



Übungsaufgaben zur Klausur Nr.1: Kurvendiskussion und Anwendungen

Aufgabe 1

Führen Sie für die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + 3x^2$ eine vollständige Kurvendiskussion durch.

Aufgabe 2

Die Funktion f hat die Gleichung $f(x) = \frac{1}{20}x^4 - 1,45x^2 + 9$. Führen Sie für die Funktion f eine vollständige Kurvendiskussion durch.

Aufgabe 3

Die Firma „Fischer“ GmbH stellt für den NASA spezielle weltraumtaugliche Kugelschreiber her. Da diese Kugelschreiber auch außerhalb der NASA begehrt sind, geht die Firma davon aus, dass sie alle produzierten Kugelschreiber auch verkaufen kann. Für die Produktionsmenge x (in 1000 Stück) ergibt sich die Gewinnfunktion $G(x) = -0,001x^3 + 0,11x^2 - 2,8x$. Da die Produktionsobergrenze bei 90.000 Stück liegt, gilt: $ID = [0; 90]$.

- Bestimmen Sie die Gewinnzone - also dasjenige Teilintervall des Definitionsbereiches, in dem die Firma tatsächlich Gewinn erzielt und geben Sie die Gewinnzone als Intervall an. (Überprüfen Sie auch, ob in dem von Ihnen angegebenen Intervall auch tatsächlich Gewinn erzielt wird.)
- Überprüfen Sie rechnerisch, für welche Produktionsmenge das Gewinnmaximum erzielt wird und bestimmen Sie, wie groß es dann ist? (Hinweis: Die erzielten Gewinne werden in 1000 € angegeben.)

Aufgabe 4

In ein Krankenhaus wird ein Patient eingeliefert, der von einem Virus befallen ist, der ein starkes Fieber verursacht. Die Fieberkurve (Körpertemperatur in °C) des Patienten (in Abhängigkeit von der Zeit x in Stunden) kann näherungsweise durch den folgenden Funktionsterm beschrieben werden: $f(x) = 0,002x^4 - 0,04x^3 + 0,2x^2 + 39$. Diese Näherung gilt nur für positive x -Werte ($x > 0$) und bezogen auf die ersten 12 Stunden. Durch die Behandlung mit einem fiebersenkenden Medikament erreicht die Körpertemperatur einen Maximalwert und sinkt danach auf die „Normaltemperatur“ ab.

- Welchen Maximalwert erreicht die Fieberkurve in ihrem Gültigkeitsbereich und nach wie vielen Stunden ist dies der Fall?

An den Wendepunkten der Kurve steigt und fällt das Fieber am stärksten. Man geht davon aus, dass von dem Wendepunkt an, bei dem das Fieber fällt (dies ist bei $W(7,9 / f(7,9))$ der Fall), das Fieber linear weiterfällt und zwar sinkt es entsprechend dem Verlauf der Wendetangente.

- Bestimmen Sie mit Hilfe der Gleichung der Wendetangenten, nach wie vielen Stunden die Temperatur wieder auf 37 ° gesunken ist?



LÖSUNGEN

Aufgabe 1

Führen Sie für die Funktion f aus a) mit $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + 3x^2$ eine vollständige Kurvendiskussion durch.

1. Definitionsmenge

Da f eine ganzrationale Funktion ist gilt: $D = \mathbb{R}$.

2. Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

Da im Funktionsterm von f sowohl gerade wie auch ungerade Exponenten auftreten, ist der Graph von f weder punktsymmetrisch zum Ursprung, noch achsensymmetrisch zur y -Achse.

3. Grenzwertverhalten

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, weil der höchste Exponent von x , der im Funktionsterm auftritt,

gerade ist ($n = 4$) und sein Koeffizient negativ ist ($a = -0,125$).

4. Schnittpunkt mit der y-Achse

Bedingung: $x = 0 \Rightarrow f(0) = -\frac{1}{8} \cdot (0)^4 + \frac{1}{4} \cdot (0)^3 + 3 \cdot (0)^2 = \underline{0}$, somit: $S_y(0/0)$.

5. Schnittpunkte mit der x-Achse

Bedingung: $f(x) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot (-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 3) = 0 \quad | \cdot (-8)$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 2x - 24) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 - 2x - 24 = 0 \quad | \text{pq-Formel}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-24)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 0} \vee \underline{x = 1 - 5 = -4} \vee \underline{x = 1 + 5 = 6}$$

also $N_1(-4/0)$, $N_2(0/0)$, und $N_3(6/0)$.



6. Ableitungen

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = -0,5x^3 + 0,75x^2 + 6x$$

$$f''(x) = -1,5x^2 + 1,5x + 6$$

7. Extrempunkte

I. notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow -0,5x^3 + 0,75x^2 + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (-0,5x^2 + 0,75x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee -0,5x^2 + 0,75x + 6 = 0 \quad | :(-0,5)$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 1,5x - 12 = 0 \quad | \text{pq-Formel}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{-1,5}{2} \pm \sqrt{(-0,75)^2 + 12}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 0,75 \pm \sqrt{12,5625} \approx 0,75 \pm 3,54$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 0} \vee \underline{x \approx -2,79} \vee \underline{x \approx 4,29}$$

II. hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel von f'

Überprüfung von $x_1 = -2,79$:

$$f'(-4) = \underline{20}$$

$$f'(-1) = -0,5(-1)^3 + 0,75 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) = 0,5 + 0,75 - 6 = \underline{-4,75}$$

Bei $x_1 = -2,79$ findet also ein (+/-)-Vorzeichenwechsel von f' statt,

d.h. hier liegt ein **Hochpunkt** vor.

Überprüfung von $x_2 = 0$:

$$f'(-1) = \underline{-4,75}$$

$$f'(1) = -0,5(1)^3 + 0,75 \cdot (1)^2 + 6 \cdot (1) = -0,5 + 0,75 + 6 = \underline{6,25}$$

Bei $x_2 = 0$ findet also ein (-/+)-Vorzeichenwechsel von f' statt,

d.h. hier liegt ein **Tiefpunkt** vor.



Überprüfung von $x_3 = 4,29$:

$$f'(1) = \underline{6,25}$$

$$f'(5) = -0,5(5)^3 + 0,75 \cdot (5)^2 + 6 \cdot (5) = -62,5 + 18,75 + 30 = \underline{-13,75}$$

Bei $x_3 = 4,29$ findet also ein (+/-)-Vorzeichenwechsel von f' statt,

d.h. hier liegt ein **Hochpunkt** vor.

III. y-Koordinaten der Extrempunkte bestimmen (durch Einsetzen der x-Werte in f):

$$f(-2,79) = -\frac{1}{8} \cdot (-2,79)^4 + \frac{1}{4} \cdot (-2,79)^3 + 3 \cdot (-2,79)^2 \approx -7,57 - 5,43 + 23,35 = \underline{10,35}$$

$$f(0) = \underline{0}$$

$$f(4,29) = -\frac{1}{8} \cdot (4,29)^4 + \frac{1}{4} \cdot (4,29)^3 + 3 \cdot (4,29)^2 \approx -42,34 + 19,74 + 55,21 = \underline{32,61}$$

Somit ergeben sich die Punkte:

$$\underline{HP_1(-2,79 / 10,35)}, \quad \underline{TP(0 / 0)} \quad \text{und} \quad \underline{HP_2(4,29 / 32,61)}$$

8. Wendepunkte

I. notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\Rightarrow -1,5x^2 + 1,5x + 6 = 0 \quad | :(-1,5)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1x - 4 = 0 \quad | \text{pq-Formel}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{(-0,5)^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow x = 0,5 \pm \sqrt{4,25} \approx 0,5 \pm 2,06$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_1 \approx -1,56} \quad \wedge \quad \underline{x_2 \approx 2,56}$$

II. hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel von f''

Überprüfung von $x_1 = -1,56$:

$$f''(-2) = -1,5 \cdot (-2)^2 + 1,5 \cdot (-2) + 6 = -6 - 3 + 6 = \underline{-3}$$

$$f''(0) = -1,5 \cdot (0)^2 + 1,5 \cdot (0) + 6 = \underline{6}$$

Bei $x_1 = -1,56$ findet also ein (-/+)-Vorzeichenwechsel von f'' statt,

d.h. hier liegt ein **Wendepunkt** vor.



(Da $x_1 = -1,56$ keine Nullstelle von f' war, ist dieser Wendepunkt kein Sattelpunkt.)

Überprüfung von $x_2 = 2,56$:

$$f''(0) = \underline{\underline{6}}$$

$$f''(4) = -1,5 \cdot (4)^2 + 1,5 \cdot (4) + 6 = -24 + 6 + 6 = \underline{\underline{-12}}$$

Bei $x_2 = 2,56$ findet also ein $(+/-)$ -Vorzeichenwechsel von f'' statt,

d.h. hier liegt ein **Wendepunkt** vor.

(Da $x_2 = 2,56$ keine Nullstelle von f' war, ist dieser Wendepunkt kein Sattelpunkt.)

III. y-Koordinaten der Wendepunkte bestimmen (durch Einsetzen der x-Werte in f):

$$f(-1,56) = -\frac{1}{8} \cdot (-1,56)^4 + \frac{1}{4} \cdot (-1,56)^3 + 3 \cdot (-1,56)^2 \approx -0,74 - 0,95 + 7,3 = \underline{\underline{5,61}}$$

$$f(2,56) = -\frac{1}{8} \cdot (2,56)^4 + \frac{1}{4} \cdot (2,56)^3 + 3 \cdot (2,56)^2 \approx -5,37 + 4,19 + 19,67 = \underline{\underline{18,59}}$$

Die Wendepunkte haben also die folgenden Koordinaten: $WP_1(-1,56/5,61)$

und $WP_2(2,56/18,59)$.

9. Wertemenge und Wertetabelle

Es gilt: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, das heißt es gibt einen höchsten Punkt des Graphen

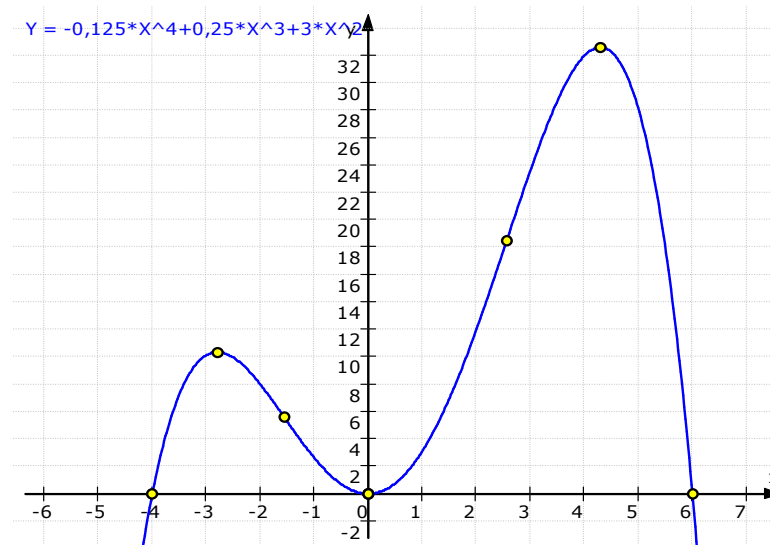
(somit ein absolutes Maximum, den y-Wert des höchsten Hochpunktes).

Also gilt: $W = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 32,61\}$.

x-Wert	-4	-2,79	-1,56	0	2,56	4,29	6
y-Wert	0	10,35	5,61	0	18,59	32,61	0
Eigenschaften	N_1	HP_1	WP_1	N_2 Sy, TP	WP_2	HP_2	N_3



10. Skizze des Graphen





Funktion $Y = -0,125 \cdot X^4 + 0,25 \cdot X^3 + 3 \cdot X^2$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-10	-1200	515	-159
-9	-759,375	371,25	-129
-8	-448	256	-102
-7	-238,875	166,25	-78
-6	-108	99	-57
-5	-34,375	51,25	-39
-4	0	20	-24
-3	10,125	2,25	-12
-2	8	-5	-3
-1	2,625	-4,75	3
0	0	0	6
1	3,125	6,25	6
2	12	11	3
3	23,625	11,25	-3
4	32	4	-12
5	28,125	-13,75	-24
6	0	-45	-39
7	-67,375	-92,75	-57
8	-192	-160	-78
9	-394,875	-249,75	-102
10	-700	-365	-129

Aufgabe 2

Die Funktion f hat die Gleichung $f(x) = \frac{1}{20}x^4 - 1,45x^2 + 9$. Führen Sie für die Funktion f aus a) eine vollständige Kurvendiskussion durch.

1. Definitionsmenge

Da f eine ganzrationale Funktion ist gilt: $D = \mathbb{R}$.

2. Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

Da im Funktionsterm von f sowohl nur gerade Exponenten auftreten, ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y -Achse.

3. Grenzwertverhalten

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, weil der höchste Exponent von x , der im Funktionsterm

auftritt, gerade ist ($n = 4$) und sein Koeffizient positiv ist ($a = \frac{1}{20}$).

4. Schnittpunkt mit der y-Achse

Bedingung: $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{20} \cdot 0^4 - 1,45 \cdot 0^2 + 9 = \underline{9}$, somit: $S_y(0/9)$.

5. Schnittpunkt mit der x-Achse

Bedingung: $f(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{20}x^4 - 1,45x^2 + 9 = 0 \quad \left| \text{Substitution: } x^2 = z \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{20}z^2 - 1,45z + 9 = 0 \quad \left| : \left(\frac{1}{20}\right) \right.$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 29z + 180 = 0 \quad \left| \text{pq-Formel} \right.$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{-29}{2} \pm \sqrt{(-14,5)^2 - 180}$$

$$\Leftrightarrow z = 14,5 \pm \sqrt{210,25 - 180}$$

$$\Leftrightarrow z = 14,5 \pm \sqrt{30,25} = 14,5 \pm 5,5$$

$$\Leftrightarrow z = 9 \vee z = 20 \quad \left| \text{Rücksubstitution: } x = \pm \sqrt{z} \right.$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = -36} \vee \underline{x = 3} \vee \underline{x = -4,47} \vee \underline{x = 4,47}$$

also: $N_1(-4,47/0)$, $N_2(-3/0)$, $N_3(3/0)$ und $N_4(4,47/0)$



6. Ableitungen

$$f(x) = \frac{1}{20}x^4 - 1,45x^2 + 9$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^3 - 2,9x$$

$$f''(x) = \frac{3}{5}x^2 - 2,9$$

7. Extrempunkte

I. notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{5}x^3 - 2,9x &= 0 && | : \left(\frac{1}{5}\right) \\ \Rightarrow x^3 - 14,5x &= 0 && | \text{ausklammern} \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee (x^2 - 14,5) = 0 && | p-q\text{-Formel} \\ \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x = -\left(\frac{0}{2}\right) \pm \sqrt{(0)^2 + 14,5} \\ \Leftrightarrow \underline{x_1 \approx -3,81} \wedge \underline{x_2 = 0} \wedge \underline{x_3 \approx 3,81} \end{aligned}$$

II. hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel von f'

Überprüfung von $x_1 = -3,81$:

$$f'(-5) = \frac{1}{5} \cdot (-5)^3 - 2,9 \cdot (-5) = -25 + 14,5 = \underline{\underline{-10,5}}$$

$$f'(-1) = \frac{1}{5} \cdot (-1)^3 - 2,9 \cdot (-1) = -0,2 + 2,9 = \underline{\underline{2,7}}$$

Bei $x_1 = -3,81$ findet also ein $(-/+)$ -Vorzeichenwechsel von f' statt,

d.h. hier liegt ein **Tiefpunkt** vor.

Überprüfung von $x_2 = 0$:

$$f'(-1) = \underline{\underline{2,7}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{5} \cdot (1)^3 - 2,9 \cdot (1) = 0,2 - 2,9 = \underline{\underline{-2,7}}$$

Bei $x_2 = 0$ findet also ein $(+/-)$ -Vorzeichenwechsel von f' statt,

d.h. hier liegt ein **Hochpunkt** vor.



Überprüfung von $x_3 = 3,81$:

$$f'(1) = \underline{\underline{-2,7}}$$

$$f'(5) = \frac{1}{5} \cdot (5)^3 - 2,9 \cdot (5) = 25 - 14,5 = \underline{\underline{10,5}}$$

Bei $x_3 = 3,81$ findet also ein $(-/+)$ -Vorzeichenwechsel von f' statt,

d.h. hier liegt ein **Tiefpunkt** vor.

ALTERNATIV: $f''(x) = \frac{3}{5}x^2 - 2,9 \neq 0$

$$f''(-3,81) = \frac{3}{5} \cdot (-3,81)^2 - 2,9 \approx \underline{\underline{5,81}} > 0 \quad ,\text{d.h. LK} \rightarrow \text{also liegt hier ein TP vor.}$$

$$f''(0) = \frac{3}{5} \cdot (0)^2 - 2,9 = \underline{\underline{-2,9}} < 0 \quad ,\text{d.h. RK} \rightarrow \text{also liegt hier ein HP vor.}$$

$$f''(3,81) = \frac{3}{5} \cdot (3,81)^2 - 2,9 \approx \underline{\underline{5,81}} > 0 \quad ,\text{d.h. LK} \rightarrow \text{also liegt hier ein TP vor.}$$

III. y-Koordinaten der Extrempunkte bestimmen (durch Einsetzen der x-Werte in f):

$$f(-3,81) = \frac{1}{20} \cdot (-3,81)^4 - 1,45 \cdot (-3,81)^2 + 9 \approx 10,54 - 21,05 + 9 = \underline{\underline{-1,51}}$$

$$f(0) = \frac{1}{20} \cdot (0)^4 - 1,45 \cdot (0)^2 + 9 = \underline{\underline{9}}$$

$$f(3,81) = \frac{1}{20} \cdot (3,81)^4 - 1,45 \cdot (3,81)^2 + 9 \approx 10,54 - 21,05 + 9 = \underline{\underline{-1,51}}$$

Somit ergeben sich die Punkte:

$TP_1(-3,81/-1,51)$, $TP_2(3,81/-1,51)$ und $HP(0/9)$

8. Wendepunkte

I. notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}x^2 - 2,9 = 0 \quad | : (0,6)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4,83 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\left(\frac{0}{2}\right) \pm \sqrt{(0)^2 + 4 \cdot \frac{5}{6}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 \approx -2,2}} \wedge \underline{\underline{x_2 \approx 2,2}}$$



II. hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel von f''

Überprüfung von $x_1 = -2,2$:

$$f''(-5) = \frac{3}{5} \cdot (-5)^2 - 2,9 = 15 - 2,9 = \underline{\underline{12,1}}$$

$$f''(0) = \frac{3}{5} \cdot (0)^2 - 2,9 = \underline{\underline{-2,9}}$$

Bei $x_1 = -2,2$ findet also ein $(+/-)$ -Vorzeichenwechsel von f'' statt,

d.h. hier liegt ein **Wendepunkt** vor.

(Da $x_1 = -2,2$ keine Nullstelle von f' war, ist dieser Wendepunkt kein Sattelpunkt.)

Überprüfung von $x_2 = 2,2$:

$$f''(0) = \frac{3}{5} \cdot (0)^2 - 2,9 = \underline{\underline{-2,9}}$$

$$f''(5) = \frac{3}{5} \cdot (5)^2 - 2,9 = 15 - 2,9 = \underline{\underline{12,1}}$$

Bei $x_2 = 2,2$ findet also ein $(-/+)$ -Vorzeichenwechsel von f'' statt,

d.h. hier liegt ein **Wendepunkt** vor.

(Da $x_2 = 2,2$ keine Nullstelle von f' war, ist dieser Wendepunkt kein Sattelpunkt.)

III. y-Koordinate des Wendepunktes bestimmen (durch Einsetzen der x-Werte in f):

$$f(-2,2) = \frac{1}{20} \cdot (-2,2)^4 - 1,45 \cdot (-2,2)^2 + 9 \approx 1,17 - 7,02 + 9 = \underline{\underline{3,15}}$$

$$f(2,2) = \frac{1}{20} \cdot (2,2)^4 - 1,45 \cdot (2,2)^2 + 9 \approx 1,17 - 7,02 + 9 = \underline{\underline{3,15}}$$

Die Wendepunkte haben also die folgenden Koordinaten:

$WP_1(-2,2/-3,15)$, und $WP_2(2,2/3,15)$.

9. Wertemenge und Wertetabelle

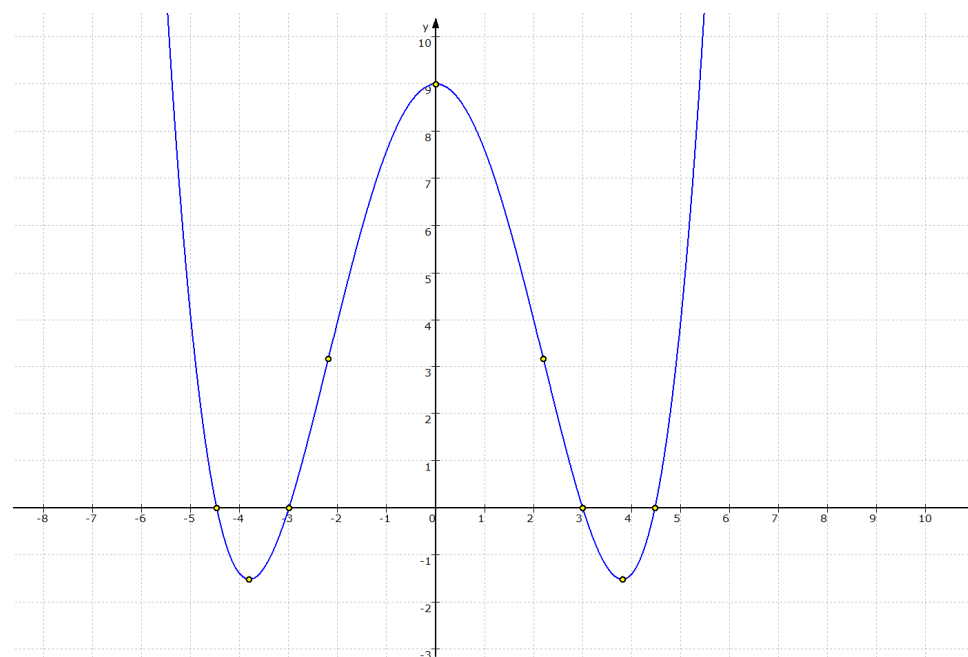
Es gilt: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, das heißt es existiert ein tiefster Punkt des

Graphen, der absolute Tiefpunkt. Die y-Koordinate des Tiefpunktes begrenzt die auftretenden y-Werte. Da $TP_1(-3,81/-1,51)$ und $TP_2(3,81/-1,51)$ (auf Grund der Achsensymmetrie zur y-Achse) gilt für die Wertemenge: $W = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1,51\}$



x	-4,47	-3,81	-3	-2,2	0	2,2	3	3,81	4,47
y	0	-1,51	0	3,15	9	3,15	0	-1,51	0
Eigenschaften	N ₁	TP ₁	N ₂	WP ₁	S _y , HP ₂	WP ₃	N ₃	TP ₂	N ₄

10. Funktionsgraph





Funktion $f(x) = (1/20) \cdot x^4 - 1,45 \cdot x^2 + 9$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-10	364	-171	57,1
-9	219,6	-119,7	45,7
-8	121	-79,2	35,5
-7	58	-48,3	26,5
-6	21,6	-25,8	18,7
-5	4	-10,5	12,1
-4	-1,4	-1,2	6,7
-3	0	3,3	2,5
-2	4	4,2	-0,5
-1	7,6	2,7	-2,3
0	9	0	-2,9
1	7,6	-2,7	-2,3
2	4	-4,2	-0,5
3	0	-3,3	2,5
4	-1,4	1,2	6,7
5	4	10,5	12,1
6	21,6	25,8	18,7
7	58	48,3	26,5
8	121	79,2	35,5
9	219,6	119,7	45,7
10	364	171	57,1



Aufgabe 3

Die Firma „Fischer“ GmbH stellt für den NASA spezielle weltraumtaugliche Kugelschreiber her. Da diese Kugelschreiber auch außerhalb der NASA begehrt sind, geht die Firma davon aus, dass sie alle produzierten Kugelschreiber auch verkaufen kann. Für die Produktionsmenge x (in 1000 Stück) ergibt sich die Gewinnfunktion $G(x) = -0,001x^3 + 0,11x^2 - 2,8x$. Da die Produktionsobergrenze bei 90.000 Stück liegt, gilt: $ID = [0; 90]$.

- a) Bestimmen Sie die Gewinnzone - also dasjenige Teilintervall des Definitionsbereiches, in dem die Firma tatsächlich Gewinn erzielt und geben Sie die Gewinnzone als Intervall an. (Überprüfen Sie auch, ob in dem von Ihnen angegebenen Intervall auch tatsächlich Gewinn erzielt wird.)

$$\begin{aligned}
 G(x) &= 0 \\
 \Rightarrow -0,001x^3 + 0,11x^2 - 2,8x &= 0 && | \text{ x ausklammern} \\
 \Leftrightarrow x \cdot (-0,001x^2 + 0,11x - 2,8) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x = 0 \vee -0,001x^2 + 0,11x - 2,8 &= 0 && | \cdot (-1000) \\
 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 110x + 2800 &= 0 && | \text{ pq-Formel} \\
 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-110 \pm \sqrt{(-110)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2800}}{2} &= 0 \\
 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 55 \pm 15 \\
 \Leftrightarrow \underline{x_1 = 0} \wedge \underline{x_2 = 40} \wedge \underline{x_3 = 70}
 \end{aligned}$$

Somit sind die folgenden Intervalle zu überprüfen:

Intervalle	Überprüfung	Eigenschaft
$I_1 = [0; 40]$	$G(10) = -0,001 \cdot (10)^3 + 0,11 \cdot (10)^2 - 2,8 \cdot (10)$ $= -1 + 11 - 28 = \underline{\underline{-18}}$	Verlust (--)
$I_2 = [40; 70]$	$G(50) = -0,001 \cdot (50)^3 + 0,11 \cdot (50)^2 - 2,8 \cdot (50)$ $= -125 + 275 - 140 = \underline{\underline{10}}$	Gewinn (+)
$I_3 = [70; 90]$	$G(80) = -0,001 \cdot (80)^3 + 0,11 \cdot (80)^2 - 2,8 \cdot (80)$ $= -512 + 704 - 224 = \underline{\underline{-32}}$	Verlust (--)

In dem Intervall $I_2 = [40; 70]$ wird also tatsächlich Gewinn erzielt.



- b) Überprüfen Sie rechnerisch, für welche Produktionsmenge das Gewinnmaximum erzielt wird und bestimmen Sie, wie groß es dann ist? (Hinweis: Die erzielten Gewinne werden in 1000 € angegeben.)

I. notwendige Bedingung: $G'(x) = 0$

$$G'(x) = -0,003x^2 + 0,22x - 2,8$$

$$\Rightarrow -0,003x^2 + 0,22x - 2,8 = 0 \quad | :(-0,003)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 73\frac{1}{3}x + 333\frac{1}{3} = 0 \quad | \text{pq-Formel}$$

$$\Leftrightarrow x = 36\frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(36\frac{2}{3}\right)^2 - 833\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow x \approx 36\frac{2}{3} \pm \sqrt{511,11} = 36\frac{2}{3} \pm 22,61$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 14,06 \quad \wedge \quad x_2 = 59,28$$

II. hinreichende Bedingung:

Da nur $x_2 = 59,28$ innerhalb der Gewinnzone liegt, muss lediglich dieser Wert überprüft werden. ($\rightarrow$ Überprüfung mit Hilfe der 2. Ableitung, also des Kurvenverhaltens)

$$G''(59,28) = -0,006 \cdot (59,28) + 0,08 = \underline{\underline{-0,27568}}$$

Es gilt: $G''(59,28) < 0$, somit liegt hier eine Rechtskurve (RK) vor – also ein Hochpunkt (HP)

III. Gewinn bestimmen:

$$G(59,28) = -0,001 \cdot (59,28)^3 + 0,11 \cdot (59,28)^2 - 2,8 \cdot (59,28) \\ \approx -208,31 + 386,55 - 165,98 = \underline{\underline{12,26}}$$

Bei $x = 59,28$, d.h. bei einer Produktion von ca. 59280 Stiften wird ein maximaler Gewinn von 12,26 GE (d.h. 12 260 €) erreicht.



Aufgabe 4

In ein Krankenhaus wird ein Patient eingeliefert, der von einem Virus befallen ist, der ein starkes Fieber verursacht. Die Fieberkurve (Körpertemperatur in °C) des Patienten (in Abhängigkeit von der Zeit x in Stunden) kann näherungsweise durch den folgenden Funktionsterm beschrieben werden:

$$f(x) = 0,002x^4 - 0,04x^3 + 0,2x^2 + 39.$$

Diese Näherung gilt nur für positive x -Werte ($x > 0$) und bezogen auf die ersten 12 Stunden.

Durch die Behandlung mit einem fiebersenkenden Medikament erreicht die Körpertemperatur einen Maximalwert und sinkt danach auf die „Normaltemperatur“ ab.

- c) Welchen Maximalwert erreicht die Fieberkurve in ihrem Gültigkeitsbereich und nach wie vielen Stunden ist dies der Fall?

Der Maximalwert wird am (höchsten) Hochpunkt der Kurve erreicht. Somit müssen die Hochpunkte der Kurve bestimmt werden.

I. notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f'(x) = 0,008x^3 - 0,12x^2 + 0,4x$

$$\Rightarrow 0,008x^3 - 0,12x^2 + 0,4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (0,008x^2 - 0,12x + 0,4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 0,008x^2 - 0,12x + 0,4 = 0 \quad | : (0,008)$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 15x + 50 = 0 \quad | \text{pq-Formel}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{-15}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-15}{2}\right)^2 - 50}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 7,5 \pm \sqrt{6,25} = 7,5 \pm 2,5$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}} \vee \underline{\underline{x = 5}} \vee \underline{\underline{x = 10}}$$

II. hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel von f'

Überprüfung von $x_1 = 0$:

$$f'(-1) = 0,008 \cdot (-1)^3 - 0,12 \cdot (-1)^2 + 0,4 \cdot (-1) = -0,008 - 0,12 - 0,4 = \underline{\underline{-0,528}}$$

$$f'(1) = 0,008 \cdot (1)^3 - 0,12 \cdot (1)^2 + 0,4 \cdot (1) = 0,008 - 0,12 + 0,4 = \underline{\underline{0,288}}$$

Bei $x_1 = 0$ findet also ein $(-/+)$ -Vorzeichenwechsel von f' statt,

d.h. hier liegt ein **Tiefpunkt** vor.



Überprüfung von $x_2 = 5$:

$$f'(1) = \underline{0,288}$$

$$f'(8) = 0,008 \cdot (8)^3 - 0,12 \cdot (8)^2 + 0,4 \cdot (8) = 4,096 - 7,68 + 3,2 = \underline{-0,384}$$

Bei $x_2 = 5$ findet also ein (+/-)-Vorzeichenwechsel von f' statt,

d.h. hier liegt ein **Hochpunkt** vor.

Überprüfung von $x_3 = 10$:

$$f'(8) = \underline{-0,384}$$

$$f'(12) = 0,008 \cdot (12)^3 - 0,12 \cdot (12)^2 + 0,4 \cdot (12) = 13,824 - 17,28 + 4,8 = \underline{1,344}$$

Bei $x_3 = 10$ findet also ein (-/+)-Vorzeichenwechsel von f' statt,

d.h. hier liegt ein **Tiefpunkt** vor.

Der Maximalwert wird also bei $x=5$, d.h. nach 5 Stunden erreicht. Um zu ermitteln wie hoch dieser Wert ist, muss der zugehörige y-Wert berechnet werden.

III. y-Koordinate bestimmen (durch Einsetzen der x-Werte in f):

$$\begin{aligned} f(5) &= 0,002 \cdot (5)^4 - 0,04 \cdot (5)^3 + 0,2 \cdot (5)^2 + 39 \\ &= 1,25 - 5 + 5 + 39 = \underline{40,25} \end{aligned}$$

Die Fieberkurve erreicht somit nach 5 Stunden ihren Maximalwert.
Dieser beträgt 40,25 °C.

An den Wendepunkten der Kurve steigt und fällt das Fieber am stärksten. Man geht davon aus, dass von dem Wendepunkt an, bei dem das Fieber fällt (dies ist bei $W(7,9 / f(7,9))$ der Fall), das Fieber linear weiterfällt und zwar sinkt es entsprechend dem Verlauf der Wendetangente.



- d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Gleichung der Wendetangenten,
nach wie vielen Stunden die Temperatur wieder auf 37 ° gesunken ist?

Zur Bestimmung der Wendetangente muss zunächst der Wendepunkt bestimmt werden.

y-Koordinaten

$$\begin{aligned} f(7,9) &= 0,002 \cdot (7,9)^4 - 0,04 \cdot (7,9)^3 + 0,2 \cdot (7,9)^2 + 39 \\ &\approx 7,79 - 19,72 + 12,48 + 39 = \underline{39,55} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich der Punkt $WP(7,9 / 39,55)$.

$$\text{Und } m = f'(x) \quad f'(x) = 0,008x^3 - 0,12x^2 + 0,4x$$

$$\text{Also: } m = f'(7,9) = 0,008 \cdot (7,9)^3 - 0,12 \cdot (7,9)^2 + 0,4 \cdot (7,9) \approx 0,5 - 7,49 + 3,13 = \underline{-3,83}$$

Für die Wendetangente gilt: $t(x) = mx + b$

$$\Rightarrow 39,55 = (-3,83) \cdot 7,9 + b \quad | + 30,257$$

$$\Leftrightarrow 69,81 = b$$

Somit erhält man die Tangentengleichung: $t(x) = -3,83x + 69,81$.

Bed: $t(x) = 37$

$$\Rightarrow -3,83x + 69,81 = 37 \quad | - 69,81$$

$$\Rightarrow -3,83x = -32,81 \quad | : (-3,83)$$

$$\Rightarrow x = 8,57$$

Nach ca. 8,6 Stunden ist die Temperatur wieder auf 37° gesunken.