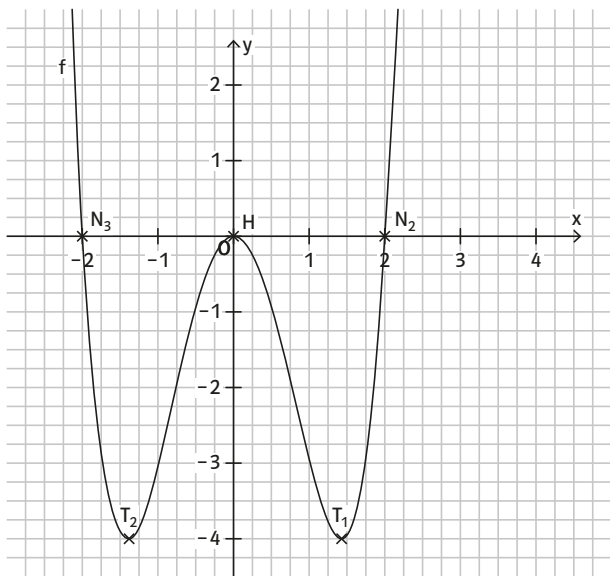
$4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_{4,5} = \pm\sqrt{2}$ sind mögliche Extremstellen.

Überprüfen mit der 2. Ableitung: $f''(0) = -8 < 0$, d.h. Maximum bei $x_1 = 0$ und $f''(\pm\sqrt{2}) = 16 > 0$, d.h. Minima bei $x_{4,5} = \pm\sqrt{2}$.

y -Koordinaten: $H(0|0)$ und $f(\pm\sqrt{2}) = -4$, d.h.

$T_1(\sqrt{2}|-4)$ und $T_2(-\sqrt{2}|-4)$.

Zeichnung:



d) $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^5$

Symmetrie: Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da der ausmultiplizierte Funktionsterm nur Potenzen von x mit ungeraden Exponenten enthält.

Globales Verhalten: Der Term mit der höchsten Potenz ist $-\frac{1}{2}x^5$, wegen des negativen Vorzeichens und der ungeraden Hochzahl verläuft der Graph von links oben nach rechts unten.

Schnittpunkte mit den Achsen: $\frac{1}{2}x^3(4 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (dreifach) und $x_{2,3} = \pm 2$, d.h. der Graph schneidet die x -Achse in den Punkten $N_1(0|0)$, $N_2(2|0)$ und $N_3(-2|0)$.

Extrempunkte: $f'(x) = 6x^2 - \frac{5}{2}x^4$; $f''(x) = 12x - 10x^3$

$6x^2 - \frac{5}{2}x^4 = 0 \Leftrightarrow x^2(6 - \frac{5}{2}x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und

$x_{4,5} = \pm 2\sqrt{\frac{3}{5}}$ sind mögliche Extremstellen.

Überprüfen mit dem VZW-Kriterium (oder mit der Argumentation der dreifachen Nullstelle): $f'(-1) = \frac{7}{2} > 0$ und $f'(1) = \frac{7}{2} > 0$ d.h. kein VZW, also ist $x_1 = 0$ keine Extremstelle, der Graph hat bei $N_1(0|0)$ einen Sattelpunkt.

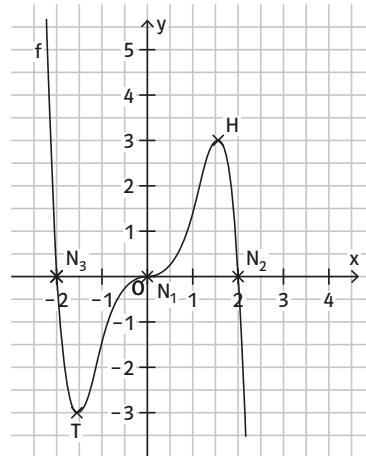
$f''(2\sqrt{\frac{3}{5}}) = -24\sqrt{\frac{3}{5}} > 0$, d.h. Maximum bei $x_5 = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$ und

$f''(-2\sqrt{\frac{3}{5}}) = 24\sqrt{\frac{3}{5}} < 0$, d.h. Minimum bei $x_4 = -2\sqrt{\frac{3}{5}}$.

y -Koordinaten: $f(2\sqrt{\frac{3}{5}}) \approx 2,98$, d.h. $H(2\sqrt{\frac{3}{5}}|2,98)$ und

$f(-2\sqrt{\frac{3}{5}}) \approx -2,98$ $T(-2\sqrt{\frac{3}{5}}|-2,98)$.

Zeichnung:



Seite 111

5 (1) gehört zu Graph B, erkennbar an den Nullstellen sowie am Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$.

(2) gehört zu keinem der gezeichneten Graphen.

(3) gehört zu Graph A, erkennbar am Schnittpunkt mit der y -Achse $S(0|-4)$, an den Nullstellen sowie an der nach oben geöffneten Parabel.

(4) gehört zu Graph C, erkennbar an den Nullstellen sowie am Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$.

6 a) Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 1$; $f''(x) = 6x$; $f'''(x) = 6$
Schnittpunkte mit der x -Achse

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0$.

Lösungen: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$

$N_1(0|0)$; $N_2(-1|0)$; $N_3(1|0)$

Mögliche Extremstellen:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$

Lösungen: $x_4 = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,58$; $x_5 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \approx -0,58$

Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_4 = \sqrt{\frac{1}{3}}$:

$f''(\sqrt{\frac{1}{3}}) = 6\sqrt{\frac{1}{3}} > 0$. Minimum bei $x_4 = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

$f(\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{-2\sqrt{3}}{9} \approx -0,38$; $T(\sqrt{\frac{1}{3}}|-0,38)$.

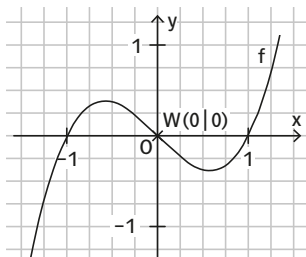
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_5 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$:

$f''(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = -6\sqrt{\frac{1}{3}} < 0$. Maximum bei $x_5 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$.

$f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0,38$; $H(-\sqrt{\frac{1}{3}}|0,38)$.

Mögliche Wendestellen:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0.$$

Lösung: $x_1 = 0$.Untersuchung der möglichen Wendestelle $x_1 = 0$:
 $f'''(0) = 6 \neq 0$. Wendestelle bei $x_1 = 0$. $W(0|0)$


b) $f'(x) = 3x^2 - 6x$;

$f''(x) = 6x - 6$; $f'''(x) = 6$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$x_1 = 0$; $x_2 = 3$

$N_1(0|0)$ und $N_2(3|0)$

Extrempunkte:

$3x^2 - 6x = 0$, falls $x_1 = 0$

oder $x_3 = 2$

 $f''(2) = 6 > 0$, also Tiefpunkt, $y_T = f(2) = -4$; $T(2|-4)$
 $f''(0) = -6 < 0$, also Hochpunkt; $y_H = f(0) = 0$; $H(0|0)$

Wendepunkte:

$6x - 6 = 0$, falls $x_4 = 1$; $f'''(1) = 6 \neq 0$; also Wendepunkt.

$y_w = f(1) = -2$; Wendepunkt $W(1|-2)$.

c) $f'(x) = 3x^2 - x^3$;

$f''(x) = 6x - 3x^2$;

$f'''(x) = 6 - 6x$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$x_1 = 0$; $x_2 = 4$

$N_1(0|0)$ und $N_2(4|0)$

Extrempunkte:

$3x^2 - x^3 = x^2(3 - x) = 0$,

falls $x_1 = 0$ oder $x_3 = 3$

 $f''(3) = -9 < 0$, also Hochpunkt,

$y_H = f(3) = 6,75$;

$H(3|6,75)$

 $f''(0) = 0$. Da doppelte Nullstelle, findet keine VZW statt; kein Extrempunkt.
Wendepunkte: $6x - 3x^2 = 0$, falls $x_1 = 0$ oder $x_4 = 2$;

 $f'''(0) = 6 \neq 0$; also Wendepunkt mit waagerechter Tangente, somit Sattelpunkt.

 $f'''(2) = -6 \neq 0$ also Wendepunkt,

$y_w = f(2) = 4$; Wendepunkt $W(2|4)$.

d) $f(x) = -\frac{1}{e}x + e^x$;

$f'(x) = -\frac{1}{e} + e^x$; $f''(x) = e^x$

Nullstellen von f : $f(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$, kein Schnittpunkt mit der x-AchseExtremstellen: $-\frac{1}{e} + e^x = 0$ für $x_1 = -1$; $f''(x) > 0$ für alle x , also Tiefpunkt

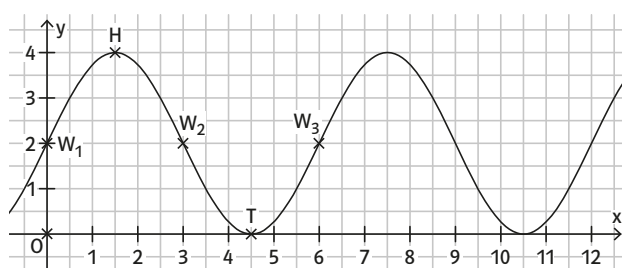
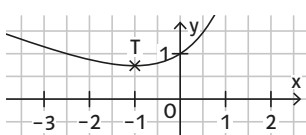
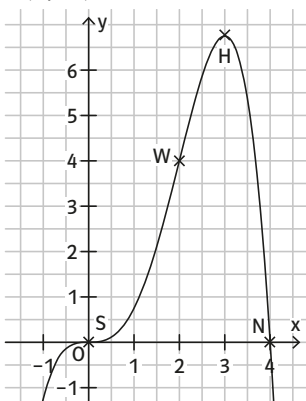
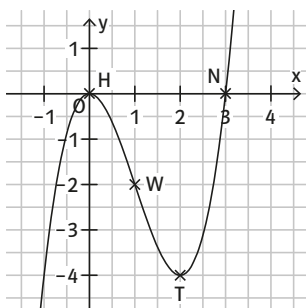
y-Wert: $y_T = f(-1) = -\frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} \approx 0,74$, $T(-1|0,74)$

Wendestellen: $e^x > 0$ für alle x , keine Wendestelle

e) $f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 2$ hat Periode 6

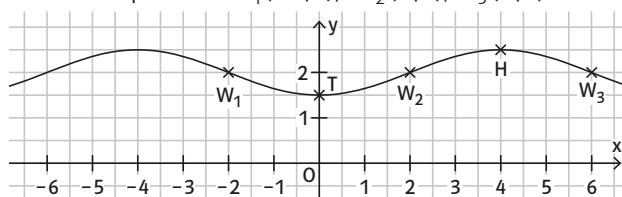
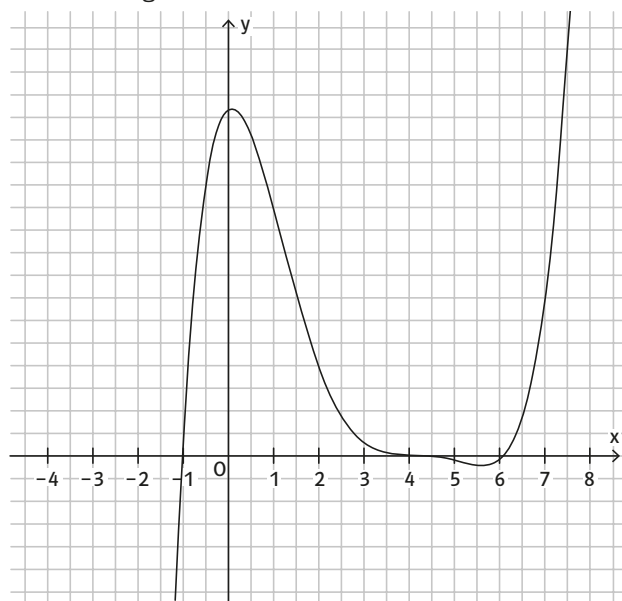
Berührt die x-Achse im Tiefpunkt $T(4,5|0)$

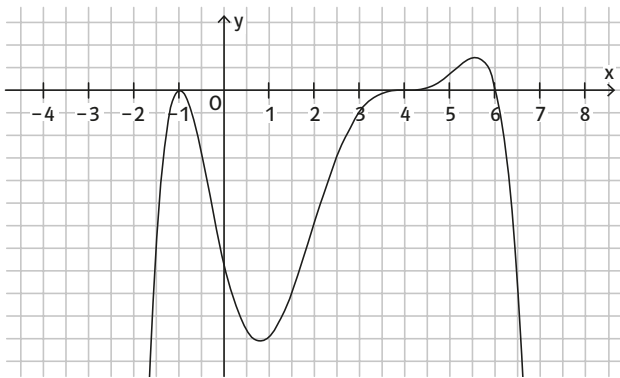
Hochpunkt: $H(1,5|4)$;

drei Wendepunkte: $W_1(0|2)$; $W_2(3|2)$; $W_3(6|2)$ 

f) $f(x) = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 2$ hat Periode 8

keine gemeinsamen Punkte mit der x-Achse

Tiefpunkt bei $x = 0$: $T(0|1,5)$ Hochpunkt bei $x = 4$: $T(4|2,5)$ drei Wendepunkte: $W_1(-2|2)$; $W_2(2|2)$; $W_3(6|2)$ **7** Zur Funktion f gehört das Kärtchen C.Zur Funktion g gehören die Kärtchen B und D.Zur Funktion h gehört das Kärtchen A.Zur Funktion i gehören die Kärtchen B, D und F.**8** Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.**9** Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.
10 a) Der Punkt $S(4|0)$ ist ein Sattelpunkt, also eine (mindestens) dreifache Nullstelle. Geht man davon aus, dass die anderen beiden Nullstellen einfach sind, dann ergibt sich eine Funktion fünften Grades. Der Graph sieht etwa wie folgt aus:

Wenn man zum Beispiel bei $x = -1$ eine doppelte Nullstelle annimmt, dann erhält man eine Funktion sechsten Grades, deren Graph etwa so aussehen könnte:



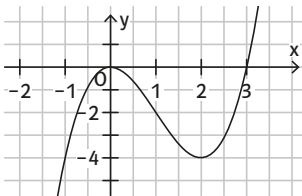
b) Der Graph hat mindestens zwei Extrempunkte, da bei $x = 4$ ein Vorzeichenwechsel vorliegt.

Zwischen 4 und 6 und zwischen -1 und 4 muss es also mindestens je einen Extrempunkt geben.

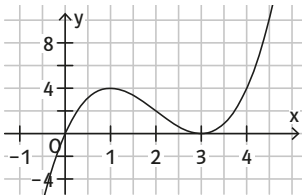
c) Der Graph ändert mindestens dreimal sein Krümmungsverhalten. Er hat also mindestens drei Wendepunkte, da zwischen Sattelpunkt und Extrempunkt immer mindestens ein weiterer Wendepunkt liegen muss.

Seite 112

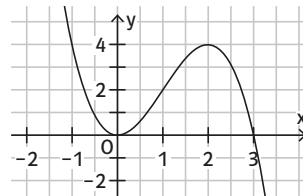
11 a) Möglichkeit A



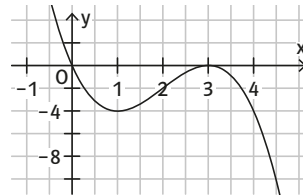
Möglichkeit C



Möglichkeit B



Möglichkeit D



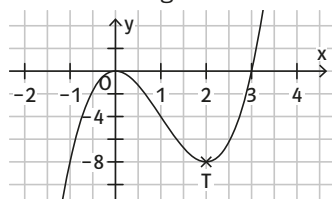
b) Aufgrund des Verlaufs des Graphen der Funktion links unten nach rechts oben und der doppelten Nullstelle im Ursprung kommt nur Möglichkeit A in Frage.

c) $f'(x) = 6x^2 - 12x$;

$f''(x) = 12x - 12$

Wegen $f'(2) = 0$ und $f''(2) = 12 > 0$ hat der Graph der Funktion f an der Stelle $x_1 = 2$ einen Tiefpunkt $T(2 | -8)$.

y-Wert: $f(2) = 16 - 24 = -8$



12 a) $f'(x) = 1 - \cos(x)$; $f''(x) = \sin(x)$; $f'''(x) = \cos(x)$

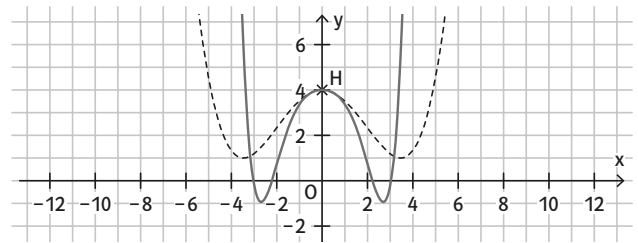
Die Nullstellen von f' sind $x_k = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Sie sind zugleich Nullstellen von f'' . Da f'' bei x_k immer das Vorzeichen wechselt, sind die Werte von x_k die x-Werte von Sattelpunkten des Graphen von f (und somit hat f keine Extrempunkte).

b) $f''(x) = 0$ führt zu $x_k = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). f'' wechselt an jeder seiner Nullstellen das Vorzeichen. Die gesuchten Wendepunkte sind also $(-2\pi | -2\pi)$; $(-\pi | -\pi)$; $(0 | 0)$; $(\pi | \pi)$ und $(2\pi | 2\pi)$.

c) Nur die Wendepunkte mit $x_k = 2k\pi$ sind Sattelpunkte. An allen anderen hat die Tangente die Steigung 2.

- 13 a)** (1) $f(0) = 4$, $f'(0) = 0$ und $f''(0) = -1$ bedeuten, dass die Funktion f bei $x_1 = 0$ ein Maximum hat. Der Graph von f hat einen Hochpunkt bei $H(0 | 4)$.
 (2) $f''(2) = 0$ und $f'''(2) \neq 0$ bedeuten, dass die Funktion f an der Stelle $x_2 = 2$ eine Wendestelle hat.
 (3) $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$ bedeutet, dass die Funktionswerte $f(x)$ für sehr große und sehr kleine Werte von x gegen $+\infty$ streben.
 (4) $f(-x) = f(x)$ bedeutet, dass der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist.

b) Individuelle Lösung, z. B.:



14 a) $f(-x) = x^2 \cdot e^{-2x} = g(x)$.

b) Extrempunkte:

$f'(x) = (2x + 2x^2) \cdot e^{2x}$ hat die beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$.

Man betrachtet die Vorzeichen der einzelnen Faktoren u mit $u(x) = 2x^2 + 2x$ und v mit $v(x) = e^{2x}$ der Ableitung f' und liest an der Stelle $x_1 = 0$ den VZW von f' von - nach + ab, sowie an der Stelle $x_2 = -1$ den VZW von + nach - ab. Folglich hat der Graph der Funktion f an der Stelle $x_1 = 0$ einen Tiefpunkt T und an der Stelle $x_2 = -1$ einen Hochpunkt H .

	$x < -1$	$]-1; 0[$	$x > 0$
$u(x)$	+	-	+
$v(x)$	+	+	+
$f'(x)$	+	-	+

Der Graph der Funktion f nähert sich im negativen Bereich der x-Achse und hat bei $x = -1$ einen Hochpunkt.

So ist $f(x) < f(-1)$ für $x < 0$. $f(-1) = \frac{1}{e^2}$, somit sind alle Funktionswerte kleiner als $\frac{1}{e^2}$ für $x < 0$.

Aufgrund der Symmetrie sind die Funktionswerte der Funktion g im positiven Bereich kleiner als $\frac{1}{e^2}$.

15 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

16 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

17 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ hat die Nullstellen

$$x_{1/2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 12b}}{6}.$$

Die gesuchte Beziehung ergibt sich aus der Gleichung

$$4a^2 - 12b = 0. \text{ Es gilt } |a| = \sqrt{3b} \text{ und } b \geq 0 \text{ oder } b = \frac{1}{3}a^2.$$

Der Wert von c spielt keine Rolle.

Der Wert von b muss nicht negativ sein.

18 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

7 Differenzialrechnung im Sachzusammenhang

Seite 113

Einstiegsaufgabe

Der absolute Wert der Schulden nimmt weiter zu: 2013 sind sie höher als 2010, aber die jährliche Zunahme ist weniger geworden.

Seite 115

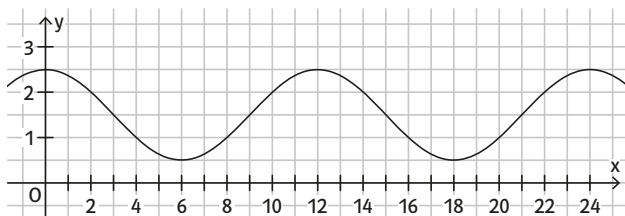
- 1** a) $f(2) = 0,3$
 b) $f(t)$ ist konstant für $t > 20$.
 c) $f(5) - f(0) = 0,6$
 d) Die Ableitung der Funktion f hat bei $x = 8$ ein Maximum, die Funktion f hat dort eine Wendestelle.

- 2** a) Die Konzentration ist etwa zum Zeitpunkt $t = 4$ am höchsten.
 b) Die Konzentration sinkt etwa zum Zeitpunkt $t = 7$ am stärksten.
 c) Zeichnet man die Gerade mit $y = 20$ in das Schaubild ein bzw. hält man das Geodreieck entsprechend auf die Zeichnung, kann man die Schnittstellen der Geraden mit dem Graph ablesen: $x_1 \approx 1$; $x_2 \approx 20$. Ab dem Zeitpunkt $t = 20$ sinkt die Konzentration unter $20 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$.

- 3** a) $f(6) = \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) + 1,5 = \cos(\pi) + 1,5 = -1 + 1,5 = 0,5$

Der Pegelstand um 6:00 Uhr beträgt 0,50 m.

b)



- c) Im Beobachtungszeitraum ist der Pegelstand von 4:00 Uhr bis 8:00 Uhr und von 16:00 Uhr bis 20:00 Uhr unter 1 m.

Rechnerisch:

$$\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 1,5 \leq 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \leq -0,5$$

Für $0 \leq x \leq 2\pi$ bedeutet dies:

$$\frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi x}{6} \leq \frac{4\pi}{3}, \text{ also } 4 \leq x \leq 8.$$

Entsprechend erhält man für $2\pi \leq x \leq 4\pi$:

$$16 \leq x \leq 20.$$

d) $\frac{f(18) - f(14)}{4} = \frac{0,5 - 2}{4} = -\frac{3}{8}$

Die durchschnittliche Pegelstandsänderung beträgt $-\frac{3}{8} \frac{\text{m}}{\text{h}}$.

- e) Das stärkste Gefälle am Nachmittag ist im Wendepunkt. Der Graph schneidet die Gerade $y = 1,5$, auf der alle Wendepunkte liegen bei $x = 15$ am Nachmittag. Dort ist das stärkste Gefälle.

- f) $f'(x) = -\frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ und $f'(16) = -\frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 16\right) \approx -0,45$
 Die momentane Pegelstandsänderung um 16:00 Uhr beträgt etwa $-0,45 \frac{\text{m}}{\text{h}}$.

- 4** Zu (I) gehört Kärtchen D.

Zu (II) gehören die Kärtchen A, C, E.

Zu (III) gehört Kärtchen B.

- 5** Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

- 6** a) $f(5) = 38,5$. Der Läufer hat nach 5 Sekunden etwa 38,5 m zurückgelegt.

b) $\bar{v} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{38,5}{5} = 7,7$

Die durchschnittliche Geschwindigkeit in den ersten 5 Sekunden beträgt $7,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 27,72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

- c) Die momentane Geschwindigkeit entspricht der Ableitung an der Stelle $t = 0,5$.

$$f'(t) = 0,0224t^3 - 0,6t^2 + 4,8t$$

$$f'(0,5) = 2,2528$$

Die Geschwindigkeit des Läufers nach 0,5 s beträgt ca.

$$2,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8,1 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

- d) $f(10) = 96$

Nach 10 Sekunden hat der Läufer erst 96 m zurückgelegt.

e) $f(10,1) \approx 97,038$

$$f(10,2) \approx 98,071$$

$$f(10,3) \approx 99,099$$

$$f(10,4) \approx 100,12$$

Nach etwa 10,4 Sekunden hätte der Läufer demnach das Ziel erreicht.

Seite 116

- 7** a) 1960: $s(10) \approx 1101 \text{ m}$;

$$2000: s(50) \approx 5581 \text{ m}$$

Die zurückgelegte Strecke im Zeitraum von 1960 bis 2000 beträgt $4480 \text{ m} \approx 4,5 \text{ km}$

- b) Durchschnittsgeschwindigkeit von 1950 bis 1970:

$$\frac{s(20) - s(0)}{20} \approx 110 \frac{\text{m}}{\text{Jahr}}$$

Durchschnittsgeschwindigkeit von 2000 bis 2020:

$$\frac{s(70) - s(50)}{20} \approx 125 \frac{\text{m}}{\text{Jahr}}$$

- c) Momentane Geschwindigkeit:

$$v(t) = s'(t) = 0,00756t^2 + 0,227t + 111$$

d) $s'(80) = 177,54$

Die Geschwindigkeit, mit der sich der Gletscher im Jahr 2030 talabwärts bewegt, beträgt $177,54 \frac{\text{m}}{\text{Jahr}}$.

- 8** a) $f(11) = 468$. Also waren um 11 Uhr 468 Besucher auf dem Schulfest.

- b) $f'(t) = -3t^2 + 48t - 117 = 0$ liefert $t_1 = 3$ und $t_2 = 13$. Für $3 < t < 13$ gilt: $f'(t) > 0$, also steigt im Zeitraum von 7:30 Uhr bis 13 Uhr die Besucherzahl fortwährend an.

- c) Die meisten Besucher waren um 13 Uhr auf dem Schulfest (siehe Teilaufgabe b)), es waren 520 Besucher. Die wenigsten waren entweder zu Beginn oder zum Ende des Schulfestes da.

$f(7,5) \approx 232$ und $f(16,5) \approx 293$, also waren zu Beginn des Festes um 7:30 Uhr am wenigsten Besucher auf dem Schulfest, nämlich nur 232.

d) $f''(t) = -6t + 48$; $f''(t) = 0$ für $t = 8$. Der Besucheranstieg war um 8 Uhr am größten.

9 a) Die Periode der Funktion beträgt 1. Somit benötigt das Pendel 1 s bis es wieder in der Ausgangsposition ist, in der es losgelassen wurde. Das Pendel erreicht die Gleichgewichtslage zum ersten Mal nach 0,25 sec.

b) Das Pendel hat nach 0,5 s und nach 1,5 s den linken Umkehrpunkt erreicht. Die Momentangeschwindigkeit kann mit $v(t) = s'(t) = -10\pi \cdot \sin(2\pi \cdot t)$ berechnet werden.

Es ist $v(0,5) = s'(0,5) = -10\pi \cdot \sin(2\pi \cdot 0,5) = 0$ und $v(1,5) = s'(1,5) = -10\pi \cdot \sin(2\pi \cdot 1,5) = 0$.

c) Geschwindigkeit durch die Gleichgewichtslage auf dem Weg nach links:

$$v(0,25) = s'(0,25) = -10\pi \cdot \sin(2\pi \cdot 0,25) = -10\pi$$

Geschwindigkeit durch die Gleichgewichtslage auf dem Weg nach rechts:

$$v(0,75) = s'(0,75) = -10\pi \cdot \sin(2\pi \cdot 0,75) = 10\pi$$

Die Geschwindigkeit durch die Gleichgewichtslage auf dem Weg nach links beträgt $-31,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; auf dem Weg nach rechts $31,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

10 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

11 a) $f(t) = 30te^{-0,2t}$; $f'(t) = -(6t - 30) \cdot e^{-0,2t}$.
 $-(6t - 30) \cdot e^{-0,2t} = 0$; das gilt, wenn $6t - 30 = 0$, also wenn $t = 5$. $f(5) \approx 55,2$.

Die höchste Konzentration im Blut beträgt $55,2 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ nach 5 Stunden.

$$\text{b) } f''(t) = 0,2 \cdot (6t - 60) \cdot e^{-0,2t}$$

$$0,2 \cdot (6t - 60) \cdot e^{-0,2t} = 0$$

Das gilt, wenn $6t - 60 = 0$, also, wenn $t = 10 \cdot x^3$

Nach 10 Stunden nimmt die Konzentration am meisten ab.

$$\text{c) } f(t) = 30te^{-0,2t} < 10; \text{ daraus folgt } t > 20,63.$$

Nach 20,63 Stunden, also 20 h 38 min, sinkt die Konzentration unter $10 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$.

12 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

Exkursion: Der Streit um die Ableitung

Seite 119

1 Individuelle Lösungen

Training

Seite 120

1 a) Monotonieverhalten:

Für $x < 2$ wächst der Graph von f streng monoton.

Für $x > 2$ fällt der Graph von f streng monoton.

b) Monotonieverhalten:

Für $x < 1$ wächst der Graph von f streng monoton.

Für $1 < x < 4$ fällt der Graph streng monoton.

Für $x > 4$ wächst der Graph von f streng monoton.

c) Es handelt sich um eine trigonometrische Funktion mit Periode 6. Für $0 < x < 3$ ist der Graph der Funktion streng monoton fallend.

Für $3 < x < 6$ ist der Graph streng monoton wachsend.

2 a) Der Graph ist rechtsgekrümmt im Intervall für $x < 3$. Für $x > 3$ ist der Graph linksgekrümmt.

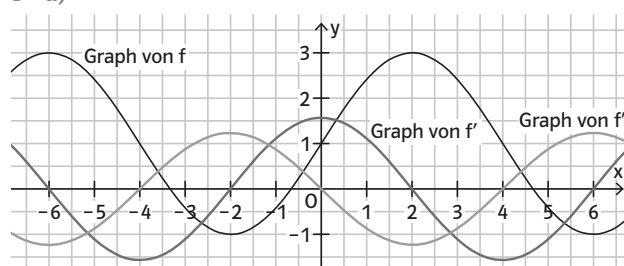
$$\text{b) } f(x) = (x - 1) \cdot e^{-x};$$

$$f'(x) = e^{-x} - (x - 1) \cdot e^{-x} = (2 - x) \cdot e^{-x};$$

$$f''(x) = -e^{-x} - (2 - x) \cdot e^{-x} = (x - 3) \cdot e^{-x}$$

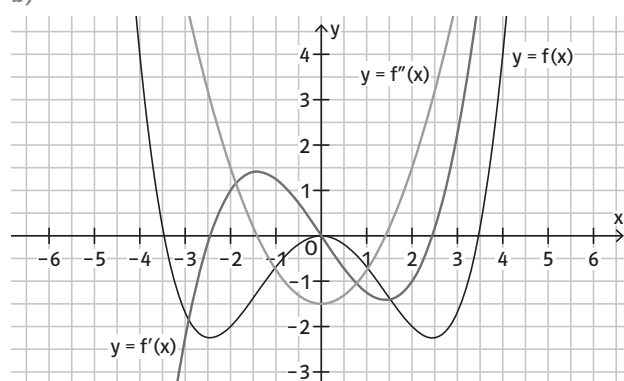
Die lineare Funktion $u(x) = x - 3$ hat an der Stelle $x = 3$ einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$. Da die Funktion $v(x) = e^{-x}$ nur positive Funktionswerte hat, hat auch die zweite Ableitung f'' an der Stelle $x = 3$ einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$. Der Graph der Funktion f wechselt folglich dort von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung.

3 a)



Im Intervall $[-4; 0]$ ist die Kurve linksgekrümmt, im Intervall $[0; 4]$ ist die Kurve rechtsgekrümmt

b)



Im Intervall $[-1,5; 1,5]$ ist die Kurve rechtsgekrümmt, außerhalb ist sie linksgekrümmt.

$$\text{4 a) } f'(x) = -3x^2 + 6;$$

$$f''(x) = -6x; \quad f'''(x) = -6$$

Achsenschnittpunkte:

mit der x -Achse $N_1(0|0)$;

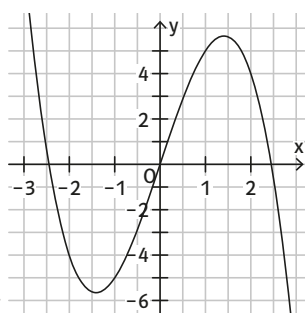
$N_2(\sqrt{6}|0)$ und $N_3(-\sqrt{6}|0)$.

Tiefpunkt ist $T(-\sqrt{2}|-4\sqrt{2})$;

Hochpunkt ist $H(\sqrt{2}|4\sqrt{2})$;

Wendepunkt ist $W(0|0)$.

Wendetangente ist $t: y = 6x$.



b) $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$;

$f''(x) = x^2 - 1$; $f'''(x) = 2x$

Achsenschnittpunkte:

Mit der x-Achse $N_1(0|0)$;

$N_2(\sqrt{6}|0)$ und

$N_3(-\sqrt{6}|0)$.

Hochpunkt ist $H(0|0)$.

Tiefpunkte sind $T_1(\sqrt{3}|\frac{3}{4})$ und $T_2(-\sqrt{3}|\frac{3}{4})$.

Wendepunkte sind $W_1(1|\frac{5}{12})$ und $W_2(-1|\frac{5}{12})$.

Die Wendetangente in W_1 ist $t_1: y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$.

Die Wendetangente in W_2 ist $t_2: y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$.

c) Ableitungen: $f'(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x$;

$f''(x) = -2x^2 + 6x - 4$; $f'''(x) = -4x + 6$

Nullstellen: $x^2(-\frac{1}{6}x^2 + x - 2) = 0$ hat nur die Lösung

$x_1 = 0$ (doppelt).

mögliche Extremstelle: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x = x(-\frac{2}{3}x^2 + 3x - 4) = 0$$

hat nur die Lösung: $x_1 = 0$.

$f''(0) = -4 < 0$, bei $x_1 = 0$ ist daher ein Hochpunkt.

Wendepunkte: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 6x - 4 = 0$

hat die Lösungen $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$.

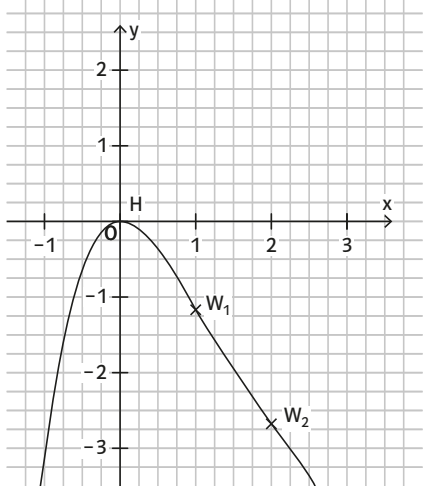
Überprüfung: $f'''(1) = 2 \neq 0$; $f'''(2) = -2 \neq 0$

Bei $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ liegen Wendepunkte.

y-Koordinaten: $y_H = f(0) = 0$; $y_{W_1} = f(1) = -\frac{7}{6}$; $y_{W_2} = f(2) = -\frac{8}{3}$

Hochpunkt: $H(0|0)$;

Wendepunkte: $W_1(1|-\frac{7}{6})$; $W_2(2|-\frac{8}{3})$



d) Ableitungen: $f'(x) = e^x - 4x$; $f''(x) = e^x - 4$; $f'''(x) = e^x$
 Nullstellen: Wertetabelle zeigt im Intervall $[-1; 0]$ einen Vorzeichenwechsel, sowie in den Intervallen $[1; 2]$ und $[2; 3]$. Durch Verkleinerung der Schrittweite erhält man die Nullstellen $x_1 \approx -0,55$; $x_2 \approx 1,49$ und $x_3 \approx 2,62$.

Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 4x = 0$

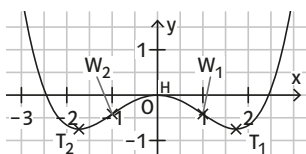
Vorzeichenwechsel im Intervall $[0; 1]$ und $[2; 3]$.

Mit Verkleinerung der Schrittweite erhält man

$x_4 \approx 0,36$ und $x_5 \approx 2,15$.

An der Stelle x_4 hat die Ableitung einen VZW von + nach -; d.h. bei $x_4 \approx 0,36$ ist ein Hochpunkt.

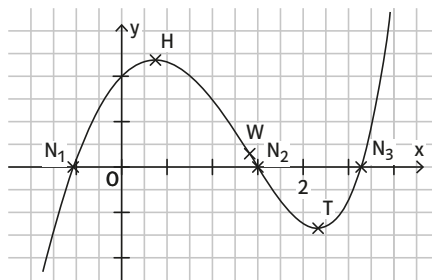
An der Stelle x_5 hat die Ableitung einen VZW von - nach +; d.h. bei $x_5 \approx 2,15$ ist ein Tiefpunkt.



Mögliche Wendestelle: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x_6 = \ln(4) \approx 1,38$. Überprüfung: $f'''(\ln(4)) = 4 \neq 0$

Wendepunkt: $W(1,38|0,16)$ (y-Wert gerundet).



5 a) Die Periode der Funktion f ist 2π .

Hochpunkte liegen bei $x_1 = \frac{\pi}{2}$ und bei $x_2 = \frac{5\pi}{2}$:

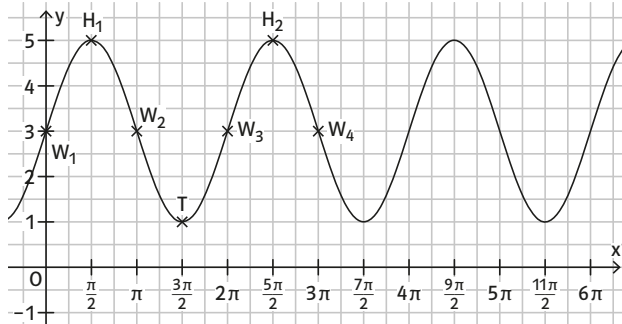
$H_1(\frac{\pi}{2}|5)$ und $H_2(\frac{5\pi}{2}|5)$.

Tiefpunkte liegen bei $x_3 = \frac{3\pi}{2}$ und bei $x_4 = \frac{7\pi}{2} > 10$: im

Intervall $[0; 10]$ nur ein Tiefpunkt $T(\frac{3\pi}{2}|1)$.

Wendepunkte liegen bei $x_5 = 0$; $x_6 = \pi$; $x_7 = 2\pi$ und

$x_8 = 3\pi$: $W_1(0|3)$; $W_2(\pi|3)$; $W_3(2\pi|3)$ und $W_4(3\pi|3)$.



b) Die Periode von f ist 4π .

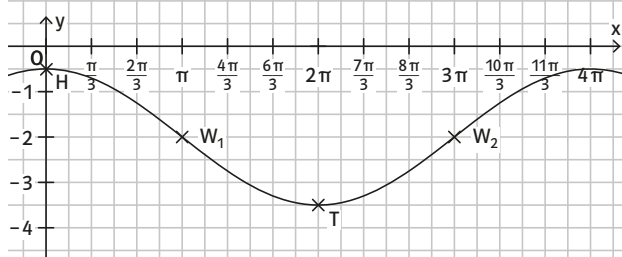
Hochpunkte liegen bei $x_1 = 0$ und bei $x_2 = 4\pi > 10$:

Hochpunkt im Intervall $[0; 10]$ ist $H(0|-0,5)$.

Tiefpunkte liegen bei $x_3 = 2\pi$: Tiefpunkt ist $T(2\pi|-3,5)$.

Wendepunkte liegen bei $x_4 = \pi$ und $x_5 = 3\pi$.

$W_1(\pi|-2)$ und $W_2(3\pi|-2)$.



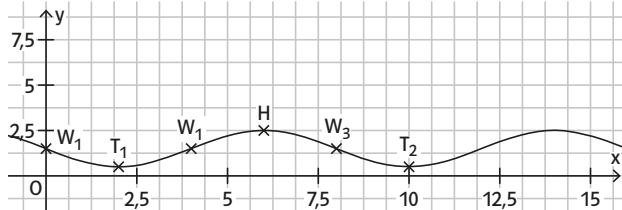
c) Die Periode von f ist 8.

Ein Hochpunkt liegt bei $x_1 = 6$: Hochpunkt ist $H(6|2,5)$.

Tiefpunkte liegen bei $x_2 = 2$ und bei $x_3 = 10$: Tiefpunkt ist $T_1(2|0,5)$ und $T_2(10|0,5)$.

Wendepunkte liegen bei $x_4 \approx 0$; $x_5 = 4$ und $x_6 = 8$.

$W_1(0|1,5)$; $W_2(4|1,5)$ und $W_3(8|1,5)$.



- 6 a)** Auf den Graphen der Funktion f treffen die Eigenschaften A und C zu.
b) Auf den Graphen der Funktion f trifft die Eigenschaft D zu, auf die Funktion f trifft die Eigenschaft E zu.
c) Auf den Graphen der Funktion f trifft die Eigenschaft B zu.

Seite 121

- 7 a)** Achsenschnittpunkte $N(-1|0)$ und $A(0|-2)$
 $T(1|-4)$ ist ein Tiefpunkt, denn $f(1) = -4$, $f'(1) = 0$ und $f''(1) = 3 > 0$.
 $H(2|2)$ ist ein Hochpunkt, denn $f(2) = 2$, $f'(2) = 0$ und $f''(2) = -5 < 0$.
 $A(0|-2)$ ist ein Wendepunkt, denn $f(0) = -2$, $f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 2 \neq 0$.
 $N(-1|0)$ ist ein Sattelpunkt, denn $f(-1) = 0$, $f''(-1) = 0$ und $f'''(-1) = -2 \neq 0$ und auch $f'(-1) = 0$.
b) $S(0|0)$ ist einen Sattelpunkt, der sogar im Ursprung liegt, denn es ist $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ und $f'''(0) \neq 0$.
 $W(2|-4)$ ist Wendepunkt des Graphen, denn an der Stelle $x = 2$ ist $f(2) = -4$, $f''(2) = 0$ und $f'''(2) \neq 0$.
 $T(3|-6,25)$ ist Tiefpunkt des Graphen, denn an der Stelle $x = 3$ ist $f(3) = -6,25$, $f'(3) = 0$ und $f''(3) = 9 > 0$.

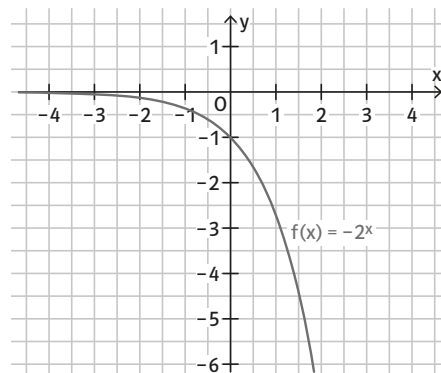
- 8 a)** Nach etwa 1,5 Stunden ist die maximale Menge von ca. 0,27 ml des Medikamentes im Blut.
b) Nach ca. 2,5 Stunden ist der Abbau des Medikamentes mit etwa $0,1 \frac{\text{ml}}{\text{h}}$ am größten, denn der Graph hat in $W(2,5|0,2)$ einen Wendepunkt mit der Steigung $f'(2,5) \approx -0,1$.

- 9 a)** Richtig. Außer an den Rändern des Intervalls I ist $f'(x) < 0$ in I . Im Intervall $]0; 2[$ ist f daher streng monoton fallend.
b) Falsch, da $f'(\sqrt{2}) \neq 0$. (Es handelt sich um einen Wendepunkt.)
c) Richtig, denn $f'(2) = 0$ und es liegt ein Vorzeichenwechsel von „-“ nach „+“ vor.
d) Richtig. Der Graph von f' hat genau drei Stellen, an denen die Tangente parallel zur x -Achse verläuft.

- 10 a)** Wahr. Denn $f'(x) = 0$ ist notwendige Bedingung für eine Extremstelle.
b) Falsch. Gegenbeispiel $f(x) = x^3$. $f'(0) = 0$, aber an der Stelle $x = 0$ hat der Graph von f einen Sattelpunkt.
c) Falsch. Gegenbeispiel $f(x) = x^4$.
 $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$, aber an der Stelle $x = 0$ hat f ein Minimum.

11 Individuelle Lösungen, z. B.:

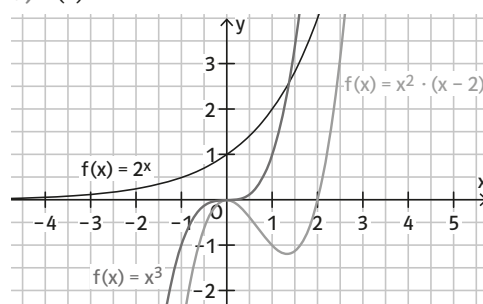
a) $f(x) = -2^x$



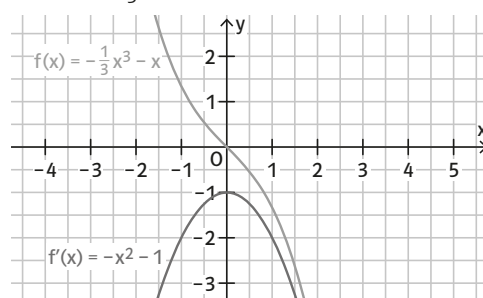
b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = x^2 \cdot (x - 2)$

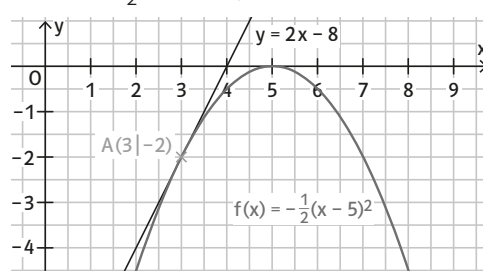
d) $f(x) = 2^x$



e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x$; $f'(x) = -x^2 - 1$



f) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 5)^2$; $y = 2x - 8$



12 a) $G(x) = E(x) - K(x)$ ($E(x)$ Erlösfunktion)

$$\begin{aligned} G(x) &= 7x - (0,01x^3 - 0,6x^2 + 13x) \\ &= 7x - 0,01x^3 + 0,6x^2 - 13x \\ &= -0,01x^3 + 0,6x^2 - 6x \end{aligned}$$

b) Gesucht ist das Maximum der Funktion G :

$$G'(x) = -0,03x^2 + 1,2x - 6$$

$$G''(x) = -0,06x + 1,2$$

Notwendige Bedingung:

$$G'(x) = 0$$

$$-0,03x^2 + 1,2x - 6 = 0 \quad | :(-0,03)$$

$$x^2 - 40x + 200 = 0$$

$$x_{1,2} = 20 \pm \sqrt{20^2 - 200} = 20 \pm 10\sqrt{2}$$

$$x_1 \approx 5,86; \quad x_2 \approx 34,14$$

Hinreichende Bedingung: $G''(x) \neq 0$ bei x_1 bzw. x_2

$G''(x_1) > 0$, also Tiefpunkt bei $x \approx 5,86$;

$G''(x_2) < 0$, also Hochpunkt bei $x \approx 34,14$.

$G(34) = 96,56$

$G(35) = 96,25$

Betrachtung der Definitionsränder:

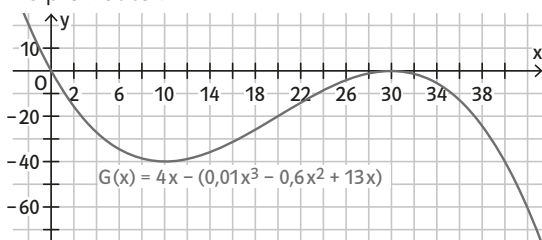
$G(0) = 0 < 96,56$

$G(50) = -50 < 96,56$

Bei der Produktion von 34 Bauteilen ist der Gewinn mit ca. 96,56 € am größten.

c) Durch den niedrigeren Verkaufspreis ergibt sich, dass das Unternehmen keinen Gewinn macht. Bei einer Stückzahl von $x = 30$ heben sich Umsatz und Kosten auf. Für alle anderen produzierten Stückzahlen macht das Unternehmen Verluste.

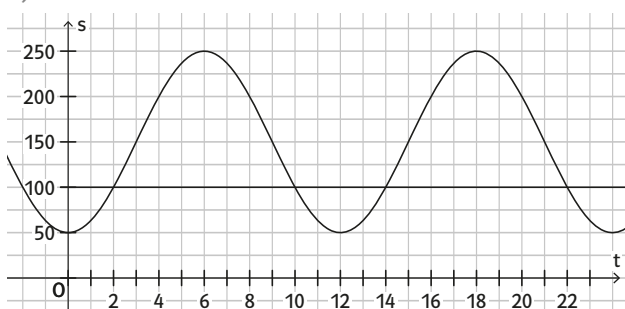
Graph der Gewinnfunktion bei einem Verkaufspreis von 4 € pro Bauteil:



Seite 122

13 a) Die kürzeste Strecke, die Maya zurücklegen muss, beträgt 50 m.

b)



c) $s(t) = 100$, ergibt die Gleichung: $\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0,5$. Diese ist für $\frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{3}$ erfüllt.

Daraus ergibt sich der Zeitpunkt $t = 2$, also 4:00 Uhr, eine weitere Lösung ist wegen der Achsensymmetrie der Kosinusfunktion bei $t = -2$, also bei 0:00 Uhr.

Die Periode der Funktion beträgt 12; weitere Lösungen sind somit $t = 10$ und $t = 14$. Maya kann in dem Zeitfenster zwischen 12:00 Uhr und 16:00 Uhr windsurfen gehen.

d) $s'(t) = 100 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$,

$$\begin{aligned} s'(14) &= 100 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 14\right) = 100 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) \\ &= \frac{100\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 45,34 \text{ m/h} \end{aligned}$$

Um 16:00 Uhr beträgt die momentane Änderungsrate der Strecke 45,34 m/h.

e) Die momentane Zunahme ist an den Wendepunkten des Graphen am größten (dafür ist die notwendige Bedingung: $s''(t) = 0$).

$$s''(t) = 100 \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

$$s''(t) = 0, \text{ wenn } \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) = 0 \text{ ist.}$$

$$\text{Also für } \frac{\pi}{6} \cdot t = \frac{\pi}{2} \text{ oder } \frac{\pi}{6} \cdot t = \frac{3\pi}{2}.$$

Man erhält: $t = 3$ und $t = 9$.

Da die Periode 12 ist, gibt es weitere Lösungen für $t = 15$ und $t = 19$.

Daher ist nachmittags um 17:00 Uhr die momentane Zunahme am größten.

$$f) s(16) = -100 \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 16\right) + 150$$

$$= -100 \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + 150 = -100 \cdot (-0,5) + 150 = 200$$

$$s(14) = -100 \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 14\right) + 150$$

$$= -100 \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + 150 = -100 \cdot 0,5 + 150 = 100$$

$$s(14) + 2 \cdot s'(14) = 100 + 2 \cdot 45,34 = 190,68$$

Die Abschätzung ist etwas zu gering, da die Änderungsrate noch bis 17:00 Uhr zunimmt.

14 Die Aussage A gilt immer.

Begründung: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f'(x) = 2ax + b$;

$f''(x) = 2a \neq 0$ für alle x . Der Graph von f ist folglich

entweder überall rechtsgekrümmt oder überall linksgekrümmt und besitzt keine Wendestelle.

Aussage B gilt immer. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$;

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$ ist linear und hat somit eine eindeutige Nullstelle mit Vorzeichenwechsel.

Die Nullstelle ist gleichzeitig die Extremstelle der ersten Ableitung. Da die erste Ableitung eine quadratische Funktion ist und der Scheitelpunkt in der Mitte der beiden Nullstellen liegt, liegt die Wendestelle der Funktion f in der Mitte der Extremstellen der Funktion f .

Aussage C ist falsch. Die Funktion $f(x) = x^3$ hat keine Extremstellen, sie hat nur einen Sattelpunkt.

Aussage D gilt z.B. für $n = 2$ nicht.

Für $n = 3$ gilt die Aussage immer (vgl. Antwort zu Aussage B).

Für $n = 4$ kann die Aussage falsch sein (z.B. $f(x) = x^4$) oder richtig sein (z.B. $f(x) = x^4 - 2x^4 + 1$).

Grundsätzlich lässt sich für jedes $n > 3$ mindestens eine Polynomfunktion (Potenzfunktion) angeben, für welche die Aussage falsch ist:

Der Graph von f mit $f(x) = x^n$ besitzt für gerades n einen Tiefpunkt, für ungerades n genau einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

Aussage E ist richtig. Der Graph ist in der Umgebung eines Hochpunktes rechtsgekrümmt, in der Umgebung eines Tiefpunktes linksgekrümmt. Da man den Graphen ohne Absetzen zeichnen kann, muss es einen Krümmungswechsel an einer Wendestelle geben.

Aussage F ist falsch, z.B. hat die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$, die Ableitungen $f'(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$ und $f''(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. Die Funktion hat eine Extremstelle bei $x = 3$ und zwei Wendestellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Somit liegt keine Extremstelle zwischen den beiden Wendestellen.

15 Aussage A ist falsch. Auch wenn zwei Funktionen dieselbe Ableitung haben, sind sie nicht unbedingt identisch.

Beispiel: $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^2 + 1$

(Ableitungen: $f'(x) = g'(x) = 2x$).

Aussage B ist wahr. Wahr. Da die beiden Funktionen an jeder Stelle dieselbe Steigung haben, können sie sich nur durch eine Verschiebung in y-Richtung unterscheiden.

Es gilt also $f(x) = g(x) + d$, $d \in \mathbb{R}$. Die Differenz $f(x) - g(x) = d$ ist konstant.

Aussage C ist wahr. Da die Graphen an allen Stellen dieselbe Steigung haben, verlaufen ihre Tangenten immer parallel. Sollte auch ein y-Wert übereinstimmen, müssen wegen derselben Steigung auch alle anderen y-Werte übereinstimmen, in diesem Fall sind sie identisch.

16 a) Der Graph der Funktion $h = f - g$ mit

$h(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$ verläuft vom II. zum I. Quadranten.

Bestimmung der Extrempunkte:

$$h'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2 \cdot (x - 1).$$

h' hat bei $x_1 = 0$ eine doppelte Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel und bei $x_2 = 1$ eine einfache Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$, d.h. der Graph von h hat den einzigen Tiefpunkt bei $x_2 = 1$ mit

$h(1) = 1 > 0$. Wegen des Verlaufs und des positiven y-Werts des Tiefpunkts liegt der Graph von h immer über der x-Achse, er kann sie also nicht schneiden.

Daher ist $f(x) > g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Der Graph der Funktion $h = f - g$ mit

$h(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$ verläuft vom III. zum IV. Quadranten.

Bestimmung der Extrempunkte: Ableitungen:

$$h'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1); \quad h''(x) = -12x^2 + 4.$$

h' hat an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm 1$ Nullstellen.

Wegen $h''(0) = 4$ und $h''(\pm 1) = -8$ liegt bei $x_1 = 0$ ein Minimum und bei $x_{2,3} = \pm 1$ jeweils ein Maximum vor. Da $h(\pm 1) = -1 < 0$ kann der Graph keinen Schnittpunkt mit der x-Achse haben und somit gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) < g(x).$$

c) Der Graph der Funktion $h = f - g$ mit $h(x) = e^x - 2x$ verläuft vom II. zum I. Quadranten.

Bestimmung der Extrempunkte: Ableitungen:

$$h'(x) = e^x - 2; \quad h''(x) = e^x$$

h' hat an der Stelle $x_1 = \ln(2)$ eine Nullstelle und es gilt $h''(\ln(2)) = 2 > 0$, d.h. bei $x_1 = \ln(2)$ liegt ein Tiefpunkt vor. Wegen des Verlaufs und wegen $h(\ln(2)) = 2 - 2 \cdot \ln(2) > 0$ liegt der Graph von h immer über der x-Achse, er kann sie also nicht schneiden. Daher ist $f(x) > g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

17 Ableitung: $f'(x) = \frac{9}{500}x^2 - \frac{9}{50}x$

a) Es ist zu zeigen, dass die Funktion f streng monoton fällt.

$$f'(x) = \frac{9}{500}x(x - 10)$$

$f'(x)$ hat für $0 \leq x \leq 10$ nur die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$.

Für den Faktor $x - 10$ von f' gilt:

$$x - 10 < 0 \quad \text{für alle } x \text{ mit } 0 < x < 10.$$

Da der Faktor x von f' positiv ist, gilt insgesamt:

$$f'(x) < 0 \quad \text{für alle } 0 < x < 10.$$

Die Funktion f ist damit im Intervall $]0; 10[$ streng monoton fallend; das Flugzeug verliert stets an Höhe.

$$\text{b)} \quad f'(5) = -0,45$$

Für $x = 5$ beträgt die momentane Höhenabnahme $0,45 \left(\frac{\text{Meter}}{\text{Meter}} \right)$.

c) Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(5 | f(5))$: $f(5) = 1,5$; Tangente:

$$y = -0,45(x - 5) + 1,5 = -0,45x + 3,75$$

Ansatz: $y = 0$ mit der Lösung $x_3 \approx 8,33$

Aufsetzwinkel: $\tan(\alpha) = f'(5) = -0,45$, also $\alpha \approx (-)24,2^\circ$.

Das Flugzeug würde unter einem Winkel von ca. $24,2^\circ$ ca. 833 Meter von der Stelle entfernt landen, über der es sich zum Beobachtungsbeginn befunden hat.

18 a) Die Aussage ist nicht allgemein gültig; der Graph von $f(x) = x^3$ hat einen Schnittpunkt mit der x-Achse.

Der Graph der Ableitungsfunktion $f'(x) = 3x^2$ hat ebenfalls einen Schnittpunkt mit der x-Achse. Handelt es sich jedoch bei den Schnittpunkten um einfach Schnittpunkte, so wäre die Aussage richtig, weil sich zwischen zwei Schnittpunkten jeweils ein Extrempunkt befindet.

b) Die Aussage ist richtig. Spiegelt man die Graphen der Funktion f an der x-Achse, erhält man die zugehörigen Funktionsterm $g(x) = -f(x)$. Für die Ableitungen gilt dann: $g'(x) = -f'(x)$. Somit wird die Ableitung ebenfalls an der x-Achse gespiegelt.

c) Die Aussage ist richtig. Durch Verschieben in x-Richtung eines Graphen werden auch die Steigungen des Graphen nach rechts verschoben. Die Funktion $g(x) = f(x - c)$ wird mit der Kettenregel abgeleitet. Da die innere Ableitung von f genau 1 ist, verändert sich die Steigung nicht. Es gilt $g'(x) = f'(x)$.

Prüfungsvorbereitung

Seite 124 und 125

Die Lösungen zur Prüfungsvorbereitung finden Sie am Ende vom Schulbuch.

IV Integralrechnung

Seite 128 und 129

Die Lösungen zum Check-in finden Sie am Ende vom Schulbuch.

1 Rekonstruktion von Größen

Seite 130

Einstiegsaufgabe

Der Aufzug fährt 18 s nach oben, wartet dann 6 s, fährt dann 12 s nach unten und steht dann wieder still. Der Aufzug beschleunigt mit jeweils $\frac{1}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ bzw. mit $-\frac{1}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ bis zur konstanten Geschwindigkeit von $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bzw. bremst mit $-1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Er legt beim Hinauffahren eine Strecke von 15 Metern zurück, beim Hinabfahren 9 Meter. Dies lässt auf eine Stockwerkhöhe von 3 Metern schließen. Der Aufzug fährt zuerst hinauf in den 5. Stock und dann hinunter in den 2. Stock.

Seite 132

1 a) Orientierter Flächeninhalt: $8 + 5 + 6 = 19$. Die Menge im Tank nimmt in den dargestellten 6 min um 19 l zu.

b) Orientierter Flächeninhalt: $4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + 10 = 22$. Die Menge im Tank nimmt in den dargestellten 6 min um 22 l zu.

c) Orientierter Flächeninhalt: $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 - 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 0$. Die Menge im Tank nimmt in den dargestellten 6 min um 0 l zu; Zufluss und Abfluss sind gleich groß.

2 a) 4 m **b)** 10 mm **c)** 200 l **d)** 10 bar

3 A: 5 m; B: 50 m; C: 2,5 m

4 a) Der Ballon bewegt sich zu Beginn mit $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nach oben, beschleunigt dann und fährt nach 5 s mit einer Vertikalgeschwindigkeit von $1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Nach weiteren 5 s reduziert sich seine Vertikalgeschwindigkeit auf $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und nimmt dann wieder auf $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ zu, bevor sie sich wieder reduziert und ab $t = 20$ negativ wird. Das heißt, ab $t = 20$ fährt der Ballon nach unten. Bei etwa $t = 22$ sinkt er mit der konstanten Vertikalgeschwindigkeit von $-1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Der orientierte Flächeninhalt in $[0; 35]$ ist positiv (ca. 11 Kästchen unterhalb und 15 oberhalb der t-Achse). Daher befindet sich der Ballon nach 35 s höher als bei 0 s.

c) Die Höhendifferenz beträgt etwa 5 m (Differenz in Kästchen: etwa 4; vier Kästchen entsprechen 5 m).

5 a) Orientierter Flächeninhalt: $(8 + 18) \text{ FE} = 26 \text{ FE}$; dies entspricht einer Gesamtänderung von 26 m^3 . Im Tank befinden sich nach Ende des Füllprozesses 36 m^3 Wasser.

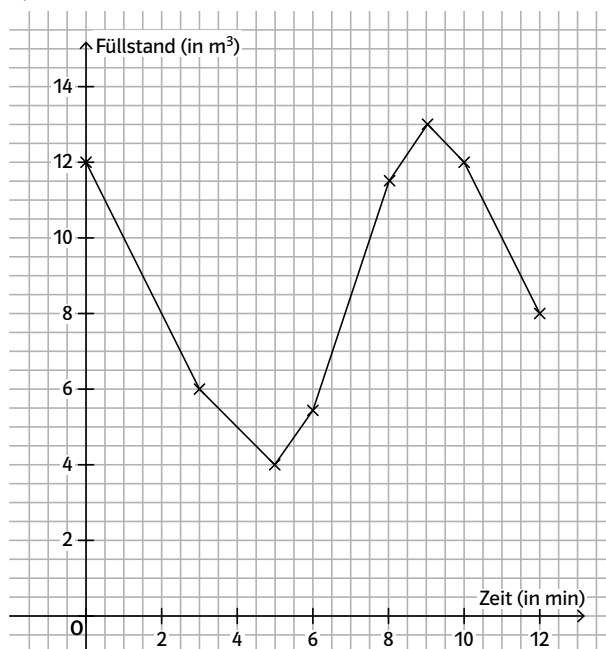
b) $\frac{36}{3} = 12$, d.h., nach 12 Minuten ist der Tank leer.

Seite 133

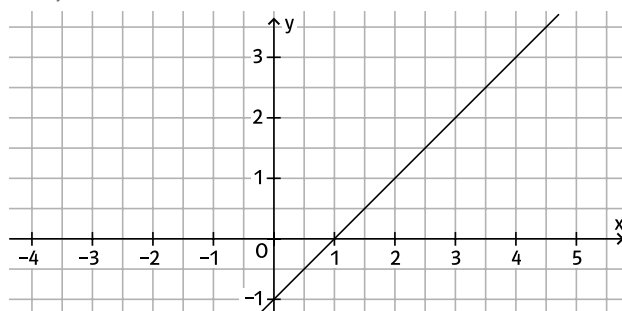
6 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

7 a) Im Behälter muss eine Menge von 8 m^3 enthalten sein (orientierter Flächeninhalt im Intervall $[0; 5]$).
b) Am Ende des Zuflusses, nach 9 Minuten, ist die Menge im Behälter maximal.
c) Zu Beginn sind 12 m^3 im Tank. Dann werden zunächst 8 m^3 entnommen, anschließend fließen 9 m^3 zu, so dass maximal 13 m^3 im Tank sind.

d)



8 a) Skizze:



Orientierter Flächeninhalt im Bereich $[0; 1]$: $-0,5 \text{ FE}$

Orientierter Flächeninhalt im Bereich $[1; 3]$: 2 FE

Orientierter Flächeninhalt im Bereich $[0; 3]$:

$(-0,5 + 2) \text{ FE} = 1,5 \text{ FE}$

b) (1) $[0; 4]$; $[-1; 3]$

(2) $[0; 4]$; $[-3; 5]$

(3) $[-4; 0]$; $[-5; 3]$

(4) $[2; 6]$; $[-1; 7]$

9 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

10 1 Kästchenfläche entspricht 1000 Menschen.

a) 90 Minuten vor Spielbeginn warten 2000 Menschen. 70 Minuten vor Spielbeginn sind 5000 Menschen angekommen und 4000 eingelassen worden; es warten 1000 Menschen.

b) Die Warteschlange ist 30 Minuten vor Spielbeginn am längsten. Es warten dann 2500 Menschen.

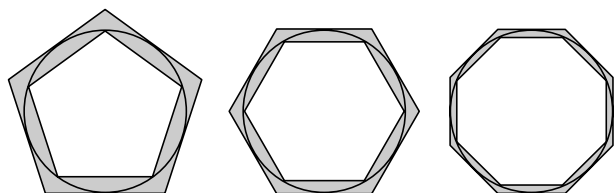
11 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

2 Berechnen von Flächeninhalten

Seite 134

Einstiegsaufgabe

Archimedes hat den Kreis von innen und außen durch regelmäßige Vielecke angenähert und dabei systematisch die Anzahl der Ecken erhöht, um den Kreis immer besser anzunähern.

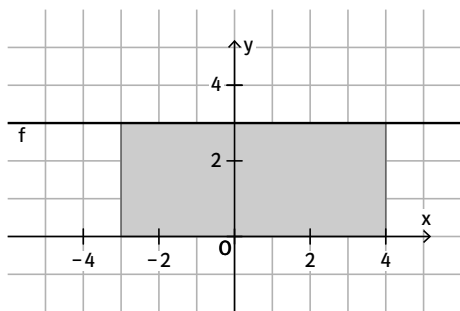


Die Flächeninhalte der Vielecke lassen sich leicht berechnen. So kann man einen Näherungswert für den Flächeninhalt eines Kreises bestimmen.

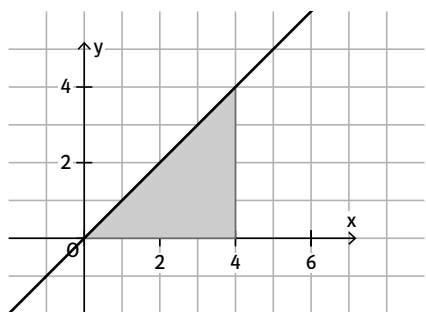
Seite 136

1 a) 25 **b)** 2,5 **c)** -3,5

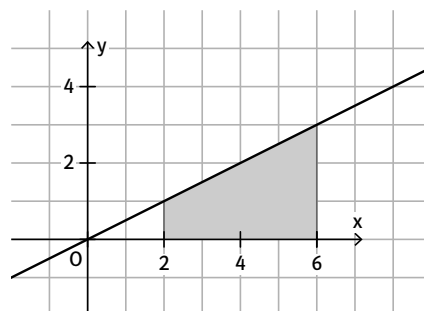
2 a) $\int_{-3}^4 3 \, dx = 7 \cdot 3 = 21$



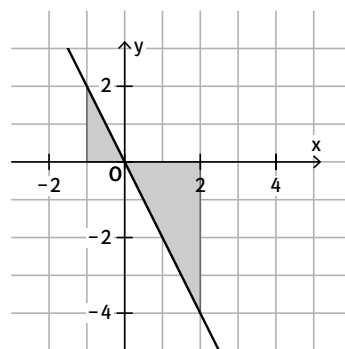
b) $\int_0^4 x \, dx = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$



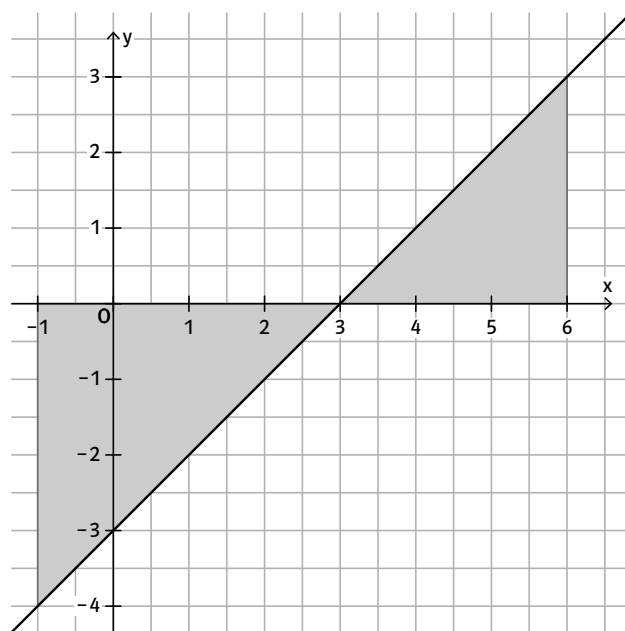
c) $\int_2^6 \frac{1}{2}x \, dx = \frac{1+3}{2} \cdot 4 = 8$



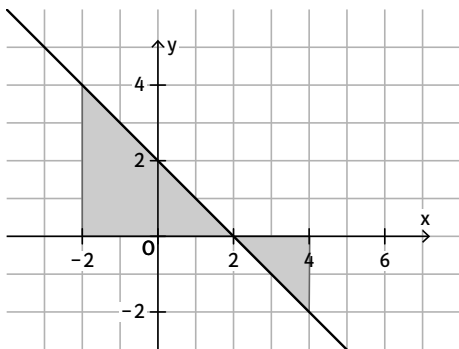
d) $\int_{-1}^2 (-2x) \, dx = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 1 - 4 = -3$



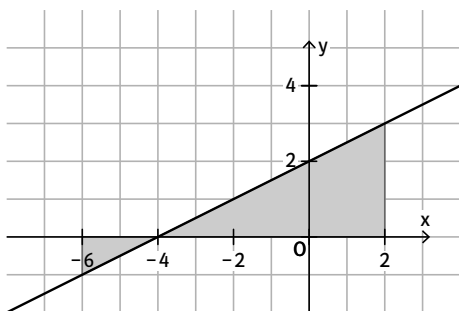
e) $\int_{-1}^6 (x-3) \, dx = -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = -8 + 4,5 = -3,5$



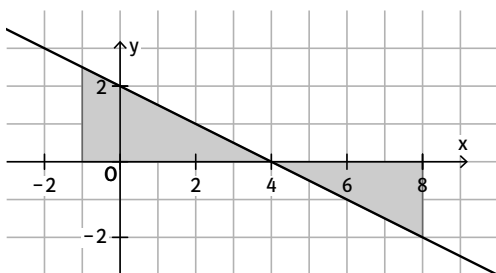
f) $\int_{-2}^4 (2-x) dx = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 8 - 2 = 6$



g) $\int_{-6}^2 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = -1 + 9 = 8$

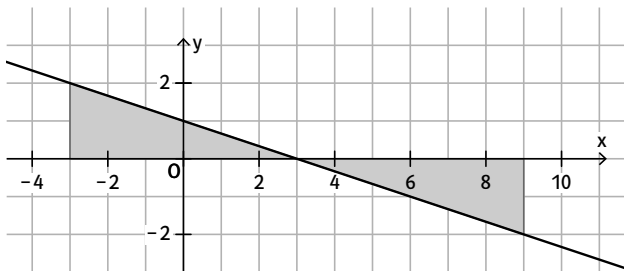


h) $\int_{-1}^8 \left(2 - \frac{1}{2}x\right) dx = \frac{1}{2} \cdot (2 + 0,5) \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 6,25 - 4 = 2,25$

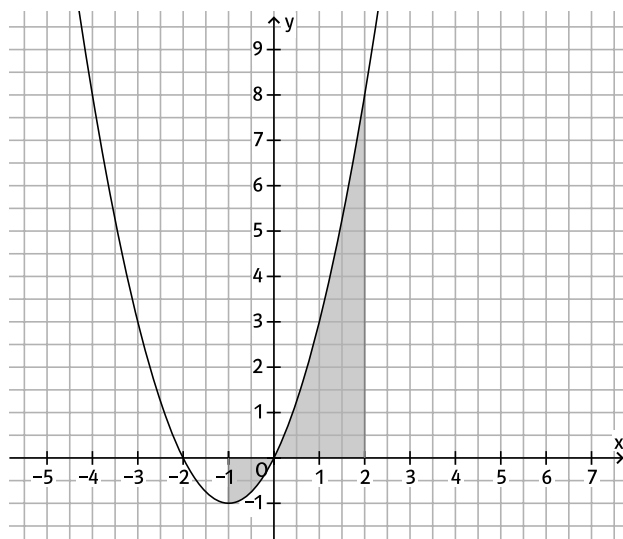


i) $\int_{-3}^9 \left(1 - \frac{1}{3}x\right) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6 - 6 = 0$

Die beiden Flächen sind gleich groß.



3 (I) gehört zu D, (II) zu B, (III) zu E und (IV) zu C.
Skizze zu A:



4 a) Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung und die Grenzen liegen bei -1 und 1. Damit ist die Fläche unter der x-Achse im Intervall $[0; 1]$ die punktgespiegelte Fläche über der x-Achse im Intervall $[-1; 0]$.

Die Werte der Inhalte für die orientierten Flächen heben sich auf und damit ist der Wert des Integrals 0.

$$\int_{-1}^0 (-x) dx = - \int_0^1 (-x) dx$$

b) Der Graph der Funktion liegt ausschließlich oberhalb der x-Achse und damit sind die beiden Teilflächeninhalte jeweils positiv. Der Wert des Integrals ist positiv und nicht 0:

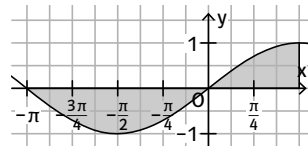
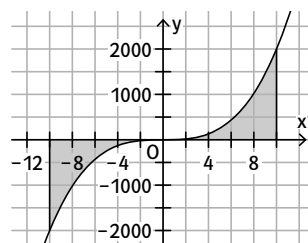
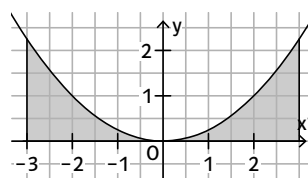
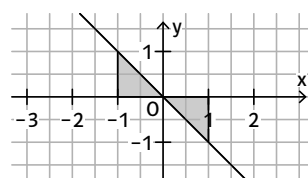
$$\int_{-3}^0 \frac{1}{4}x^2 dx > 0 \quad \text{und} \quad \int_0^3 \frac{1}{4}x^2 dx > 0; \quad \text{dann ist}$$

$$\int_{-3}^3 \frac{1}{4}x^2 dx = \int_{-3}^0 \frac{1}{4}x^2 dx + \int_0^3 \frac{1}{4}x^2 dx > 0.$$

c) Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Durch die Grenzen -10 bis 10 erhält man zwei punktsymmetrische Flächenstücke oberhalb und unterhalb der x-Achse. Der Wert des Integrals ist 0, denn es gilt:

$$\int_{-10}^0 2x^3 dx = - \int_0^{10} 2x^3 dx.$$

d) Der Graph ist ebenfalls punktsymmetrisch zum Ursprung, jedoch liegt das Intervall $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$



nicht symmetrisch zum Ursprung, so dass die entstanden Flächen keine Symmetrie aufweisen. Die Fläche unter der x-Achse ist größer, daher ist der Wert des Integrals negativ und es gilt:

$$-\int_{-\pi}^0 \sin(x) dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx.$$

5 a) $\int_{-2}^{-1} f(x) dx = -A_1 = -0,3$

b) $\int_{-2}^0 f(x) dx = -A_1 + A_2 = -0,3 + 0,8 = 0,5$

c) $\int_0^3 f(x) dx = A_3 - A_1 = 2,9 - 1,1 = 1,8$

d) $\int_{-1}^3 f(x) dx = A_2 + A_3 - A_4 = 0,8 + 2,9 - 1,1 = 2,6$

e) $\int_{-1}^2 f(x) dx = A_2 + A_3 = 0,8 + 2,9 = 3,7$

f) $\int_{-2}^3 f(x) dx = -A_1 + A_2 + A_3 - A_4 = -0,3 + 0,8 + 2,9 - 1,1 = 2,3$

6 In Teilaufgabe ist der Graph zu falsch beschriftet, tatsächlich handelt es sich um den Graphen von $y = -0,75x^2 + 3$.

a) $\int_1^4 \frac{1}{x} dx$

b) $\int_{-2}^2 (-0,75x^2 + 3) dx$

c) $\int_{-4}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) dx$

d) $\int_{-2}^1 (e^x - 0,5) dx$

Seite 137

7 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

8 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

9 a) Das Integral ist positiv, da der Graph des Integranden im Intervall $[10; 80]$ vollständig oberhalb der x-Achse verläuft.

b) Das Integral ist negativ, da der Graph des Integranden im Intervall $[10; 11]$ vollständig unterhalb der x-Achse verläuft.

c) Das Integral ist null, da der Graph des Integranden symmetrisch zum Ursprung ist und die Grenzen spiegelbildlich zur y-Achse liegen.

d) Das Integral ist positiv, da der Graph des Integranden im Intervall $[-3; 3]$ vollständig oberhalb der x-Achse verläuft.

e) Das Integral ist null, da der Graph des Integranden im Intervall $[0; 2\pi]$ gleich große Flächen ober- und unterhalb der x-Achse begrenzt.

10 a) Z.B. $a = 0$ und $b = 2$; $a = -1$ und $b = 3$; $a = -2$ und $b = 4$.

b) Z.B. $a = 0$ und $b = 1$; $a = -1$ und $b = 2$; $a = -2$ und $b = 3$.

c) Z.B. $a = 0$ und $b = 6$; $a = 1$ und $b = 5$; $a = 2$ und $b = 4$.

d) Z.B. $a = 0$ und $b = 3$; $a = -1$ und $b = 4$; $a = -1,5$ und $b = 4,5$.

11 a) Der Graph von f mit $f(x) = x^2$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Daher haben die Integrale über den Intervallen $[-5; -2]$ und $[2; 5]$ den gleichen Wert.

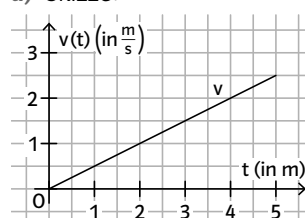
b) Der Graph von f mit $f(x) = 3x^2$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Daher haben die Integrale über den Intervallen $[-4; 0]$ und $[0; 4]$ denselben Wert. Damit

$$\int_{-4}^4 3x^2 dx = \int_{-4}^0 3x^2 dx + \int_0^4 3x^2 dx = 2 \cdot \int_0^4 3x^2 dx.$$

c) Der Graph von f mit $f(x) = (x-1)^2$ ist achsensymmetrisch zur Geraden $x = 1$. Die beiden Intervalle $[-2; 0]$ und $[2; 4]$ liegen symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = 1$. Daher haben auch die Integrale denselben Wert.

12 Die Funktion $v(t) = 0,5 \cdot t$ beschreibt die Geschwindigkeit in der Einheit $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ zum Zeitpunkt t für $0 \leq t \leq 5$ in der Zeiteinheit Sekunden (sec).

a) Skizze:



b) Die gefahrene Länge der Strecken lässt sich mit dem

Integral $\int_0^2 v(t) dt = 1$ bzw. $\int_0^4 v(t) dt = 2$ berechnen.

c) Die Geschwindigkeit des Autos wird ab der fünften Sekunde durch die Funktion $v(t) = v(5) = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ beschrieben. Der zurückgelegte Weg $s(15)$ in den ersten 15 sec lässt sich folglich durch die Summe der Integrale $\int_0^4 v(t) dt + \int_5^{15} w(t) dt$, d.h. durch die Summe der Flächeninhalte eines Dreiecks und eines Rechtecks berechnen: $s(15) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2,5 + 10 \cdot 2,5 = 31,25$. Das Spielzeugauto legt in den ersten 15 sec eine Strecke von 31,25 m zurück. Bemerkung: Da bei dieser Aufgabe der Buchstabe s die Bedeutung für die Länge des zurückgelegten Weges hat und auch die Maßeinheit Sekunden mit s abgekürzt wird, wurde in der Lösung statt s für Sekunden sec geschrieben.

13 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

14 Individuelle Lösung, z.B.:

Es ist $\int_1^3 (1+x) dx = 6$. Für g mit $g(x) = 3$ ist $\int_1^3 3 dx = 6$.

15 a) $\int_0^t 2 dx = 2t$; $\int_{-1}^t 2 dx = 2t + 2$

b) $\int_0^t -x dx = -\frac{1}{2}t^2$; $\int_{-1}^t -x dx = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$

$$c) \int_0^t \frac{3}{2}x dx = \frac{3}{4}t^2; \int_{-1}^t \frac{3}{2}x dx = \frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{4}$$

$$d) \int_0^t (x+1) dx = \frac{1}{2}t^2 + t; \int_{-1}^t (x+1) dx = \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}$$

Ist die untere Grenze -1 , so unterscheiden sich die beiden Integrale $\int_0^t f(x) dx$ und $\int_{-1}^t f(x) dx$ um den konstanten Wert $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

16 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

3 Stammfunktionen

Seite 138

Einstiegsaufgabe

Fehler in der 1. Auflage vom Schülerbuch: Nach $f_9(x)$ fehlt das Gleichheitszeichen.

$$a) f'_1(x) = x^2; f'_2(x) = 2e^{2x}; f'_3(x) = \cos(x); f'_4(x) = 2x; f'_5(x) = e^{2x} - 1; f'_6(x) = -\sin(x); f'_7(x) = x^2; f'_8(x) = 2e^{2x}; f'_9(x) = \sin(x); f'_{10}(x) = x^2 - 1$$

b) Die Funktion f_4 ist die Ableitung der Funktion f_1 .
Die Funktion f_4 ist die Ableitung der Funktion f_7 .
Die Funktion f_8 ist die Ableitung der Funktion f_5 .
Die Funktion f_6 ist die Ableitung der Funktion f_3 .

Seite 139

1 1 gehört zu F, 2 zu B, 3 zu C und 4 zu E.

Mögliche Stammfunktion zu A: $F(x) = 0,75x^3$.

Mögliche Stammfunktion zu D: $F(x) = \frac{1}{6}x^4$.

$$2) a) F(x) = 3x^2 \quad b) F(x) = \frac{1}{3}x^3 \quad c) F(x) = x^5 \\ d) F(x) = e^x \quad e) F(x) = 11x \quad f) F(x) = \frac{3}{16}x^4 \\ g) F(x) = 7e^x \quad h) F(x) = -\frac{1}{6}x^2$$

Seite 140

$$3) a) F'(x) = 5x^4 + x^3 = f(x)$$

$$b) F'(x) = 3x^2 - 8x^3 = f(x)$$

$$c) F'(x) = \cos(x) + 1 = f(x)$$

$$d) F'(x) = \sin\left(\frac{1}{3}x\right) = f(x)$$

$$e) F'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4e^{2x} = f(x)$$

$$f) F'(x) = (4x - 3)^2 = f(x)$$

$$4) a) a = 3 \quad b) a \in \mathbb{R} \quad c) a \in \mathbb{R} \quad d) a = 1$$

$$5) a) F(x) = 5\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x\right)$$

$$b) F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)$$

$$c) f(x) = x^3 - x; F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$$

$$d) f(x) = x^4 - 2x; F(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^2$$

$$e) f(x) = x^3 + x^2; F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$$

$$f) f(x) = x^6 - 4x^4; F(x) = \frac{1}{7}x^7 - \frac{4}{5}x^5$$

$$6) a) F(x) = e^x$$

$$b) F(x) = -e^{-x}$$

$$c) F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$d) F(x) = 6e^{0,5x}$$

$$e) F(x) = x - 5e^{-0,2x}$$

$$f) F(x) = 2x + 10e^{-0,1x}$$

$$7) a) F(x) = -2\cos(x)$$

$$b) F(x) = -\frac{2}{\pi}\cos(\pi x)$$

$$c) F(x) = -\frac{3}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + x$$

$$d) F(x) = -4\sin(x) - 2x$$

$$e) F(x) = \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 0,5x$$

$$f) F(t) = \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) - t$$

8 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

$$9) a) F(x) = \frac{1}{4}(2x+2)^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(2x+2)^4$$

$$b) F(x) = \frac{2}{5}(1-3x)^5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{15}(1-3x)^5$$

$$c) F(x) = \frac{1}{4}(4x-1)^4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}(4x-1)^4$$

$$d) F(x) = \frac{1}{3}(5-x)^3 \cdot (-1) = -\frac{1}{3}(5-x)^3$$

$$e) F(t) = \frac{1}{5}(3t-4)^5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}(3t-4)^5$$

$$f) F(t) = \frac{1}{4}\left(2-\frac{1}{4}t\right)^4 \cdot (-4) = -\left(2-\frac{1}{4}t\right)^4$$

10 a) Alle Stammfunktionen haben den Funktionsterm

$$F(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x + c;$$

Mit $F(0) = c$ erhält man $c = -1$.

Die gesuchte Stammfunktion F hat den Funktionsterm

$$F(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x - 1.$$

b) Alle Stammfunktionen von $f(x) = 5x^4 - x^2$ haben den

$$\text{Funktionsterm } F(x) = x^5 - \frac{1}{3}x^3 + c.$$

Mit $F(0) = c$ erhält man $c = -1$.

Die gesuchte Stammfunktion F hat den Funktionsterm

$$F(x) = x^5 - \frac{1}{3}x^3 - 1.$$

c) Alle Stammfunktionen haben den Funktionsterm

$$F(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)^4 \cdot 2 + c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)^4 + c.$$

Mit $F(0) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + c$ erhält man $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + c = -1$ und

$$\text{somit } c = -1 - \frac{1}{32} = -\frac{33}{32}.$$

Die gesuchte Stammfunktion F hat den Funktionsterm

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)^4 - \frac{33}{32}.$$

d) Alle Stammfunktionen haben den Funktionsterm

$$F(x) = -e^{-2x} - x + c.$$

Mit $F(0) = -e^{-2 \cdot 0} + c$ erhält man $-e^{-2 \cdot 0} + c = -1$ und somit $c = 0$.

Die gesuchte Stammfunktion F hat den Funktionsterm

$$F(x) = -e^{-2x} - x.$$

e) Alle Stammfunktionen haben den Funktionsterm

$$F(x) = -\cos(3x) + 3x + c.$$

Mit $F(0) = -1 + c$ erhält man $-1 + c = -1$ und somit $c = 0$.

Die gesuchte Stammfunktion F hat den Funktionsterm

$$F(x) = -\cos(3x) + 3x.$$

f) Alle Stammfunktionen haben den Funktionsterm

$$F(t) = -\frac{1}{2} \cos(2t) + c.$$

Mit $F(0) = -\frac{1}{2} + c$ erhält man $-\frac{1}{2} + c = -1$ und damit $c = -\frac{1}{2}$.

Die gesuchte Stammfunktion F hat den Funktionsterm

$$F(t) = -\frac{1}{2} \cos(2t) - \frac{1}{2}.$$

11 a) Alle Stammfunktionen haben den Term

$$F(x) = 2e^x + x + c.$$

Mit $F(0) = 2 + c$ erhält man $2 + c = 1$ und somit $c = -1$.

Die gesuchte Stammfunktion hat den Term

$$F(x) = 2e^x + x - 1.$$

b) Alle Stammfunktionen haben den Term

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + \frac{e}{2}x^2 + c.$$

Mit $F(0) = \frac{1}{2}e + c$ erhält man $\frac{1}{2}e + c = 1$ und somit $c = 1 - \frac{e}{2}$.

Die gesuchte Stammfunktion hat den Term

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + \frac{e}{2}x^2 + 1 - \frac{e}{2}.$$

c) Alle Stammfunktionen haben den Term

$$F(x) = 5e^{0,2x-1} + \frac{1}{2}x^2 - ex + c.$$

Mit $F(0) = 5e^{-1} + c$ erhält man $\frac{5}{e} + c = 1$ und somit $c = 1 - \frac{5}{e}$.

Die gesuchte Stammfunktion hat den Term

$$F(x) = 5e^{0,2x-1} + \frac{1}{2}x^2 - ex + 1 - \frac{5}{e}.$$

d) Alle Stammfunktionen haben den Term

$$F(x) = 30e^{0,1x-1} - 4x + c.$$

Mit $F(0) = 30e^{-1} + c$ erhält man $\frac{30}{e} + c = 1$ und somit $c = 1 - \frac{30}{e}$.

Die gesuchte Stammfunktion hat den Term

$$F(x) = 30e^{0,1x-1} - 4x + 1 - \frac{30}{e}.$$

e) Alle Stammfunktionen haben den Term

$$F(x) = -\frac{1}{4}e^{4-2x} + 3x + c.$$

Mit $F(0) = -\frac{1}{4}e^4 + c$ erhält man $-\frac{1}{4}e^4 + c = 1$ und somit $c = 1 + \frac{1}{4}e^4$.

Die gesuchte Stammfunktion hat den Term

$$F(x) = -\frac{1}{4}e^{4-2x} + 3x + 1 + \frac{1}{4}e^4.$$

f) Alle Stammfunktionen haben den Term

$$F(z) = -\frac{2}{25}e^{1-5z} - \frac{1}{3}z^3 + c.$$

Mit $F(0) = -\frac{2}{25}e + c$ erhält man $-\frac{2}{25}e + c = 1$ und somit $c = 1 + \frac{2}{25}e$.

Die gesuchte Stammfunktion hat den Term

$$F(z) = -\frac{2}{25}e^{1-5z} - \frac{1}{3}z^3 + 1 + \frac{2}{25}e.$$

12 a) Alle Stammfunktionen haben den Term

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + 4x + c.$$

Mit $F(0) = c$ erhält man $c = 0,5$.

Die gesuchte Stammfunktion hat den Term

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + 4x + 0,5.$$

b) Alle Stammfunktionen haben den Term

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + ex + c.$$

Mit $F(0) = \frac{1}{2} + c$ erhält man $c + \frac{1}{2} = 0,5$ und somit $c = 0$.

Die gesuchte Stammfunktion hat den Term

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + ex.$$

c) Alle Stammfunktionen haben den Term

$$F(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) + c.$$

Mit $F(0) = -\frac{1}{2} + c$ erhält man $-\frac{1}{2} + c = 0,5$ und somit $c = 1$.

Die gesuchte Stammfunktion hat den Term

$$F(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) + 1.$$

Seite 141

13 a) $F(x) = -\frac{1}{2}x^{-2}$

b) $F(x) = -\frac{1}{2}(2x+1)^{-1}$

c) $F(x) = -\frac{1}{3}(5-x)^{-3} \cdot (-1); F(x) = \frac{1}{3}(5-x)^{-3}$

d) $F(x) = -4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (3x+1)^{-4} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(3x+1)^{-4}$

e) $f(x) = x^{-2}; F(x) = -x^{-1}; F(x) = -\frac{1}{x}$

f) $f(x) = (1-x)^{-3}; F(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-2} \cdot (-1); F(x) = \frac{1}{2(1-x)^2}$

14 a) $F(x) = \frac{2}{1,5}x^{1,5}; F(x) = \frac{4}{3}x^{1,5}$

b) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{0,5}; F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1,5} x^{1,5}; F(x) = \frac{1}{3}x^{1,5}$

c) $F(x) = \frac{1}{1,5}(2x)^{1,5} \cdot \frac{1}{2}; F(x) = \frac{1}{3}(2x)^{1,5}$

d) $f(x) = \sqrt{0,5} \cdot x^{0,5}; F(x) = \frac{\sqrt{0,5}}{1,5} x^{1,5} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} x^{1,5}; F(x) = \frac{\sqrt{2}}{3} x^{1,5}$

e) $F(x) = \frac{1}{1,5}(1-2x)^{1,5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right); F(x) = -\frac{1}{3}(1-2x)^{1,5};$

f) $f(x) = (1-0,5x)^{0,5}; F(x) = \frac{1}{1,5}(1-0,5x)^{1,5} \cdot (-2); F(x) = -\frac{4}{3}(1-0,5x)^{1,5}$

15 a) $f(x) = x^2 - x^{-2}$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{x} + c;$ Punktprobe: $F(1) = 2$

$\frac{1}{3} + 1 + c = 2$ ergibt $c = \frac{2}{3}; F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{3}$

b) $F(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - ex + c;$ Punktprobe: $F(1) = 2$

$\frac{3}{2}e^2 - e + c = 2$ ergibt $c = 2 + e - \frac{3}{2}e^2.$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{x} + 2 + e - \frac{3}{2}e^2$

c) $F(x) = -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x + c$ Punktprobe: $F(1) = 2$

$-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 + c = 2$ ergibt $c = 1.$

$F(x) = -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x + 1$

d) $F(x) = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x + c$ Punktprobe: $F(1) = 2$

$\frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 + c = 2$ ergibt $c = 3 - \frac{4}{\pi}.$

$F(x) = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x + 3 - \frac{4}{\pi}$

e) $F(t) = \frac{1}{4}t^4 - \ln(t) + c$ Punktprobe: $F(1) = 2$

$\frac{1}{4} - \ln(1) + c = 2$ ergibt $c = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$

$F(t) = \frac{1}{4}t^4 - \ln(t) + \frac{7}{4}$

f) $f(z) = (3+z)^{-\frac{1}{2}}$

$F(z) = 2 \cdot (3+z)^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{3+z} + c$

Punktprobe: $F(1) = 2$

$2\sqrt{3+1} + c = 2$ ergibt $c = -2.$

$F(z) = 2\sqrt{3+z} - 2$

16 a) $F(x) = x^3 + x + c$;

$F(1) = 0,5$ d.h. $1 + 1 + c = 0,5$ d.h. $c = -1,5$;

$F(x) = x^3 + x - 1,5$

b) $F(x) = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + c$;

$F(2) = -5,4$

d.h. $-\frac{32}{5} + 2 + c = -5,4$

d.h. $-4,4 + c = -5,4$ d.h. $c = -1$.

$F(x) = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 - 1$

c) $F(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x + c$;

$F(2) = \frac{2}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right) + 2 + c = 1$

d.h. $0 + 2 + c = 1$ d.h. $c = -1$.

$F(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x - 1$

d) $F(x) = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi x) + x + c$

$F(x) = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} + c = \frac{5}{2}$ d.h. $0 + \frac{1}{2} + c = \frac{5}{2}$ d.h. $c = 2$.

$F(x) = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi x) + x + 2$

e) $F(x) = x - e^{-x} + c$ d.h. $F(0) = 0 - e^{-0} + c = 0$

d.h. $0 - 1 + c = 0$ d.h. $c = 1$.

$F(x) = x - e^{-x} + 1$

f) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}e^{2x} + c$

d.h. $F(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{-2} + c = 2 \cdot e^{-2}$; $c = \frac{3}{2} \cdot e^{-2} - \frac{1}{2}$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{2} \cdot e^{-2} - \frac{1}{2}$

17 a) $F'(x) = -\cos(x) + (-x) \cdot (-\sin(x)) + \cos(x)$
 $= x \cdot \sin(x) = f(x)$

b) $F(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)e^{3x}$;

$F'(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)e^{3x} = \frac{1}{3}e^{3x} + xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x}$
 $= xe^{3x} = f(x)$

18 a) $f'(x) = (x+3)e^x$; $f''(x) = (x+4)e^x$

b) Vermutung: $F(x) = (x+1)e^x$.

c) $F'(x) = (x+2)e^x = f(x)$.

d) $F(x) = (x+1)e^x + c$

Punktprobe: $F(0) = 0$: $(0+1)e^0 + c = 0$ ergibt $c = -1$.

$F(x) = (x+1)e^x - 1$.

19 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

20 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

21 A: $F(x) = \frac{1}{32}(4x+3)^4$. (Der Faktor $\frac{1}{m}$ wurde bei der linearen Substitution vergessen.)

B: $F(x) = -\frac{2}{x+1}$. (Die Hochzahl -2 muss um eins vergrößert werden; dies ergibt -1 , nicht -3 .)

C: $F(x) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)$. (Die innere Funktion wird beibehalten.)

D: $F(x) = x^2 + \frac{3}{5}e^{5x}$. (Der Kehrwert des Faktors 5 im Exponenten wird zum Vorfaktor in der Stammfunktion.)

22 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

23 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

4 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Seite 142

Einstiegsaufgabe

v(t)	Zugehörige Bewegung	Zurückgelegter Weg in 10 s
10 - t	Das Auto bremst in 10 s von $10 \frac{m}{s}$ bis zum Stillstand ab.	50 m
0	Das Auto steht still.	0
2t	Das Auto beschleunigt in 10 s von $0 \frac{m}{s}$ auf $20 \frac{m}{s}$.	100 m
5	Das Auto bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit ($5 \frac{m}{s}$).	$5 \frac{m}{s} \cdot 10 s = 50 m$

Seite 143

1 a) $\int_1^3 3x^2 dx = [x^3]_1^3 = 27 - 1 = 26$

b) $\int_0^4 2x dx = [x^2]_0^4 = 16$

c) $\int_2^4 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}$

d) $\int_{100}^{150} 3 dx = [3x]_{100}^{150} = 450 - 300 = 150$

2 a) $\int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

b) $\int_{-1}^0 (x-1) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{3}{2}$

c) $\int_0^2 3x^2 dx = [x^3]_0^2 = 8 - 0 = 8$

d) $\int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 4 - 0 = 4$

e) $\int_0^{\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$

f) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_{-\pi}^{\pi} = 1 - 1 = 0$

g) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = [\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = 2$

h) $\int_0^{2\pi} \cos(3x) dx = \left[\frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$

i) $\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 \approx 1,72$

j) $\int_0^{\ln(3)} 2e^x dx = [2e^x]_0^{\ln(3)} = 2e^{\ln(3)} - 2e^0 = 2 \cdot 3 - 2 = 4$

$$\text{k) } \int_0^1 (e^{2x} + 1) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} + x \right]_0^1 = \frac{1}{2} e^2 + 1 - \frac{1}{2} e^0 - 0 = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \approx 4,19$$

$$\text{l) } \int_{-1}^0 6e^{3x} dx = \left[6 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} \right]_{-1}^0 = [2e^{3x}]_{-1}^0 = 2 - 2e^{-3} = 2 - \frac{2}{e^3} \approx 1,90$$

$$\text{3 a) } \int_1^5 \frac{1}{5} x^4 dx = \left[\frac{1}{25} x^5 \right]_1^5 = 5^3 - \frac{1}{25} = 125 - \frac{1}{25} = 124,96$$

$$\text{b) } \int_1^5 \left(\frac{1}{2} x^2 - 3x + 2,5 \right) dx = \left[\frac{1}{6} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2,5x \right]_1^5 = -\frac{25}{6} - \left(\frac{7}{6} \right) = -\frac{16}{3}$$

$$\text{c) } \int_1^5 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_1^5 = 0 - 0 = 0$$

$$\text{d) } \int_1^5 \cos(\pi x) dx = \left[\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \right]_1^5 = 0 - 0 = 0$$

$$\text{e) } \int_1^5 e^{5-x} dx = [-e^{5-x}]_1^5 = -1 - (-e^4) = e^4 - 1 \approx 53,6$$

$$\text{f) } \int_1^5 (5 - e^{-x}) dx = [5x + e^{-x}]_1^5 = 25 + e^{-5} - \left(5 + \frac{1}{e} \right) \approx 20 - 0,36 = 19,64$$

4 Zunächst bildet man zur Funktion g eine Stammfunktion G . Man setzt die obere Grenze des Integrals, also 3 in G ein und subtrahiert davon den Funktionswert von G an der Stelle -1 , also $G(3) - G(-1)$. Die erhaltene Zahl ist der Wert des Integrals.

$$\text{5 a) } \int_{-1}^1 (3x^2 + e^x) dx = [x^3 + e^x]_{-1}^1 = 1 + e - \left(-1 + \frac{1}{e} \right) \approx 4,35$$

$$\text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

$$\text{c) } \int_0^{\pi} \sin(2x) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\text{d) } \int_2^3 \left(2 - \frac{1}{5}x \right)^3 dx = \left[\frac{1}{4} \left(2 - \frac{1}{5}x \right)^4 \cdot (-5) \right]_2^3 = \left[-\frac{5}{4} \left(2 - \frac{1}{5}x \right)^4 \right]_2^3 = -\frac{2401}{500} - \left(-\frac{1024}{125} \right) = 3,39$$

(Funktionsterm der Stammfunktion in TR abspeichern)

$$\text{e) } \int_0^4 x(x-4) dx = \int_0^4 (x^2 - 4x) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 \right]_0^4 = \frac{64}{3} - 32 - 0 = -\frac{32}{3}$$

$$\text{f) } \int_{-2}^4 x(x-4) dx = \int_{-2}^4 (x^2 - 4x) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 \right]_{-2}^4 = \frac{64}{3} - 32 - \left(-\frac{8}{3} - 8 \right) = 0.$$

Seite 144

$$\text{6 } \dots = (-5 \cdot (-1)) - (-5 \cdot (-3)) = 5 - 15 = -10$$

$$\text{7 a) } \int_0^4 -x dx = \left[-\frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 = -8$$

$$\text{b) } \int_{-1}^1 -2x dx = [-x^2]_{-1}^1 = 0$$

$$\text{c) } \int_{-2}^2 -x^2 dx = \left[-\frac{1}{3} x^3 \right]_{-2}^2 = -\frac{8}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{16}{3}$$

$$\text{d) } \int_{-4}^{-2} -0,5x dx = [-0,25x^2]_{-4}^{-2} = -1 - (-4) = 3$$

$$\text{e) } \int_{20}^{-10} -1 dx = [-x]_{20}^{-10} = -10$$

8 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

9 Die zweite Zeile bei Bernd muss „ $-1 - (-4)$ “ statt „ $1 - (-4)$ “ heißen. Bernd hat das richtige Ergebnis.

Anna vergisst das Minus vor 2 und 1.

Catharina vergisst das Minus vor 1 und $(-2)^2$.

Dennis vergisst das Minus vor $(-1)^2$ und vor $(-2)^2$.

10 Die Funktion F mit $F(x) = 0,4x^2$ muss eine Stammfunktion des Integranden sein. Das ist nur bei III der Fall, denn $F'(x) = 0,8x$. Das Integral hat den Wert 1,2.

11 a) $F(x) = 0$ für $x = -1$ und $x = 5$.

b) $f(x) = 0$ bzw. $F'(x) = 0$ für $x = -1$ und $x = 3$.

$$\text{c) } \int_1^3 f(x) dx = F(3) - F(1) = 2 - 1 = 1.$$

d) Die Aussage ist falsch.

Begründung: Am Graphen von F liest man ab, dass $F'(1) > 0$ und $F'(3) = 0$ gilt, also $F'(1) > F'(3)$. Da f die Ableitungsfunktion von F ist, gilt entsprechend $f(1) > f(3)$.

12 a) Der Wert des Integrals entspricht der Länge der Strecke, die der Körper im Zeitraum von 0 bis 5 Sekunden fällt.

b) Da die Fallgeschwindigkeit zunimmt, ist sie im Intervall $[2; 3]$ größer als im Intervall $[0; 1]$. Daher ist die Länge der Strecke, die der Körper im Intervall $[2; 3]$ fällt, auch länger als die im Intervall $[0; 1]$.

c) $V(t) = 4,905t^2$. Mit V berechnet man die Länge der Strecke, die der Körper zum Zeitpunkt t gefallen ist, wenn er zum Zeitpunkt $t = 0$ zu fallen beginnt.

$$\text{d) } \int_1^4 v(t) dt = [4,905t^2]_1^4 = 4,905 \cdot 16 - 4,905 = 73,575$$

13 a) Das Integral gibt an, wie viele Meter der Fußgänger im Zeitraum von 0 bis 3 Minuten geht.

b) Das Integral gibt an, wie viele Kubikmeter Öl im Zeitraum 0 bis 3 Sekunden durch die Ölpipeline fließen.

c) Das Integral gibt an, wie viele 1000 Tonnen Benzin im Zeitraum von 0 bis 3 Stunden produziert werden.

14 Wachstumsgeschwindigkeit: $f(t) = 0,27e^{-0,147t}$

$$\text{Pflanzenhöhe: } H(t) = 0,2 + \int_0^t 0,27e^{-0,147x} dx$$

$$H(t) = 0,2 + \frac{90}{49} - \frac{90}{49} \cdot e^{-0,147x}$$

$$H(t) = \frac{499}{245} - \frac{90}{49} \cdot e^{-0,147x}$$

$$H(5) = \frac{499}{245} - \frac{90}{49} \cdot e^{-0,147 \cdot 5} \approx 1,16$$

$$H(10) = \frac{499}{245} - \frac{90}{49} \cdot e^{-0,147 \cdot 10} \approx 1,61$$

Nach 5 Wochen beträgt die Höhe der Pflanze 1,16 m und nach 10 Wochen 1,61 m.

Seite 145

15 a) $\int_{10}^{50} v(t) dt$ gibt an, um wie viele Meter der Baum

zwischen dem 10. und dem 50. Jahr gewachsen ist.

$$b) V'(t) = \frac{2}{30} \cdot \frac{3}{2} \cdot (t+4)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{t+4} = v(t)$$

$$\int_{10}^{50} v(t) dt = \left[\frac{2}{30} (t+4)^{\frac{3}{2}} \right]_{10}^{50} \approx \frac{2}{30} \cdot 396,82 - \frac{2}{30} \cdot 52,38 \approx 22,96$$

c) Höhe des Baums nach 20 Jahren:

$$15 + \int_{10}^{20} v(t) dt = 15 + \frac{2}{30} (\sqrt{24}^3 - \sqrt{14}^3) \approx 19,35$$

Der Baum ist nach 20 Jahren etwa 19,5 Meter hoch.

d) Mit dem Integralausdruck lässt sich der Zehn-Jahres-Zeitraum berechnen, in dem der Baum um fünf Meter wächst.

16 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

17 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

18 Mögliche Funktionen sind all die Funktionen, deren Graphen punktsymmetrisch zu O sind, also $f(x) = c \cdot x^k$ mit ungeradem $k \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}$.

$$\mathbf{19 a)} \int_0^z x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^z = \frac{1}{2} z^2 = 18; z = 6$$

$$\mathbf{b)} \int_1^z 4x dx = [2x^2]_1^z = 2z^2 - 2 = 30; z = 4$$

$$\mathbf{c)} \int_z^{10} 2x dx = [x^2]_z^{10} = 100 - z^2 = 19; z = 9$$

$$\mathbf{d)} \int_0^{2z} 0,4 dx = [0,4x]_0^{2z} = 0,8z = 8; z = 10$$

$$\mathbf{20 a)} \int_0^t 2 dx = [2x]_0^t = 2t - 0 = 2t$$

Der Wert des Integrals in Abhängigkeit von t lautet $2t$. $2t = 3$ ergibt $t = 1,5$. Für $t = 1,5$ hat das Integral den Wert 3.

Setzt man als untere Grenze -1 ein erhält man

$$\int_{-1}^t 2 dx = 2t + 2.$$

In diesem Fall hat das Integral für $t = 0,5$ den Wert 3.

$$\mathbf{b)} \int_0^t -x dx = \left[-\frac{1}{2} x^2 \right]_0^t = -\frac{1}{2} t^2 - 0 = -\frac{1}{2} t^2$$

$$-\frac{1}{2} t^2 = 3 \text{ ergibt keine Lösung.}$$

Setzt man als untere Grenze -1 ein erhält man

$$\int_{-1}^t -x dx = -\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2}.$$

Auch in diesem Fall gibt es keine Lösung.

$$\mathbf{c)} \int_0^t \frac{3}{2} x dx = \left[\frac{3}{4} x^2 \right]_0^t = \frac{3}{4} t^2 - 0 = \frac{3}{4} t^2$$

$$\frac{3}{4} t^2 = 3 \text{ ergibt } t = 2. \text{ Für } t = 2 \text{ hat das Integral den Wert 3.}$$

Setzt man als untere Grenze -1 ein erhält man

$$\int_{-1}^t \frac{3}{2} x dx = \frac{3}{4} t^2 - \frac{3}{4}.$$

In diesem Fall hat das Integral für $t = \sqrt{5}$ den Wert 3.

$$\mathbf{d)} \int_0^t (x+1) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + x \right]_0^t = \frac{1}{2} t^2 + t - 0 = \frac{1}{2} t^2 + t$$

$$\frac{1}{2} t^2 + t = 3 \text{ ergibt die quadratische Gleichung}$$

$$t^2 + 2t - 6 = 0.$$

Man erhält die Lösung $t = -1 + \sqrt{7} \approx 1,65$. Für $t = -1 + \sqrt{7}$ hat das Integral den Wert 3.

Setzt man als untere Grenze -1 ein erhält man

$$\int_{-1}^t (x+1) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + x \right]_{-1}^t = \frac{1}{2} t^2 + t - \left(\frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} t^2 + t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (t+1)^2$$

In diesem Fall hat das Integral für $t = -1 + \sqrt{6} \approx 1,45$ den Wert 3.

$$\mathbf{21 a)} \int_a^b c \cdot f(x) dx = [c \cdot F(x)]_a^b = c \cdot F(b) - c \cdot F(a)$$

$$= c \cdot (F(b) - F(a)) = c \cdot [F(x)]_a^b = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\mathbf{b)} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = [F(x) + G(x)]_a^b$$

$$= F(b) + G(b) - (F(a) + G(a))$$

$$= F(b) + G(b) - F(a) - G(a)$$

$$= F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$$

$$= [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

22 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

5 Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse

Seite 146

Einstiegsaufgabe

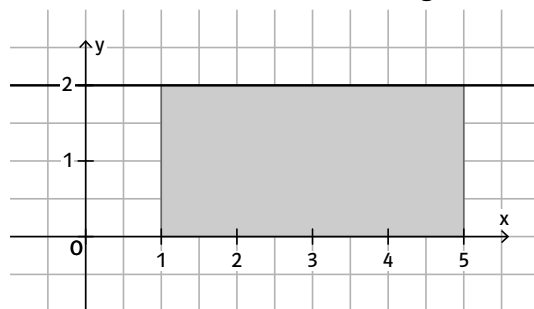
Die gefärbten Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse sind gleich groß. Es genügt die Größe einer Fläche zu bestimmen. Die Fläche oberhalb der x-Achse kann man über das Zählen der Kästchen bestimmen. Die Fläche entspricht etwa 8 Kästchen. Der Flächeninhalt von 12 Kästchen beträgt π FE. Dann beträgt der Flächeninhalt von 8 Kästchen etwa $\frac{2}{3}\pi$ FE. Der Flächeninhalt unterhalb der x-Achse entspricht ebenfalls $\frac{2}{3}\pi$ FE.

Seite 147

1 a) Der Graph liegt oberhalb der x-Achse, der Flächeninhalt entspricht also dem Integralwert.

$$A = \int_1^5 2 dx = [2x]_1^5 = 10 - 2 = 8$$

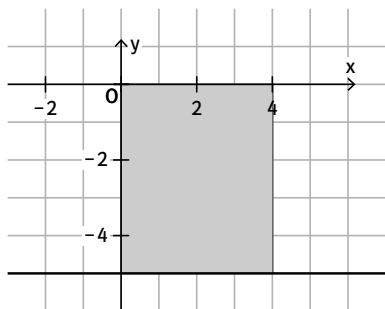
Die Fläche ist ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 und 2. Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 8.



- b)** Der Graph liegt unterhalb der x-Achse, der Flächeninhalt entspricht also dem negativen Integralwert.

$$A = -\int_0^4 (-5) dx = -[-5x]_0^4 = -(-20) = 20$$

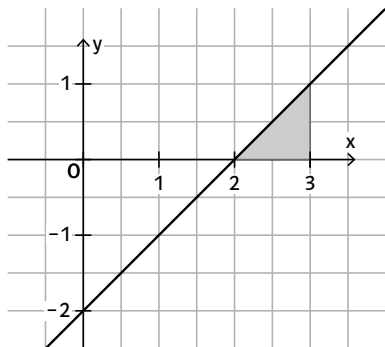
Die Fläche ist ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 und 5. Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 20.



- c)** Der Flächeninhalt entspricht dem Integralwert.

$$A = \int_2^3 (x - 2) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_2^3 = \frac{9}{2} - 6 - (2 - 4) = 0,5$$

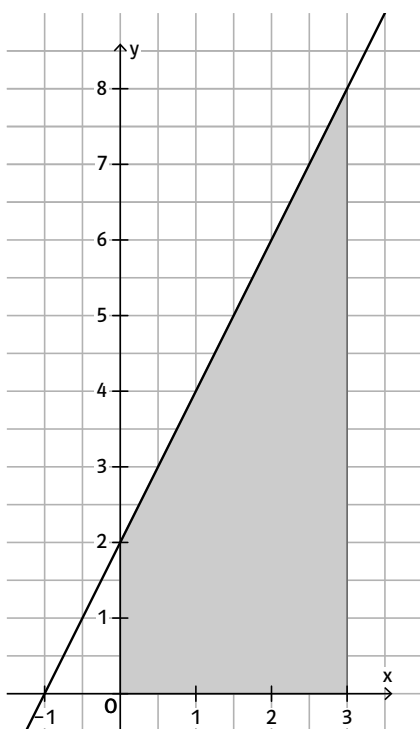
Die Fläche ist ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten beide die Länge 1 haben. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks beträgt 0,5.



- d)** Der Flächeninhalt entspricht dem Integralwert.

$$A = \int_0^3 (2x + 2) dx = [x^2 + 2x]_0^3 = 9 + 6 = 15$$

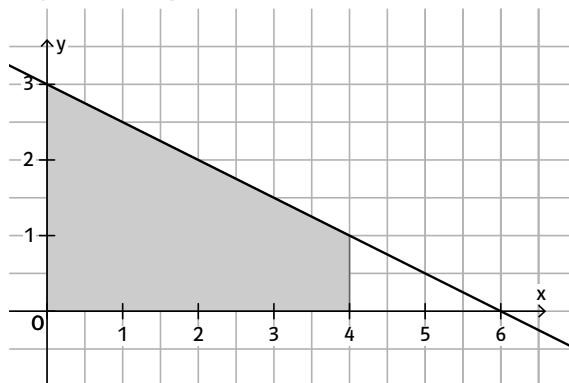
Die Fläche ist ein Trapez mit einer Höhe von 3 und einer Länge der Mittelparallelen von 5. Der Flächeninhalt des Trapezes beträgt 15.



- e)** Der Flächeninhalt entspricht dem Integralwert.

$$A = \int_0^4 \left(3 - \frac{1}{2}x \right) dx = \left[3x - \frac{1}{4}x^2 \right]_0^4 = 12 - 4 = 8$$

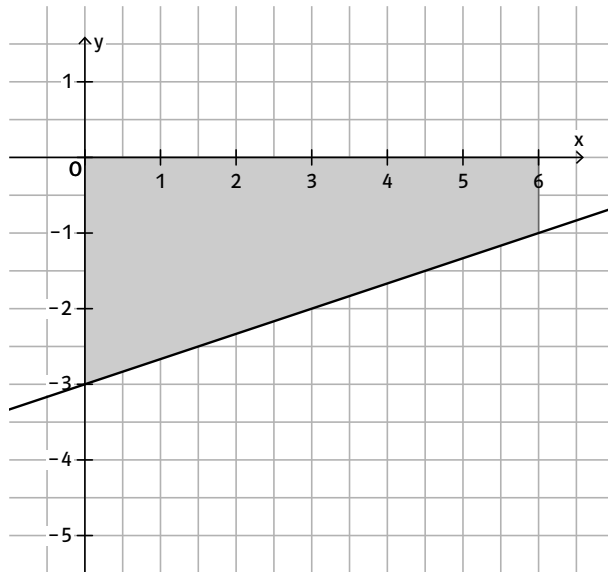
Die Fläche ist ein Trapez mit einer Höhe von 4 und einer Länge der Mittelparallelen von 2. Der Flächeninhalt des Trapezes beträgt 8.



- f)** Der Flächeninhalt entspricht dem negativen Integralwert.

$$A = -\int_0^6 \left(\frac{1}{3}x - 3 \right) dx = -\left[\frac{1}{6}x^2 - 3x \right]_0^6 = -(6 - 18) = -(-12) = 12$$

Die Fläche ist ein Trapez mit einer Höhe von 6 und einer Länge der Mittelparallelen von 2. Der Flächeninhalt des Trapezes beträgt 12.



- 2 a)** Der Graph liegt oberhalb der x-Achse, der Flächeninhalt entspricht also dem Integralwert.

$$A = \int_0^3 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = 18 - 9 = 9$$

- b)** Der Flächeninhalt entspricht dem Integralwert

$$A = \int_1^3 (9x - x^3) dx = \left[\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_1^3 = \frac{81}{2} - \frac{81}{4} - \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{4} \right) = 16$$

- c)** Der Flächeninhalt entspricht dem Integralwert

$$A = \int_0^\pi \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -(-1) - (-1) = 2$$

d) Der Graph liegt unterhalb der x-Achse, der Flächeninhalt entspricht also dem negativen Integralwert.

$$A = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x) dx = - [\sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = -(-1 - 1) = 2$$

3 a) Der Flächeninhalt entspricht dem Integralwert.

$$A = \int_0^1 (8 - x^3) dx = \left[8x - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = 8 - \frac{1}{4} = 7,75$$

b) Der Flächeninhalt entspricht dem Integralwert.

$$A = \int_1^5 (2 - e^{-x}) dx = [2x + e^{-x}]_1^5 = 10 + e^{-5} - (2 + e^{-1}) \approx 7,64$$

c) Der Flächeninhalt entspricht dem negativen Integralwert.

$$A = - \int_1^2 (3x^2 - 9x) dx = - \left[x^3 - \frac{9}{2}x^2 \right]_1^2 = -(8 - 18 - (1 - 4,5)) = 6,5$$

d) Der Flächeninhalt entspricht dem Integralwert.

$$A = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(x) dx = [\sin(x)]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \approx 1,73$$

4 Alle Flächen im I. Quadranten liegen über der x-Achse, daher entspricht im I. Quadranten der Integralwert dem Flächeninhalt.

a) Die Nullstellen von f sind bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$. Sie sind die Integralgrenzen. Der Flächeninhalt beträgt

$$A = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2} = 4,5$$

b) Die Nullstellen von f sind bei $x_{1,2} = \pm 2$. Die Integralgrenzen im I. Quadranten sind $a = 0$ und $b = 2$. Der Flächeninhalt beträgt

$$A = \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[2x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{6} - 0 = \frac{16}{6}$$

c) Die Nullstelle von f ist bei $x_1 = 2$. Die Integralgrenzen im I. Quadranten sind $a = 0$ und $b = 2$. Der Flächeninhalt beträgt

$$A = \int_0^2 (8 - x^3) dx = \left[8x - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 16 - 4 - 0 = 12$$

d) Die Nullstellen von f sind bei $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm 2$. Die Integralgrenzen im I. Quadranten sind $a = 0$ und $b = 2$. Der Flächeninhalt beträgt

$$A = \int_0^2 (4x - x^3) dx = \left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 8 - 4 - 0 = 4$$

e) Die Nullstelle von f ist $x_1 = \ln(e) = 1$. Die Integralgrenzen im I. Quadranten sind $a = 0$ und $b = 1$. Der Flächeninhalt beträgt

$$A = \int_0^1 (e - e^x) dx = [ex - e^x]_0^1 = e - e - (-1) = 1$$

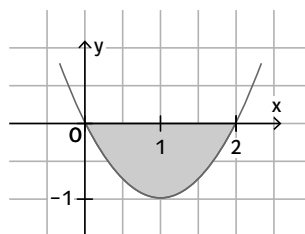
f) Die Nullstelle von f ist $x_0 = \ln(6)$. Die Integralgrenzen im I. Quadranten sind $a = 0$ und $b = \ln(6)$. Der Flächeninhalt beträgt

$$A = \int_0^{\ln(6)} \left(3 - \frac{1}{2}e^x\right) dx = \left[3x - \frac{1}{2}e^x\right]_0^{\ln(6)} = 3\ln(6) - 3 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 3\ln(6) - 2,5 \approx 2,88$$

5 Alle Flächen im IV. Quadranten liegen unter der x-Achse, daher entspricht dort der Flächeninhalt dem negativen Integralwert.

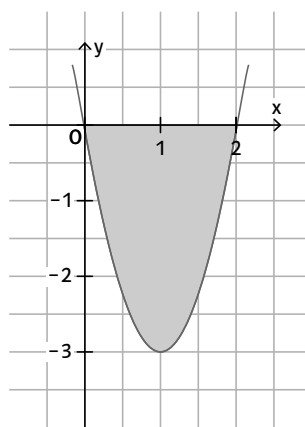
a) Die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2x$ sind bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Sie sind die gesuchten Integralgrenzen. Der Flächeninhalt beträgt:

$$A = - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx = - \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^2 = - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{4}{3}$$



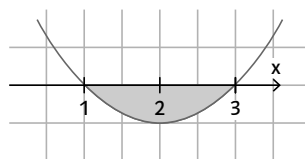
b) Die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ sind bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Sie sind die Integralgrenzen. Der Flächeninhalt beträgt:

$$A = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) dx = - \left[x^3 - 3x^2 \right]_0^2 = -(8 - 12) = 4$$



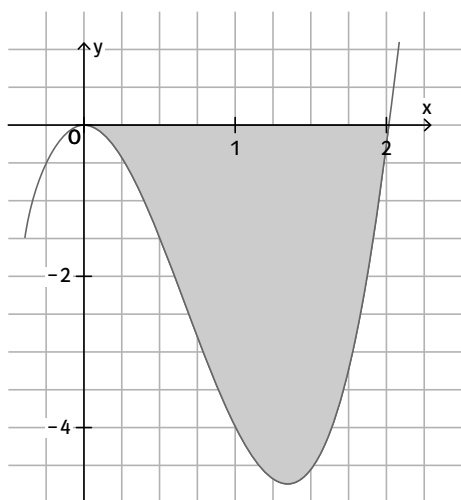
c) Die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ sind bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$. Sie sind die Integralgrenzen. Der Flächeninhalt beträgt:

$$A = - \int_1^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} \right) dx = - \left[\frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x \right]_1^3 = - \left(\frac{27}{6} - 9 + \frac{9}{2} - \left(\frac{1}{6} - 1 + \frac{3}{2} \right) \right) = - \left(0 - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}$$



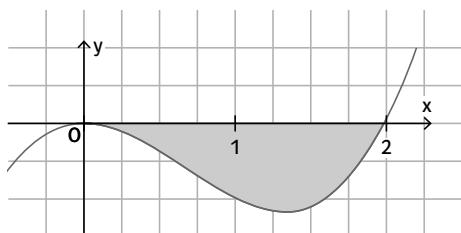
d) Die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = 4x^3 - 8x^2$ sind bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Sie sind die Integralgrenzen. Der Flächeninhalt beträgt:

$$A = - \int_0^2 (4x^3 - 8x^2) dx = - \left[x^4 - \frac{8}{3}x^3 \right]_0^2 = - \left(16 - \frac{64}{3} \right) = \frac{16}{3} \approx 5,33$$



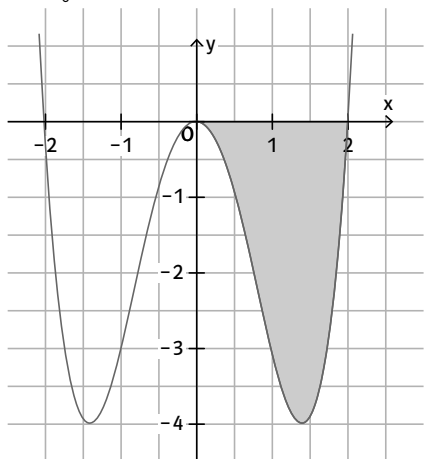
e) Die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2$ sind bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Sie sind die Integralgrenzen. Der Flächeninhalt beträgt:

$$A = -\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - x^2\right) dx = -\left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = -\left(2 - \frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3} \approx 0,67$$



f) Die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4)$ sind bei $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$. x_2 und x_3 sind die Integralgrenzen. Der Flächeninhalt beträgt:

$$A = -\int_0^2 (x^4 - 4x^2) dx = -\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\right]_0^2 = -\left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3}\right) = \frac{64}{15} \approx 4,27$$



Seite 148

6 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

7 a)
$$A = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx - \int_{-1}^0 (x^2 - 1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^0 = 2$$

b)
$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(x) dx + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \cos(x) dx \right|$$

$$= [2 \sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left| [2 \sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right| = 2 - (-2) + |0 - 2| = 6$$

c) Nullstellen von $f(x) = x^2 - x = x(x - 1)$ Nullstellen sind $x_1 = 0$; $x_2 = 1$

$$A_1 = -\int_0^1 (x^2 - x) dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^2 - x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$$

Der Flächeninhalt der markierten Fläche beträgt

$$A = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$$

d)
$$A = -\int_0^1 (e^{x-1} - 1) dx + \int_1^2 (e^{x-1} - 1) dx$$

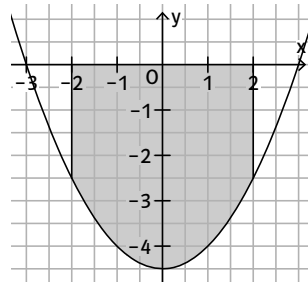
$$= -[e^{x-1} - x]_0^1 + [e^{x-1} - x]_1^2$$

$$= e^{-1} + e - 2 \approx 1,09$$

8 a) Die Fläche liegt unter der x-Achse, der Flächeninhalt ist deshalb der negative Integralwert.

$$A = -\int_{-2}^2 \frac{1}{2}(x^2 - 9) dx = -\left[\frac{1}{6}x^3 - 9x\right]_{-2}^2$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - 18 - \left(-\frac{8}{3} + 18\right)\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{16}{3} - 36\right) = \frac{46}{3}$$



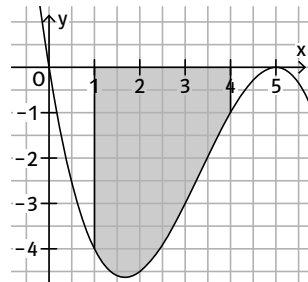
b) Funktionsterm in Summenform:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x(x-5)^2 = -\frac{1}{4}(x^3 - 10x^2 + 25x)$$

Die Fläche liegt unter der x-Achse, der Flächeninhalt ist deshalb der negative Integralwert:

$$A = -\int_1^4 \left(-\frac{1}{4}(x^3 - 10x^2 + 25x)\right) dx = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{25}{2}x^2\right]_1^4$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{152}{3} - \frac{113}{12}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{165}{4} = \frac{165}{16}$$

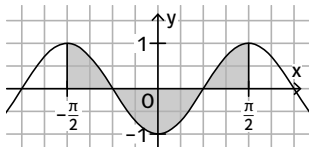


c) Die Fläche besteht aus drei Teilflächen A_1 , A_2 und A_3 . A_1 und A_3 sind gleich groß und liegen über der x-Achse, A_2 darunter.

$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} -\cos(2x) dx = \left[-\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

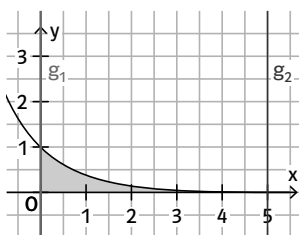
$$A_2 = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -\cos(2x) dx = -\left[-\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1$$

Der Inhalt A der Gesamtfläche beträgt $A = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$.



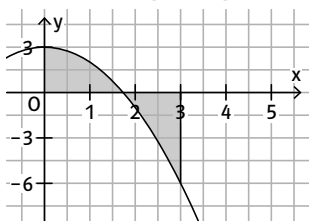
d) Der Graph von f schneidet die x -Achse nicht. Die Fläche liegt oberhalb der x -Achse, der Flächeninhalt ist daher der Integralwert:

$$A = \int_0^5 (e^{-x}) dx = [-e^{-x}]_0^5 = (-e^{-5} - (-1)) = -e^{-5} + 1 \approx 0,99$$

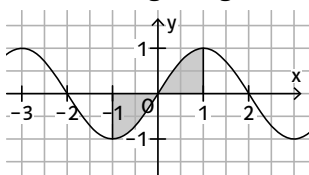


9 Wenn die Integralwerte der beiden Flächen gegensätzliche Vorzeichen haben, sind beide Flächen gleich groß, wenn der Integralwert über das gesamte Intervall 0 beträgt:

a) $\int_0^3 (3 - x^2) dx = \left[3x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 9 - 9 = 0$, d.h. die beiden Flächen sind gleich groß.



b) $\int_{-1}^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-1}^1 = 0$, d.h. die beiden Flächen sind gleich groß.



10 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

11 a) $\int_0^a (x^2 - 4x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right]_0^a = \frac{a^3}{3} - 2a^2 = 0$

Lösungen sind $a_1 = 0$, dies ist die untere Grenze, und $a_2 = 6$. Die einzige positive Lösung ist $a = 6$. Über dem Intervall $[0; 6]$ sind die Flächen oberhalb und unterhalb der x -Achse gleich groß.

b) $\int_0^a (x^3 - 1) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x\right]_0^a = \frac{a^4}{4} - a = 0$

Die Gleichung $a^4 - 4a = 0$ hat die Lösungen $a_1 = 0$ und $a_2 = \sqrt[3]{4}$. Nur die zweite Lösung ist positiv. Über dem Intervall $[0; \sqrt[3]{4}]$ sind die Flächen oberhalb und unterhalb der x -Achse gleich groß.

c) $\int_0^a (x^3 - 2x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2\right]_0^a = \frac{a^4}{4} - a^2 = 0$

Die Gleichung $a^4 - 4a^2 = 0$ hat die Lösungen $a_1 = 0$ und $a_2 = 2$. Nur die zweite Lösung ist positiv.

Über dem Intervall $[0; 2]$ sind die Flächen oberhalb und unterhalb der x -Achse gleich groß.

d) $\int_0^a (\sin(x)) dx = [-\cos(x)]_0^a = -\cos(a) + 1 = 0$

Die Gleichung $\cos(a) = 1$ hat die Lösungen $a_1 = 0$ und $a_2 = 2\pi$. (Darüber hinaus hat die Gleichung unendlich viele Lösungen, die Vielfache von 2π sind: $a_k = k \cdot 2\pi$ für $k \in \mathbb{N}$.)

Über dem Intervall $[0; 2\pi]$ sind die Flächen oberhalb und unterhalb der x -Achse gleich groß.

12 a) Die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = 5x - x^2$ sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 5$. Die Parabel ist nach unten offen, die Gesamtfläche liegt über der x -Achse, der Flächeninhalt entspricht daher dem Integralwert.

$$A = \int_0^5 (5x - x^2) dx = \left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^5 = \frac{125}{2} - \frac{125}{3} = \frac{125}{6}$$

Der gesamte Flächeninhalt beträgt $A = \frac{125}{6}$.

Zur Bestimmung von a müsste man die Gleichung

$$\frac{5}{2}a^2 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{125}{12} \text{ lösen.}$$

Die Achsensymmetrie der Parabel legt nahe, dass $a = 2,5$ der gesuchte Wert ist. Durch Einsetzen in die Gleichung lässt sich dies bestätigen: $\frac{5}{2} \cdot \frac{25}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{125}{8} = \frac{125}{12}$.

b) Die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = 4x - x^3$ sind $x_1 = 0$, $x_2 = +2$ und $x_3 = -2$. Die Gesamtfläche liegt über der x -Achse, der Flächeninhalt entspricht daher dem Integralwert.

$$A = \int_0^2 (4x - x^3) dx = \left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 8 - 4 = 4.$$

Die halbe Fläche führt auf die Gleichung $2a^2 - \frac{1}{4}a^4 = 2$.

Die Gleichung $a^4 - 8a^2 + 8 = 0$ lässt sich mithilfe einer Substitution lösen: $z^2 - 8z + 8 = 0$.

$z_1 = 4 + 2\sqrt{2}$ und $z_2 = 4 - 2\sqrt{2}$. Mit der Resubstitution

erhält man die Lösung: $a = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \approx 1,08$.

Die zweite Lösung $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \approx 2,6$ liefert auch den

Integralwert 2, also $A = \int_2^{2,6} (4x - x^3) dx = 2$. Diese Fläche

ist aber nicht im I. Quadranten.

c) Die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = 3x^2 - x^3$ sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.

$$A = \int_0^3 (3x^2 - x^3) dx = \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = 27 - \frac{81}{4} = \frac{27}{4}$$

Die halbe Fläche führt auf die Gleichung $a^3 - \frac{1}{4}a^4 = \frac{27}{8}$.

Diese Gleichung lässt sich nur mit einem Näherungsverfahren lösen. Man erhält etwa die Lösungen $a_1 \approx 1,84$ und $a_2 \approx 3,74$ (außerhalb des I. Quadranten).

13 Die Nullstellen der Funktion $f_t(x) = t \cdot \sin(tx)$ für $t \neq 0$ sind:

$$t \cdot \sin(tx) = 0 \quad | : t$$

$$\sin(tx) = 0 \text{ d.h. } x = 0 \text{ oder } x = \frac{\pi}{t}.$$

Weiter Nullstellen sind alle x mit $x = \frac{z\pi}{t}$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. Die Flächeninhalte zwischen zwei benachbarten Nullstellen sind bei $f_t(x)$ alle gleich groß. Daher genügt es, einen der Flächeninhalte zu berechnen.

$$\int_0^{\frac{\pi}{t}} t \cdot \sin(tx) dx = [-\cos(tx)]_0^{\frac{\pi}{t}} = -\cos(\pi) = 1$$

Der Flächeninhalt jeder Teilfläche beträgt 1 und ist somit unabhängig vom Parameter t . Für $t = 0$ gilt $f_0(x) = 0$ und es sind keine Flächeninhalte zu bestimmen.

14 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

6 Flächen zwischen zwei Graphen

Seite 149

Einstiegsaufgabe

Man kann mithilfe von Integralen die Inhalte aller drei Flächen berechnen.

Dazu muss man die Nullstellen von f und von g bestimmen sowie die Stellen, an denen die Funktionswerte von f und g übereinstimmen.

$$g \text{ hat die Nullstelle } x_1 = -\sqrt[3]{27} = -3$$

$$f \text{ hat die Nullstellen } x_3 = -\sqrt{2} \text{ und } x_4 = \sqrt{2}.$$

Der Ansatz $f(x) = g(x)$ führt auf $x^3 - 9x^2 + 45 = 0$. Diese Gleichung lässt sich z.B. mit einer digitalen Mathematik-Software lösen:

$$x_2 \approx -2,02; \quad x_5 \approx 2,67; \quad x_6 \approx 8,36.$$

Alternativ könnten die Schnittpunkte auch nur abgelesen werden.

Die linke gelbe Fläche liegt unterhalb der x -Achse und hat den Inhalt

$$\int_{-4}^{-3} g(x) dx = -\left[\frac{1}{36}x^4 + 3x\right]_{-4}^{-3} = -\left(-\frac{27}{4} - \left(-\frac{44}{9}\right)\right) = \frac{67}{36} \approx 1,86.$$

Die rechte gelbe Fläche liegt oberhalb der x -Achse und

$$\text{hat den Inhalt } \int_{-3}^{-2,02} g(x) dx + \int_{-2,02}^{-\sqrt{2}} f(x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{36}x^4 + 3x\right]_{-3}^{-2,02} + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x\right]_{-2,02}^{-\sqrt{2}} \approx 1,15 + 0,59 = 1,74.$$

Die orange Fläche liegt zwischen den Graphen von g und f , wobei der Graph von g oberhalb des Graphen von f liegt. Der Integrationsbereich wird durch die beiden Schnittpunkte x_2 und x_5 bestimmt. Der Inhalt dieser

$$\text{Fläche ist } \int_{-2,02}^{2,67} (g(x) - f(x)) dx = \left[\frac{1}{36}x^4 + 3x\right]_{-2,02}^{2,67} - \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x\right]_{-2,02}^{2,67}$$

$$= \left[\frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 5x\right]_{-2,02}^{2,67} \approx 15,31.$$

Der Gesamtflächeninhalt beträgt

$$A \approx 1,86 + 1,74 + 15,31 = 18,91.$$

Hinweise für die Berechnung:

Zunächst werden die Nullstellen der Funktionen und die Schnittpunkte beider Funktionen bestimmt. Zwischen den Schnittpunkten ist die Funktion des Integranden entweder $f(x) - g(x)$ oder umgekehrt, je nachdem, welcher Graph oberhalb des anderen Graphen liegt.

Wenn die x -Achse die Begrenzung ist, gilt dies entsprechend, denn die x -Achse ist der Graph der Funktion $y = 0$.

Seite 151

$$\mathbf{1 \ a)} \text{ Fläche I: } A = A_2 + A_3 = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

$$\mathbf{b)} \text{ Fläche II: } A = A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx$$

$$\mathbf{c)} \text{ Fläche III: } A = A_3 = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\mathbf{d)} \text{ Fläche IV: } A = A_1 = -\int_{-2}^{-1} f(x) dx$$

$$\mathbf{2 \ a)} \quad A_2 + A_3 = \int_0^2 g(x) dx + \left| \int_2^5 g(x) dx \right|$$

$$\mathbf{b)} \quad A_4 + A_5 = \left| \int_{-3}^2 f(x) dx \right|$$

$$\mathbf{c)} \quad A_1 = \int_{-3}^0 g(x) dx$$

$$\mathbf{d)} \quad A_1 + A_2 + A_3 = \int_{-3}^2 g(x) dx + \left| \int_2^5 g(x) dx \right|$$

$$\mathbf{e)} \quad A_1 + A_2 + A_4 + A_5 = \int_{-3}^2 (g(x) - f(x)) dx$$

$$\mathbf{3 \ a)} \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 \text{ und } y = -2$$

Schnittpunkte bestimmen durch Gleichsetzen:

$$-2 = -\frac{1}{2}x^2 \text{ ergibt die Gleichung } x^2 = 4 \text{ und die Schnittpunkte } x_1 = +2 \text{ und } x_2 = -2.$$

$$A = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 - (-2)\right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x\right]_0^2 = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3}$$

$$\mathbf{b)} \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 \text{ und } y = -x$$

Schnittpunkte bestimmen durch Gleichsetzen

$$-x = -\frac{1}{2}x^2 \text{ ergibt die Gleichung } x^2 - 2x = 0 \text{ und die Schnittpunkte } x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 2.$$

$$A = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 - (-x)\right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

c) Fehler in der 1. Auflage des Schulbuchs:

Die Beschriftung muss $y = -e^{-x}$ heißen.

$$A = \int_0^3 (-e^{-x} - (-1)) dx = \int_0^3 (-e^{-x} + 1) dx = [e^{-x} + x]_0^3 = e^{-3} + 3 - 1 = 2,05$$

d) Fehler in der 1. Auflage des Schulbuchs:

Die Beschriftung des oberen Graphen muss $y = -x^2 + 2x$ und $y = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ heißen.

Die Schnittstellen sind die Nullstellen der beiden Funktionen, also $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \left(-x^2 + 2x - \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(-x^2 + 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_0^2 \\ &= -\frac{8}{3} + 4 + \frac{2}{\pi} - \left(-\frac{2}{\pi} \right) \approx 2,6 \end{aligned}$$

4 a) Schnittstellen: -3 und 3 ; $A = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = 36$

b) Schnittstellen: 0 und 1 ; $A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$

c) Schnittstellen: -2 und 0 ; $A = \int_{-2}^0 (-2x - x^2) dx = \frac{4}{3}$

d) Schnittstellen: -1 und 3 ; $A = \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) dx = \frac{32}{3}$

e) Schnittstellen: -1 und 1 ; $A = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - x^2) dx = \frac{8}{3}$

f) Schnittstellen: -3 und 3 ; $A = \int_{-3}^3 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2} - x^2 \right) dx = 18$

g) Schnittstellen: 0 und 4 ;

$$A = \int_0^4 (x^2 - 2x^2 + 4x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3}$$

h) Schnittstellen: 0 und 1 ; $A = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \frac{1}{12}$

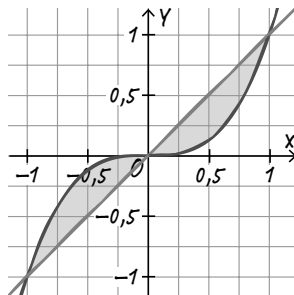
5 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

6 a) Schnittstellen mit der 1. WH:

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = \pm 1$$

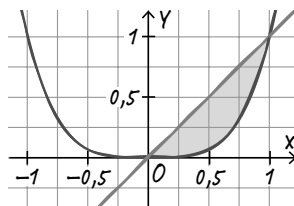
Es entstehen zwei gleich große Flächenstücke.

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \int_0^1 (x - x^3) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



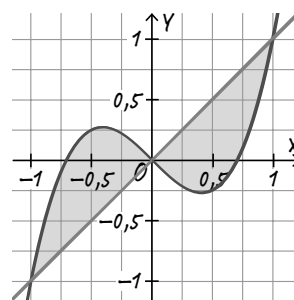
b) Schnittstellen mit der 1. WH: $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (x - x^4) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$



c) Schnittstellen mit der 1. WH: $x_1 = 0$ und $x_2 = \pm 1$
Es entstehen zwei gleich große Flächenstücke.

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 (2x - 2x^3) dx \\ &= \left[2x^2 - \frac{1}{2}x^4 \right]_0^1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$



d) $f(x) = x(x - 3)^2$
 $= x^3 - 6x^2 + 9x$

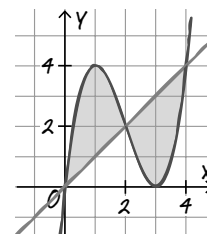
Schnittstellen mit der 1. WH: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und

$$x_3 = 4$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 8x) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - 4x^2 \right]_2^4 \\ &= -64 + 128 - 64 - (-4 + 16 - 16) = 4 \end{aligned}$$

Der gesamte Flächeninhalt A beträgt 8 FE.



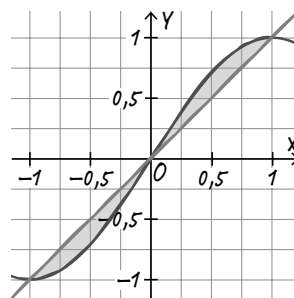
e) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Schnittstellen mit der 1. WH: $x_1 = 0$ und

$$x_{2,3} = \pm 1$$

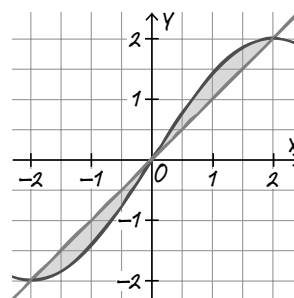
Es entstehen zwei gleich große Flächenstücke

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x \right) dx \\ &= 2 \left[-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= 2 \left(-0,5 + \frac{2}{\pi} \right) = \frac{4}{\pi} - 1 \approx 0,27. \end{aligned}$$



f) Schnittstellen mit der 1. WH: $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm 2$.
Es entstehen zwei gleich große Flächenstücke

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^2 \left(2 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) - x \right) dx \\ &= 2 \left[-\frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= 2 \left(-2 + \frac{8}{\pi} \right) = 1,09. \end{aligned}$$



Seite 152

7 a) Schnittstellen der Graphen von f und g : keine, also:

$$A = \int_{-1}^1 ((x^2 + 4) - (x + 3)) dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x + 1) dx = \frac{8}{3}$$

b) Schnittstellen der Graphen von f und g : 0 ; 2 , also eine Nullstelle im Intervall $[-1; 1]$:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 (x^2 + 4 - (2x + 4)) dx + \int_0^1 (2x + 4 - (x^2 + 4)) dx \\ &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \end{aligned}$$

c) Schnittstelle für $x > 0$: 1 ; $A = \int_1^e \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{e^2 - 3}{2} \approx 2,19$

d) Schnittstelle: keine im Intervall $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$:

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin(x) - \cos(x)) dx = 2$$

e) Beide Graphen gehen durch den Ursprung, es ist $f(1) > g(1)$ und $f(4) > g(4)$. Dazwischen schneiden sich die Graphen nicht.

$$A = \int_1^4 \left(1 - e^{-x} - \frac{1}{5}x\right) dx = \left[x + e^{-x} - \frac{1}{10}x^2\right]_1^4 \\ = 4 + e^{-4} + \frac{16}{10} - \left(1 + e^{-1} - \frac{1}{10}\right) \approx 1,15$$

f) Schnittstelle $x = \pi$ im Intervall $[\pi; 2\pi]$:

$$\int_{\pi}^{2\pi} (\cos(x) + 1 - \sin(x)) dx = [\sin(x) + x + \cos(x)]_{\pi}^{2\pi} \\ = 2\pi + 1 - (\pi - 1) = \pi + 2 \approx 5,14$$

8 a) Schnittstellen: $\pm\sqrt{2}$. Aufgrund der Achsensymmetrie beider Graphen zur y-Achse gilt

$$A = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} (3 - x^2 - (x^2 - 1)) dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2) dx \\ = 2 \cdot \left[4x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2} - \frac{8}{3}\sqrt{2} = \frac{16}{3}\sqrt{2} \approx 7,54.$$

b) Schnittstellen: $\pm\sqrt{3}$ und 0. Aufgrund der Punktsymmetrie beider Graphen zu 0 gilt

$$A = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{3}x^3\right) dx = 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4\right]_0^{\sqrt{3}} = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

c) Schnittstellen: $\pm\pi$ und 0. Aufgrund der Punktsymmetrie zum Ursprung beider Graphen zur y-Achse gilt

$$A = 2 \cdot \int_0^{\pi} (\sin(x) - (-\sin(x))) dx = 2 \cdot \int_0^{\pi} 2\sin(x) dx \\ = 2 \cdot [-2\cos(x)]_0^{\pi} = 2 \cdot (2 - (-2)) = 8.$$

d) Schnittstellen: ± 5 . Aufgrund der Achsensymmetrie beider Graphen zur y-Achse gilt

$$A = 2 \cdot \int_0^5 \left(3 - \frac{1}{5}x^2 - (-2)\right) dx = 2 \cdot \int_0^5 \left(5 - \frac{1}{5}x^2\right) dx \\ = 2 \cdot \left[5x - \frac{1}{15}x^3\right]_0^5 = 2 \cdot \left(25 - \frac{25}{3}\right) = \frac{100}{3}.$$

9 a) Falsch, da $2 \cdot \int_0^{\sqrt{0,5}} g(x) dx$ negativ ist.

$$\text{Richtig ist } -2 \cdot \int_0^{\sqrt{0,5}} g(x) dx \text{ oder } \left| 2 \cdot \int_0^{\sqrt{0,5}} g(x) dx \right|.$$

b) Falsch, mit dem angegebenen Integral berechnet man

$$A_1 + A_2 - A_7. \text{ Richtig ist } - \int_{-2}^{-\sqrt{2}} f(x) dx + \int_{-\sqrt{2}}^0 f(x) dx.$$

c) Falsch; richtig ist $\int_{-1}^{-\sqrt{0,5}} (f(x) - g(x)) dx + \int_{-\sqrt{0,5}}^0 f(x) dx.$

d) Falsch; richtig ist $\int_{\sqrt{0,5}}^1 g(x) dx + \int_1^{\sqrt{2}} f(x) dx.$

10 a) $P(3|9)$: $f'(x) = x^2$, $f'(3) = 9$;

Gleichung der Tangente t: $y = 9(x - 3) + 9 = 9x - 18$

Die Tangente schneidet die x-Achse bei $x = 2$.

$$A_1 = \int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3\right) dx = \left[\frac{1}{12}x^4\right]_0^2 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3};$$

$$A_2 = \int_2^3 \left(\frac{1}{3}x^3 - (9x - 18)\right) dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{3}x^3 - 9x + 18\right) dx \\ = \left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + 18x\right]_2^3 \\ = \frac{81}{12} - \frac{81}{2} + 54 - \left(\frac{16}{12} - 18 + 36\right) = \frac{11}{12}$$

Die Summe der beiden Flächeninhalte beträgt $A = \frac{9}{4}$.

$$\text{Alternativ: } A_1 = \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^3\right) dx = \left[\frac{1}{12}x^4\right]_0^3 = \frac{81}{12} = \frac{27}{4}. \text{ Von } A_1$$

muss der Inhalt der Dreiecksfläche unterhalb der Tangente abgezogen werden: $A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9 = \frac{9}{2}$. Man erhält den Flächeninhalt $A = \frac{9}{4}$.

b) Tangente t: $y = -32x + 16$

Flächeninhalt zwischen Tangente und Graph von f:

$$A = \int_0^2 (x - 2)^4 dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 = \left[\frac{1}{5}(x - 2)^5\right]_0^2 - 4 \\ = \frac{32}{5} - 4 = 2,4$$

c) Tangente t: $y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{3}{e^2} - 1$

Flächeninhalt zwischen Tangente und Graph von f:

$$A = \int_0^2 \left(e^{-x} - 1 + \frac{1}{e^2}x - \frac{3}{e^2} + 1\right) dx \\ = \int_0^2 \left(e^{-x} + \frac{1}{e^2}x - \frac{3}{e^2}\right) dx = \left[-e^{-x} + \frac{1}{2e^2}x^2 - \frac{3}{e^2}x\right]_0^2 \\ = -\frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2} - \frac{6}{e^2} + 1 = 1 - \frac{5}{e^2} \approx 0,32.$$

Inhalt der Dreiecksfläche zwischen Tangente und

$$x\text{-Achse: } A = \frac{1}{2}(3e^{-2} - 1)(3 - e^2) = 1,3$$

Gesamtflächeninhalt $A \approx 1,62$.

11 a) Hochpunkt: $f(x) = 4x - x^2$; $f'(x) = 4 - 2x$ hat bei $x = 2$ eine Nullstelle mit VZW von + nach -. Daher befindet sich bei $x = 2$ ein Maximum; $f(2) = 4$ d.h. $H(2|4)$. Die Gerade $y = 4$ begrenzt die Fläche nach oben.

$$A = \int_0^2 (4 - (4x - x^2)) dx = \int_0^2 (4 - 4x + x^2) dx \\ = \left[4x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

Der Flächeninhalt beträgt $\frac{8}{3}$.

b) Hochpunkt: $f(x) = 3x^2 - x^3$; $f'(x) = 6x - 3x^2$ hat bei $x = 0$ eine Nullstelle mit VZW von - nach + und bei $x = 2$ eine Nullstelle mit VZW von + nach -. Daher befindet sich bei $x = 2$ ein Maximum; $f(2) = 4$ d.h. $H(2|4)$. Die Gerade $y = 4$ begrenzt die Fläche nach oben.

$$A = \int_0^2 (4 - (3x^2 - x^3)) dx = \int_0^2 (4 - 3x^2 + x^3) dx \\ = \left[4x - x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{16}{4} = 4$$

Der Flächeninhalt beträgt 4.

c) Hochpunkt: $f(x) = 8x^2 - 4x^4$; $f'(x) = 16x - 16x^3$;
 $f''(x) = 16 - 48x^2$; f' hat Nullstellen bei $x_1 = 0$; $x_2 = +1$
 und bei $x_3 = -1$. Da $f''(1) < 0$ und $f''(-1) < 0$ ist, liegen
 dort die Hochpunkte $H_1(+1|4)$ und $H_2(-1|4)$.
 Es gibt zwei symmetrische Flächen links und rechts von
 der y-Achse. Die Gerade $y = 4$ begrenzt die Fläche nach
 oben. Inhalt einer Einzelfläche:

$$A = \int_0^1 (4 - (8x^2 - 4x^4)) dx = \int_0^1 (4 - 8x^2 + 4x^4) dx$$

$$= \left[4x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{4}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{32}{15} \approx 2,13$$

Der gesamte Flächeninhalt beträgt etwa 4,26.

12 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

13 Schnittpunkte berechnen: $g(x) = x$. Die Gleichung
 $x^3 - 3x = x$ hat die Lösungen $x_0 = 0$ und $x_{1,2} = \pm 2$.
 Um Flächengleichheit zu zeigen, reicht es wegen der
 Punktsymmetrie (zum Ursprung) der beiden Graphen zu

zeigen, dass gilt $\int_{-2}^2 (g(x) - f(x)) dx = 0$.

$$\text{Es gilt } \int_{-2}^2 (x - (x^3 - 3x)) dx = \int_{-2}^2 (4x - x^3) dx = \left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{-2}^2$$

$$= 8 - 4 - (8 - 4) = 0.$$

Somit müssen beide Flächen denselben Flächeninhalt haben.

14 Tangente bei $x = a$: $t: y = 2a \cdot x - a^2$;

$$\text{Flächeninhalt: } A = \int_0^a (x^2 - 2ax + a^2) dx = \frac{1}{3}a^3.$$

15 Die Lösungen zum Grundwissen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

7 Graphen von Stammfunktionen

Seite 153

Einstiegsaufgabe

Der blaue Graph muss der Graph einer Funktion f sein, der rote Graph der einer Stammfunktion F von f .

Begründung:

An den Stellen, an denen der rote Graph Hochpunkte hat, hat der blaue Graph Nullstellen mit VZW von + nach -. An den Stellen, an denen der rote Graph Tiefpunkte hat, hat der blaue Graph Nullstellen mit VZW von - nach +.

Dagegen hat der rote Graph an den Stellen, an denen der blaue Graph Tiefpunkte (Hochpunkte) hat, Nullstellen mit VZW von + nach - (von - nach +). Deshalb kann der rote Graph nicht die Ableitung des blauen Graphen sein.

Seite 154

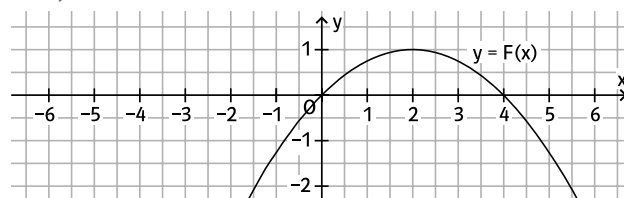
1 A gehört zu (4), da der Graph (4) bei $x = 0$ einen Hochpunkt und der Graph A bei $x = 0$ eine Nullstelle mit VZW von + nach - hat. Dies ist auch bei Graph D der Fall, aber dieser verläuft steiler als Graph A. Deshalb gehört der weniger steile Graph (4) zu A.

B gehört zu (2), da der Graph (2) zwei Extremstellen und der Graph B dort zwei Nullstellen mit VZW hat.

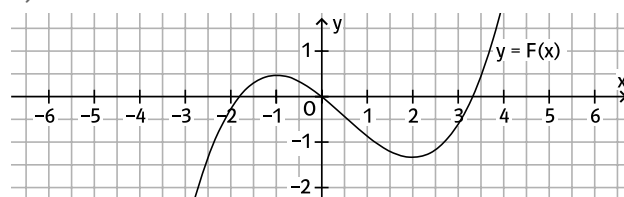
C gehört zu (1), da der Graph von C bei $x = 0$ eine Nullstelle mit VZW von - nach + und der Graph (1) bei $x = 0$ einen Tiefpunkt hat.

D gehört zu (3), da der Graph (3) bei $x = 0$ einen Hochpunkt und der Graph D bei $x = 0$ eine Nullstelle mit VZW von + nach - hat. Dies ist auch bei Graph A der Fall, aber Graph D verläuft steiler als Graph A. Deshalb gehört der steilere Graph (3) zu D.

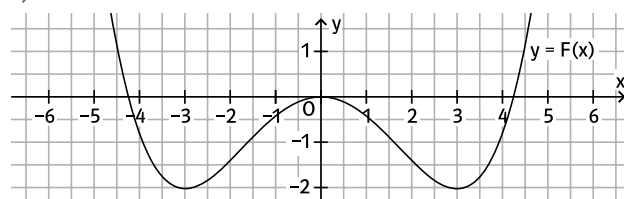
2 a)



b)

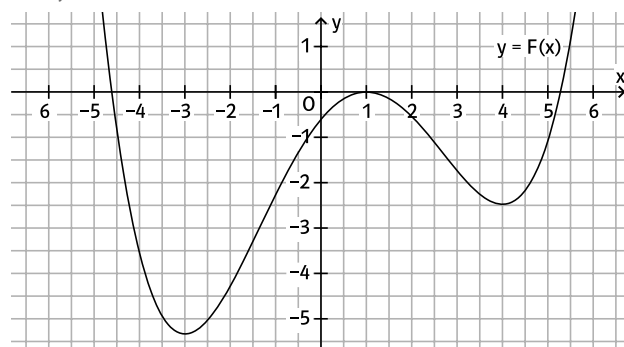


c)

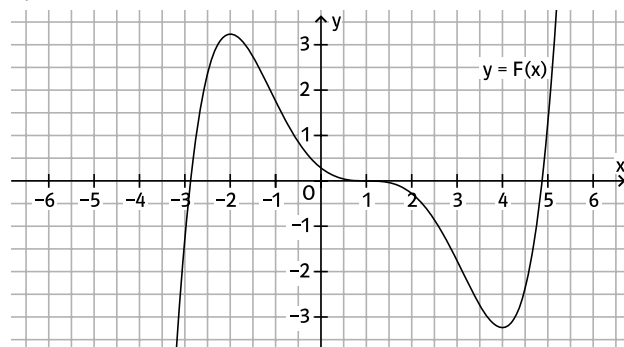


Seite 155

3 a)



b)



In beiden Teilaufgaben muss der Graph der Funktion F um zwei Einheiten nach unten verschoben werden, wenn $F(1) = -2$ gelten soll.

- 4 a)** Falsch, da f im Bereich $[-3; 0)$ oberhalb der x -Achse verläuft und F in diesem Bereich somit streng monoton wachsend ist.
b) Wahr, da f bei $x = 2$ eine Extremstelle hat. Somit hat F bei $x = 2$ eine Wendestelle; dort ändert sich das Krümmungsverhalten des Graphen von F .
c) Falsch, denn f hat hier eine Nullstelle mit VZW von $-$ nach $+$. F hat an der Stelle $x = 4$ also ein lokales Minimum.
d) Falsch. f verläuft zwischen 0 und 4 unterhalb der x -Achse, d.h., F ist hier streng monoton fallend. $F(4)$ muss also echt kleiner sein als $F(0)$.

5 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

- 6 a)** Für das dargestellte Intervall ist $f(x) > 0$, also $F'(x) > 0$; d.h., F ist streng monoton wachsend. $F(x)$ ist an der Stelle e am größten.
b) An der Stelle a .
c) An der Stelle a .
d) An der Stelle b .

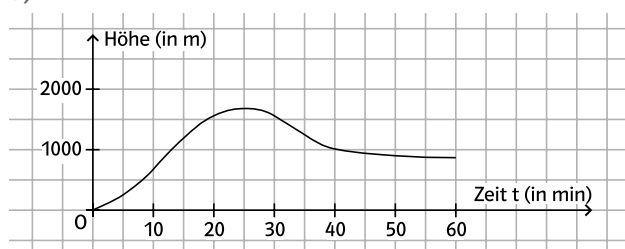
7 a) Es ist $F(x) = 0$ für $x = -1$ und $x = 5$.

b) Es ist $f(x) = 0$ für $x = -1$ und $x = 3$.

c) $\int_1^3 f(x) dx = F(3) - F(1) = 2 - 1 = 1$

d) $f(1)$ entspricht der Steigung des Graphen von F an der Stelle $x = 1$; diese ist positiv.
 $f(3)$ entspricht der Steigung des Graphen von F an der Stelle $x = 3$, diese ist 0. Damit ist $f(1)$ nicht kleiner als $f(3)$.

- 8 a)** Der Inhalt der grau gefärbten Fläche entspricht dem Höhenunterschied in Metern zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 10$.
b) Bis zum Zeitpunkt $t = 25$ steigt der Ballon; danach sinkt er. Daher hat der Ballon zum Zeitpunkt $t = 25$ seine höchste Höhe erreicht.
c) Der Inhalt der Fläche zwischen Graph und t -Achse über dem Intervall $[0; 60]$, die oberhalb der t -Achse liegt, ist größer, als der Inhalt der Fläche, die unterhalb der t -Achse liegt. Daher hat der Ballon im Zeitraum $[0; 60]$ mehr an Höhe zugenommen als abgenommen. Deshalb liegt der Landepunkt höher als der Startpunkt.
d)



Seite 156

9 a) Wahr, da der Graph von F durch den Punkt $P(0|2)$ verläuft.

b) Falsch. f hat überall dort Nullstellen, wo F innere Extremstellen hat, also bei $x = -2$, 0 und 2 .

c) Falsch, denn es ist $\int_{-2}^2 f(x) dx = F(2) - F(-2) = 0 < 2$,

da $F(2) = F(-2)$ gilt.

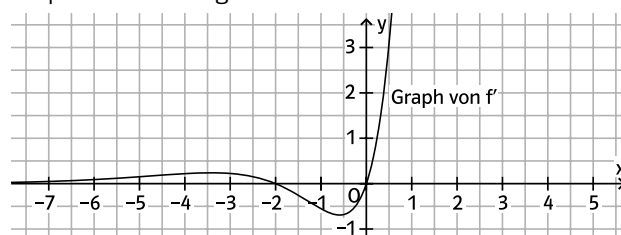
d) Falsch, denn es ist $f(-2) = F'(-2) = 0$, da F bei $x = -2$ ein Minimum hat.

Damit ist $F(-2) + f'(-2) = F(-2) + 0 = F(-2) < 1$.

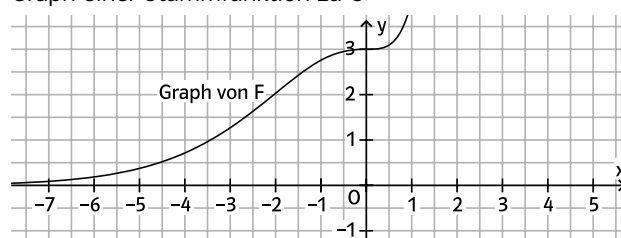
10 Die Lösungen zum Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

11 D gehört zu f , B zu F und A zu f' .

Graph der Ableitungsfunktion zu C :



Graph einer Stammfunktion zu C :



12 Aussage A ist wahr, da f die Ableitung von F ist und ihr Graph drei Nullstellen mit Vorzeichenwechsel im Bereich $[-2; 2]$ hat.

Aussage B ist allgemein falsch; er gilt nur in einem einzigen Fall. Bei $x = 1$ hat der Graph von f eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$.

Der Graph von F hat dort somit einen Hochpunkt. Der y -Wert des Hochpunktes hängt jedoch von der Stammfunktion ab. Für die Stammfunktion müsste $F(1) = 4$ gelten. Aussage C ist falsch, da der Graph von f in diesem Bereich nur zwei Extremstellen besitzt.

Aussage D ist falsch, da der Graph von f in diesem Bereich nicht vollständig oberhalb der x -Achse liegt.

Aussage E ist falsch. Der Graph von f fällt in Bereich $[-1; 1]$, d.h. $f'(x) = F''(x) < 0$. Die Graphen aller Stammfunktionen haben in diesem Bereich eine Rechtskrümmung.

Aussage F ist nur manchmal richtig. Je nach Konstante c können sich die Graphen über oder unter der x -Achse befinden.

13 Die Lösungen zum Grundlagen-Test finden Sie am Ende vom Schulbuch.

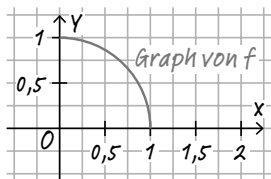
Exkursion: Rotationskörper und ihr Volumen

Seite 158

- 1 a) Form: kelchförmig (Sektkelch); Volumen: $2\pi \approx 6,28$
 b) Form: düsenförmig bzw. trompetenförmig; Volumen: $\frac{3}{4}\pi \approx 2,36$
 c) Form: Zylinder; Volumen: $50\pi \approx 157,08$

- 2 a) $V_{\text{innen}} = 10,125\pi \approx 31,81$; in die Schale passen 31,81 ml Wasser.
 b) $V_{\text{außen}} = 17,33\pi \approx 54,44$; $V_{\text{Glas}} = V_{\text{außen}} - V_{\text{innen}} \approx 22,63$; das zur Herstellung benötigte Glas hat ein Volumen von $22,63 \text{ cm}^3$.

3 Skizze:



Der Graph von f beschreibt einen Viertelkreis; rotiert er um die x -Achse, so entsteht eine Halbkugel.

$$V = \pi \int_0^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \pi = \frac{2}{3} \pi$$

- 4 Mit der gegebenen Formel berechnet man das entstehende Volumen, indem man vom äußeren Volumen das innere Volumen subtrahiert.

Mit der Formel $\pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$ berechnet man das

Volumen des Körpers, wenn der Graph der Funktion h mit $h(x) = f(x) - g(x)$ um die x -Achse rotiert. Dies ergibt nicht das passende Volumen.

Rechnerisch sieht man dies, wenn man binomisch ausmultipliziert:

$$\pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx = \pi \int_a^b (f(x)^2 - 2f(x)g(x) + g(x)^2) dx$$

Dies ist im Allgemeinen nicht das Gleiche wie

$$\pi \int_a^b (f(x))^2 dx - \pi \int_a^b (g(x))^2 dx = \pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx.$$

- 5 Es muss über die lineare Funktion f mit $f(x) = \frac{r}{h}x$ von 0 bis h integriert werden, damit der entstehende Kegel die Höhe h und den Radius r hat:

$$\pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r^2}{h^2}x^2\right) dx = \pi \left[\frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

- 6 Wird f durch $2f$ ersetzt, so vervierfacht sich das Rotationsvolumen; ersetzt man f durch $0,5f$, so wird das Volumen geviertelt.

- 7 Gesucht ist die obere Grenze h , sodass

$$\pi \int_0^h (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^h x dx = 30 \text{ ist.}$$

$$\text{Also: } 30 = \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^h = \frac{h^2}{2} \cdot \pi, \text{ somit } h \approx 4,37.$$

Das Wasser steht bis zu einer Höhe von ca. 4,37 LE.

Training

Seite 159

- 1 a) Der Flächeninhalt im Bereich $[0; 2]$ unterhalb der x -Achse beträgt 1,5. Der Flächeninhalt im Bereich $[2,5; 4]$ oberhalb der x -Achse beträgt ebenfalls 1,5. Im Bereich $[2; 2,5]$ befindet sich ein kleines Dreieck unterhalb der x -Achse und ein größeres Dreieck oberhalb der x -Achse. Daher hat die Größe insgesamt zugenommen.
 b) Die Fläche liegt im Bereich $[1; 3]$ vollständig unterhalb der x -Achse. Daher hat die Größe abgenommen.

- 2 a) Acht Karoflächen entsprechen 1000 Anrufe. Es sind etwa 56 Kästchen, und somit gingen bis 22 Uhr ca. 7000 Anrufe ein.

- b) Um 22 Uhr ist die Warteschleife am größten.

3 a) $F(x) = \frac{1}{8}x^4$

c) $F(x) = -\frac{2}{5}x^{-1} = -\frac{2}{5x}$

e) $F(x) = -2 \cos(x + 1)$

g) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos(2x)$

i) $F(x) = \frac{1}{3}e^{x+5}$

k) $F(x) = \frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}x+1}$

b) $F(x) = -\frac{1}{4}x^{-1}$

d) $F(x) = \frac{1}{8}(2x + 2)^4$

f) $F(x) = \frac{1}{3} \sin(3x)$

h) $F(x) = \frac{1}{4} \sin(4x - \pi)$

j) $F(x) = x + 2e^{0,5x}$

l) $F(x) = \frac{5}{4}e^{2x-2}$

4 a) $G(x) = -x^2 + 3x + 1$

b) $G(x) = -4e^{0,5-0,5x} + 7$

c) $G(x) = -\cos(\pi x) + 2$

d) $G(x) = \frac{4}{9}\sqrt{(3x+1)^3} - \frac{16}{9}\sqrt{4}$

5 a) $-\frac{20}{3}$

b) $\frac{16}{225}$

c) $\frac{9}{2}$

d) $-\frac{2}{\pi}$

e) 4

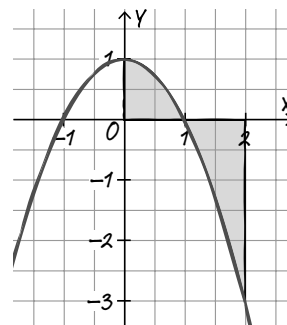
f) 375

g) 4

h) $4e^2 - 6$

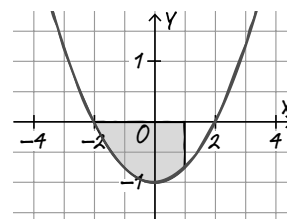
- 6 a) Die Fläche unterhalb der x -Achse ist größer, der Wert des Integrals ist negativ.

$$\begin{aligned} \int_0^2 (-x^2 + 1) dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^2 = -\frac{8}{3} + 2 \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$



- b) Die Fläche liegt vollständig unterhalb der x -Achse, deshalb ist der Wert des Integrals negativ.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) dx &= \left[\frac{1}{12}x^3 - x\right]_{-2}^1 = -\frac{11}{12} - \frac{4}{3} \\ &= -\frac{9}{4} \end{aligned}$$



c) Die Fläche oberhalb der x-Achse entspricht dem Integral, der Wert ist also positiv.

$$\int_0^{\ln(5)} (2e^x - 2) dx$$

$$= [2e^x - 2x]_0^{\ln(5)}$$

$$= 10 - 2\ln(5) - 2 \approx 4,78$$

d) Die Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse sind gleich groß, der Wert des Integrals ist 0.

$$\int_{-2}^2 (x^3 - x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^2$$

$$= 2 - 2 = 0$$

e) Die Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse sind gleich groß, der Wert des Integrals ist 0.

$$\int_{-3}^3 \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) dx$$

$$= \left[-\frac{3}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) \right]_{-3}^3 = \frac{3}{\pi} - \frac{3}{\pi}$$

$$= 0$$

f) Die Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse sind gleich groß, der Wert des Integrals ist 0.

$$\int_0^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_0^4 = 0 - 0 = 0$$

7 a) $F'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x))$
 $= (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = f(x)$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx = F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

b) $F'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x = f(x)$

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = 3e^2 - 1$$

8 a) Nullstellen: $x_1 = -3$ und $x_2 = 3$; $A = 36$

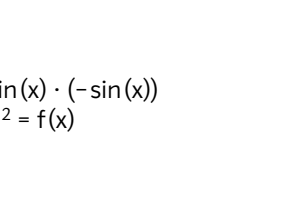
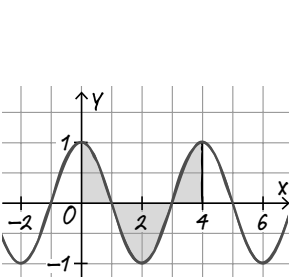
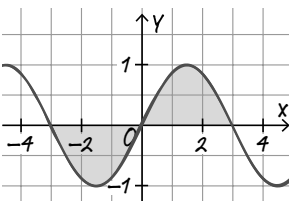
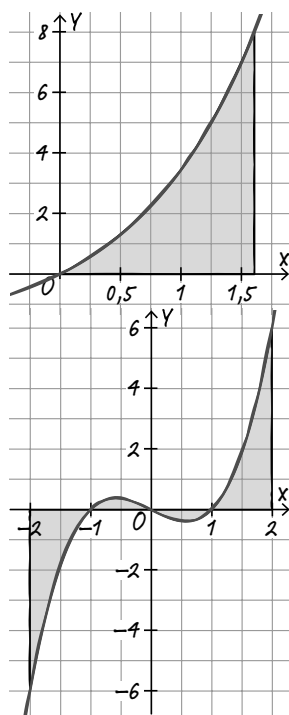
b) Nullstellen: $x_1 = -1$ und $x_2 = 0$; $A = \frac{1}{12}$

c) Nullstellen: $x_1 = -6$ und $x_2 = 3$; $A = \frac{81}{2}$

d) Nullstellen: $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$; $A = \frac{32}{3}$

e) Nullstellen: $x_1 = -6$ und $x_2 = -4$; $A = \frac{4}{3}$

f) Nullstellen: $x_1 = 0$ und $x_2 = \pi$; $A = 4$



9 a) Nullstellen: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$; $A = 0,5$

$$(A = 2 \int_{-1}^0 f(x) dx \text{ (Punktsymmetrie des Graphen von } f))$$

b) Nullstellen: $x_1 = -2$; $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$; $A = \frac{128}{15}$

$$\left(A = 2 \left| \int_{-2}^0 f(x) dx \right| \text{ (Achsensymmetrie des Graphen von } f) \right)$$

c) Nullstellen: $x_1 = -\pi$; $x_2 = \pi$ und $x_3 = 3\pi$; $A = 16$

$$\left(A = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \left| \int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx \right| \right)$$

Seite 160

10 Im Intervall $[0; 3]$ ist $g(x) > f(x)$. Also gilt

$$A = \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^3 (2 - e^{-x}) dx = [2x + e^{-x}]_0^3$$

$$= 6 + e^{-3} - 1 = 5 - e^{-3} \approx 5,05.$$

Der Flächeninhalt beträgt etwa 5,05.

11 a) $A = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$

b) $A = \int_1^4 \left(\frac{4}{e} - \frac{4}{e^x} \right) dx = \frac{8}{e} + \frac{4}{e^4} \approx 3,02$

c) $4 \cdot \sin(x_1) = 2$ ($0 < x < 1$) d.h. $x_1 = \frac{\pi}{6}$

$4 \cdot \sin(x_2) = 4$ ($0 < x < 2$) d.h. $x_2 = \frac{\pi}{2}$

$$A = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (4 \cdot \sin(x) - 2) dx = \frac{5}{3}\pi - 2\sqrt{3} \approx 1,77$$

12 a) $f(x) = (x+1) \cdot e^x$;

mit Produktregel ableiten: $f'(x) = e^x + (x+1) \cdot e^x$

Klammer auflösen und zusammenfassen:

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x + e^x = 2e^x + x \cdot e^x = (x+2) \cdot e^x$$

Mit analoger Berechnung: $f''(x) = (x+3) \cdot e^x$

Vermutung: $F(x) = x \cdot e^x$

b) Wenn F mit $F(x) = x \cdot e^x$ Stammfunktion ist, gilt der Zusammenhang $F'(x) = f(x)$.

$F'(x) = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x = f(x)$. Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f .

$$\int_0^2 (x+1) \cdot e^x dx = [x \cdot e^x]_0^2 = 2e^2 - 0 = 2e^2.$$

13 (I) Falsch, da f in diesem Bereich nicht negativ ist.

(II) Wahr, da f an dieser Stelle eine Nullstelle mit VZW hat.

(III) Falsch, da f (mindestens) zwei Nullstellen mit VZW hat.

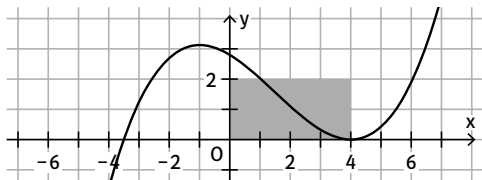
(IV) Wahr, da f bei $x = 1$ eine Extremstelle hat.

14 Fehler in der 1. Auflage des Schulbuchs: Versehentlich wurde statt der richtigen die Grafik zu Aufgabe 13 ein zweites Mal abgedruckt. Mit der falschen Grafik ist die Aufgabe nicht sinnvoll lösbar.

a) f hat ungefähr bei $x = -1$ und $x = 4$ (lokale) Extremstellen

b) F hat bei $x = -3,5$ eine Extremstelle.

c) Man zeichnet ein Rechteck über $[0; 4]$ mit Höhe 2. Es hat den Flächeninhalt 8. Der Integralwert entspricht dem Flächeninhalt der Fläche, die vom Graphen von f und den beiden Koordinatenachsen begrenzt wird, da der Graph in diesem Bereich über der x -Achse verläuft. Dass der Flächeninhalt dieser Fläche deutlich kleiner als die Rechtecksfläche ist, kann man der Abbildung entnehmen.



15 a) Tangente: $y = 3x - 4,5$.

Schnittstelle mit der x -Achse: $x = 1,5$.

Flächeninhalt:

$$A = \int_0^3 0,5x^2 dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{2} = \left[\frac{1}{6}x^3 \right]_0^3 - \frac{27}{8} = \frac{9}{8}.$$

b) Tangente: $y = 5(x - \ln(5)) + 4 = 5x - 5\ln(5) + 4$.

Nullstelle der Tangente: $N\left(\ln(5) - \frac{4}{5} \mid 0\right)$

Flächeninhalt:

$$A = \int_0^{\ln(5)} (e^x - 1) dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 4 = [e^x - x]_0^{\ln(5)} - 1,6 \\ = 5 - \ln(5) - 1 - 1,6 = 2,4 - \ln(5) \approx 0,79$$

16 Gleichung der quadratischen Funktion (wenn der Scheitelpunkt bei $(0 \mid -80)$ liegt): $f(x) = 0,05x^2 - 80$; Querschnittsfläche:

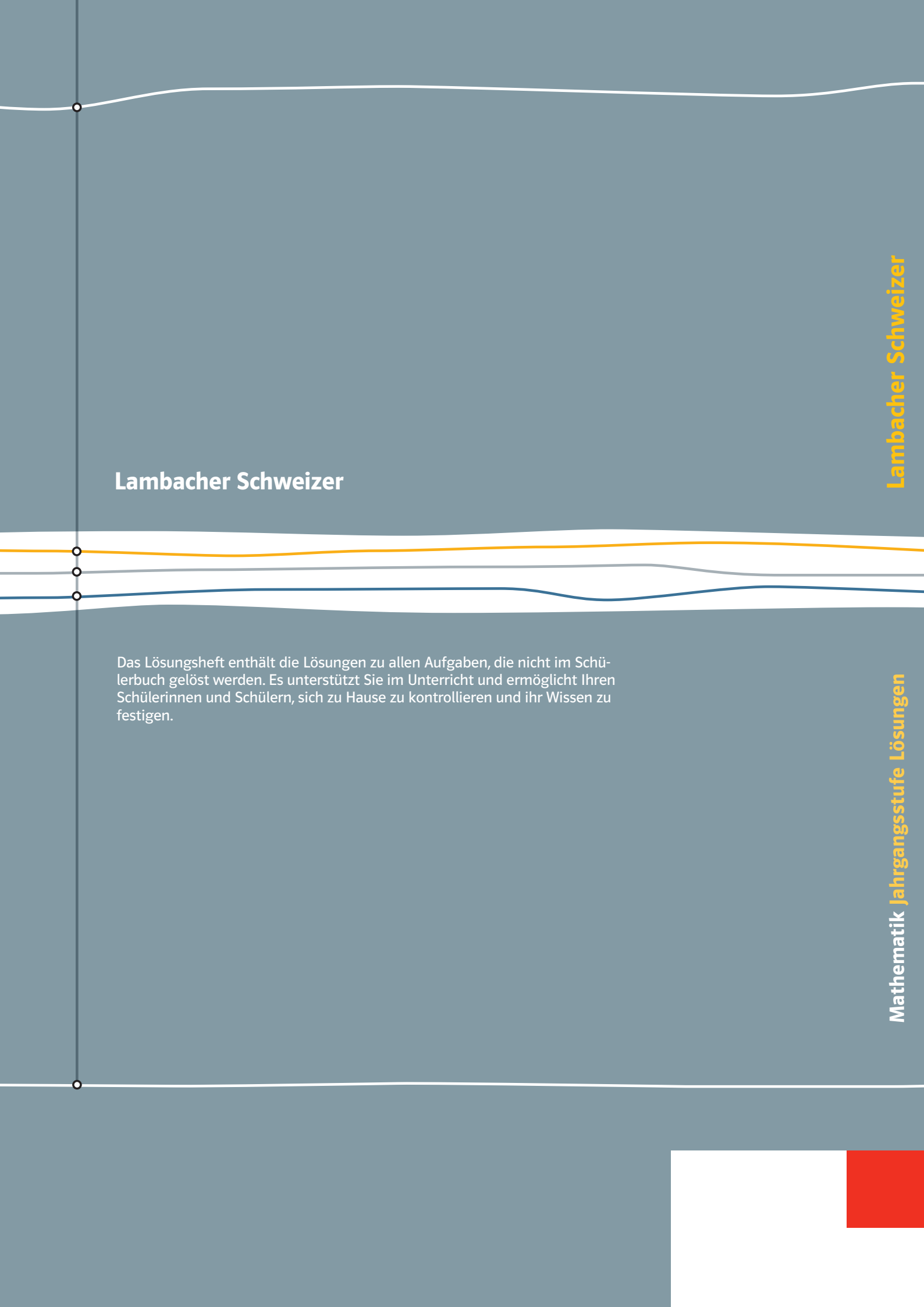
$$A = 100^2 - \left| \int_{-40}^{40} f(x) dx \right| = 10\,000 - \frac{12\,800}{3} = \frac{17\,200}{3} \\ \approx 5733,3 \text{ cm}^2;$$

Volumen: $V = \frac{43}{75} \text{ m}^3 = 0,5733 \text{ m}^3$; Masse: $M = \frac{989}{750} \text{ t} = 1,32 \text{ t}$.

Prüfungsvorbereitung

Seiten 162 und 163

Die Lösungen zur Prüfungsvorbereitung finden Sie am Ende vom Schulbuch.



Lambacher Schweizer

Lambacher Schweizer

Das Lösungsheft enthält die Lösungen zu allen Aufgaben, die nicht im Schülerbuch gelöst werden. Es unterstützt Sie im Unterricht und ermöglicht Ihren Schülerinnen und Schülern, sich zu Hause zu kontrollieren und ihr Wissen zu festigen.

Mathematik Jahrgangsstufe Lösungen