2.7. Aufgaben zu Ähnlichkeitsabbildungen

Aufgabe 1

Strecke das Dreieck ABC mit A(3|1), B(2|3) und C(2|2) an Z(1|1) um die Streckfaktoren $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{1}{2}$, $k_3 = -1$, $k_4 = -\frac{3}{2}$ und $k_5 = -2$.

Aufgabe 2

Strecke das Dreieck ABC mit A(−0,5|2), B(−3,5|3,5) und C(−2|0,5) an Z(1|0,5) um die Streckfaktoren $k_1 = \frac{4}{3}$ und $k_2 = -\frac{2}{3}$.

Aufgabe 3
Ergänze jeweils das Streckzentrum Z und die fehlenden Bildpunkte. Bestimme außerdem den Streckfaktor k:

a) A(−5,5|2,5), B(−4|2,5), C(−2,5|4), D(−4|4), A'(−4|1) und D'(−3|2)

b) A(1|2), B(2|2), C(3|3,5), D(1|4), A'(4|−1) und B'(2|−1)

Aufgabe 4
Gegeben sind das Dreieck ABC und die Bildpunkte von drei Dreiecken $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$. Bestimme das Streckzentrum Z und ergänze die folgende Tabelle. Formuliere eine Regel, mit der sich die Streckenlängen, Flächeninhalte und Winkel des Bilddreiecks mit Hilfe des Streckfaktors k aus den entsprechenden Größen des Originals berechnen lassen.

Nr	k	A	B	C	a	b	c	α	β	γ	A
Original	1	(1|1)	(3|1)	(1|2)							
1		(2|3)	(6|3)								
2		(0,5|0)	(1,5|0)								
3		(−0,5|−2)	(−1,5|−2)								

Aufgabe 5
Berechne jeweils den Flächeninhalt der Bildfiguren im Maßstab 1 LE = 1 cm:

a) Streckung des Dreiecks ABC mit A(1,5|3), B(4|2) und C(4|5) an Z(0|3) mit k = 2.

b) Streckung des Dreiecks ABC mit A(0|0), B(6|2) und C(2|5) an Z(−1|−1) mit $k = -\frac{1}{2}$.

c) Streckung des Dreiecks ABC mit A(4|−5), B(2|−0,5) und C(0,5|−2) an Z(−1|1) mit $k = -\frac{2}{3}$.

d) Streckung des Vierecks ABCD mit A(−3|−2), B(−1|−2), C(−2|−1) und D(−4|−1) an Z(0|0) um $k = -\frac{3}{2}$

e) Streckung des Vierecks ABCD mit A−6|3), B(−4|0), C(−1|3) und D(−3|5) an Z(1|1) um $k = -\frac{2}{3}$

f) Streckung des Dreiecks ABC mit A(2|1); B(5|2) und C(3|5) an Z(−1|−1) mit $k = \frac{2}{3}$.

g) Streckung des Vierecks ABCD mit A(6|−2); B(2|−1); C(1|−3) und D(5|−4) an Z(−1|1) mit $k = -\frac{3}{2}$.

h) Streckung des Vierecks ABCD mit A(−6|−3); B(−4|−5); C(−2|−2) und D(−5|−1) an Z(1|1) mit $k = \frac{1}{2}$.

i) Streckung des Vierecks ABCD mit A(−1|1); B(−2|5); C(−5|4) und D(−4|2) an Z(1|−1) mit $k = -\frac{4}{3}$.

Aufgabe 6

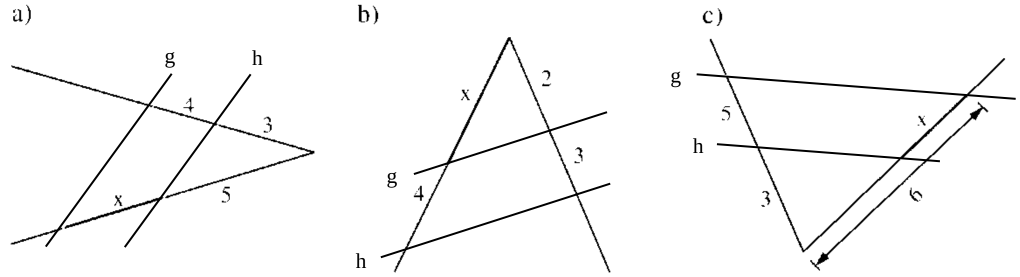
a) Ein Goldwürfel mit der Kantenlänge 1 cm hat eine Oberfläche von 6 cm^2 und wiegt 19,3 g. Welche Oberfläche und welches Gewicht hat ein „doppelt" so großer Goldwürfel?

b) Bei einem Würfel werden alle Seiten um 25 % verlängert. Um wie viel Prozent ändern sich dadurch das Volumen und die Oberfläche?

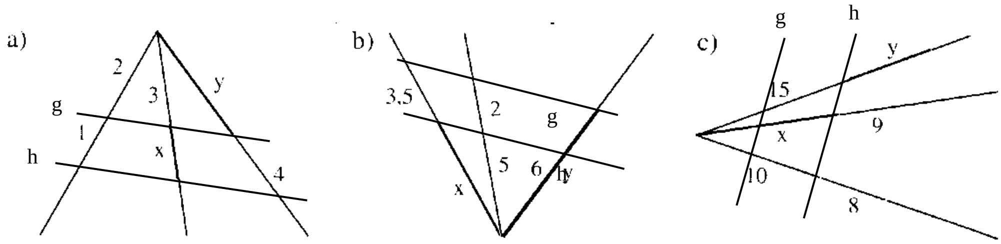
c) Ein heutiges Nashorn mit einer Schulterhöhe von ca. 1,80 m wiegt ca. 2 Tonnen. Wie schwer waren seine 4 m hohen Vorfahren, die vor 20 Millionen Jahren lebten?

d) Ein 1 m langer Lachs wiegt ca. 20 kg. Schätze das Gewicht eines 8 m langen Schwertwales und eines 30 m langen Blauwales. In Wirklichkeit wiegt ein Schwertwal „nur" ca. 6 Tonnen und ein Blauwal „nur" ca. 150 Tonnen. Woran könnte das liegen?

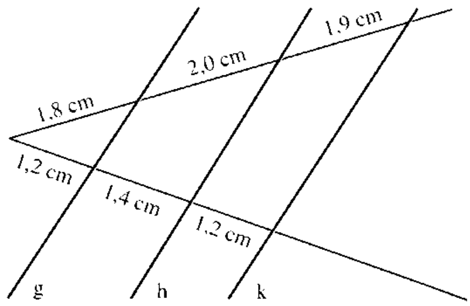
Aufgabe 7
Die Geraden g und h sind parallel. Berechne x.



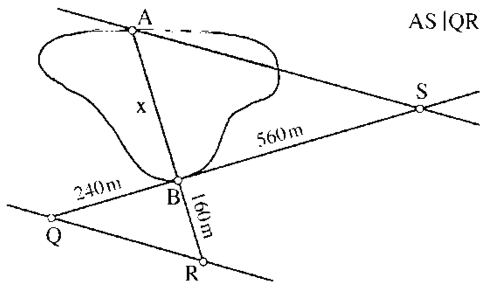
Aufgabe 8
Die Geraden g und h sind parallel. Berechne x und y.



Aufgabe 9
Prüfe rechnerisch, ob die Geraden g, h und k parallel sind.

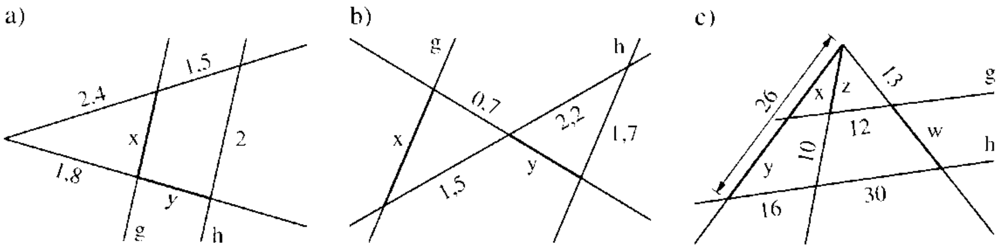


Aufgabe 10
Zwei Geländepunkte A und B sind durch einen See getrennt. Bestimme aus den eingetragenen Angaben die Entfernung der Punkte A und B.

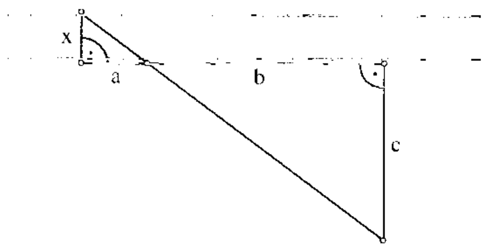


Aufgabe 11
Wie hoch ist ein Baum, der einen 25 m langen Schatten wirft, wenn gleichzeitig der Schatten eines 1,80 m großen Wanderers 1,50 m lang ist?

Aufgabe 12
Die Geraden g und h sind parallel. Berechne x und y.



Aufgabe 13
Will man die Breite x eines Flusses von einer Uferseite aus bestimmen, so kann man wie in der Figur vier Punkte wählen. Aus den Längen a, b und c lässt sich x berechnen. Bestimme x für
a) a = 60 m; b = 48 m; c= 15 m
b) a = 75 m; b = 55 m; c = 22 m
c) a = 90 m; b = 76 m; c = 16 m.



Aufgabe 14
Eine regelmäßige vierseitige Pyramide mit der Grundkante a = 6 cm und der Höhe h = 8 cm wird im Abstand d = 3,6 cm von der Grundfläche von einer zu dieser parallelen Ebene geschnitten. Wie lang ist eine Seite der quadratischen Schnittfläche?

Aufgabe 15
Einem Kreis mit Radius r = 4 cm soll ein Rechteck einbeschrieben werden (d. h., die Ecken des Rechtecks sollen auf dem Kreis liegen), dessen Seiten sich wie 3: 2 verhalten.

Aufgabe 16
Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$ aus a : b = 2 : 3 und $w_g = 3{,}5$ cm.

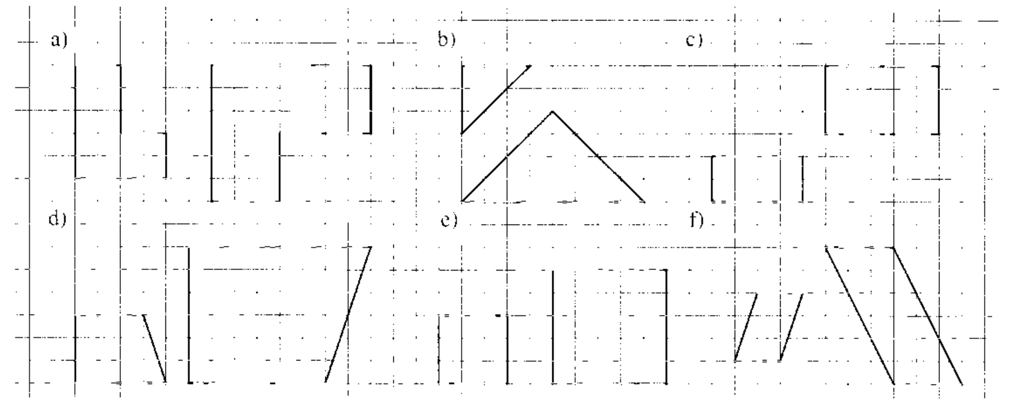
Aufgabe 17
Konstruiere ein Dreieck ABC aus
a) a : b=4 : 5; $\gamma = 80°$ und $s_c = 4$ cm
b) c : b = 2 : 1, $\alpha = 50°$ und $s_a = 6$ cm.

Aufgabe 18
Konstruiere ein Dreieck ABC aus
a) a:b:c=2:3:4 und $s_c = 3$ cm
b) a:b:c=3:5:7 und $s_a = 5$ cm
c) a:b:c=5:3:6 und $h_c = 3$ cm
d) a: b:c=4:6:5 und $h_a = 3{,}5$ cm

Aufgabe 19
Zeichne in einen Halbkreis mit r = 4 cm
a) ein Quadrat, sodass zwei Ecken auf dem Kreis liegen und eine Seite auf dem Durchmesser
b) ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis 3 : 2, sodass zwei Ecken auf dem Kreis liegen und eine Seite auf dem Durchmesser (2 Lösungen).

Aufgabe 20
Zeichne ein Dreieck ABC mit a = 5,2 cm, b = 7,5 cm und c = 6,1 cm. Dem Dreieck soll ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis 7:4 einbeschrieben werden, sodass je eine Ecke auf AC und BC und eine Seite auf AB liegt.

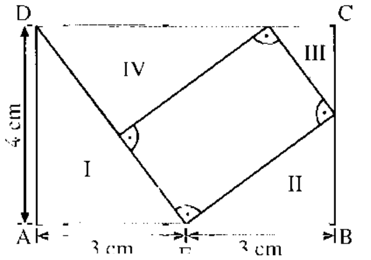
Aufgabe 21
Untersuche, ob die Vielecke ähnlich sind und begründe.



Aufgabe 22
Prüfe, ob ein Dreieck mit den angegebenen Winkeln zu einem Dreieck mit Winkeln von 55° und 30° ähnlich ist.
a) $\beta = 30°$ und $\gamma = 95°$ b) $\alpha = 75°$ und $\beta = 55°$ c) $\alpha = 55°$ und $\gamma = 105°$

Aufgabe 23
Begründe mit dem Ähnlichkeitssatz:
a) Ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel 30° und ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel 60° sind ähnlich.
b) Ein gleichschenkliges Dreieck mit den Basiswinkeln 72° und ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basiswinkel doppelt so groß sind wie der Winkel an der Spitze, sind ähnlich.

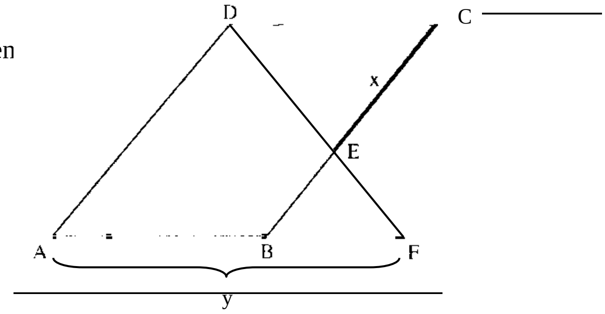
Aufgabe 24



a) Zeige, dass die vier Teildreiecke I bis IV ähnlich sind.
b) Berechne die Abschnitte, in welche BC und CD durch die Punkte F bzw. G geteilt werden.
c) Gib den Ähnlichkeitsmaßstab der Dreiecke I bis IV in Form einer Verhältniskette w : x : y : z mit natürlichen Zahlen w, x, y, z an.

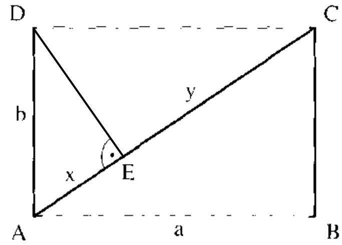
Aufgabe 25

Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm. Zeige: Für einen Punkt E auf BC ist das Produkt $x \cdot y$ konstant.



Aufgabe 26

Bei einem DIN-A4-Blatt ABCD stehen die Seiten im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$
Zeige: das Lot von D auf die Diagonale AC diese im Verhältnis 1 :2.

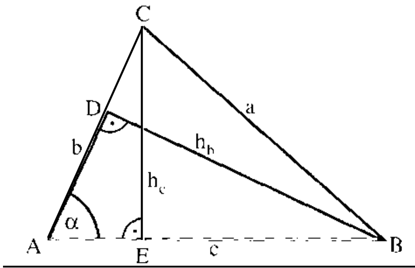


Aufgabe 27

Beweise: Wenn zwei Dreiecke in einem Winkel (z. B. $\gamma = \gamma'$) und im Verhältnis der einschließenden Seiten (z. B. $a : b = a' : b'$) übereinstimmen, dann sind sie ähnlich.

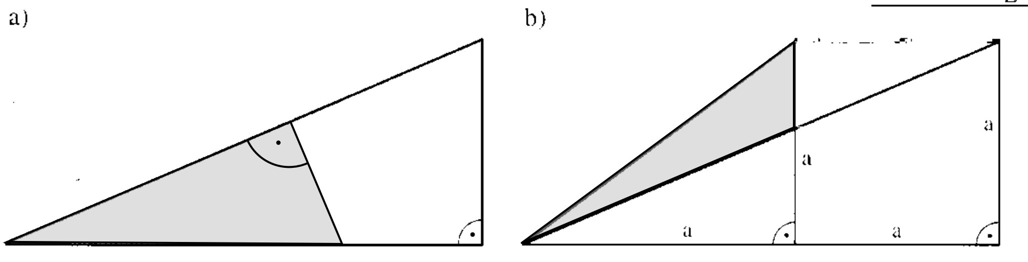
Aufgabe 28

Zeige, dass sich im Dreieck ABC die Höhen umgekehrt wie die zugehörigen Seiten verhalten: $h_b : h_c = c : b$.



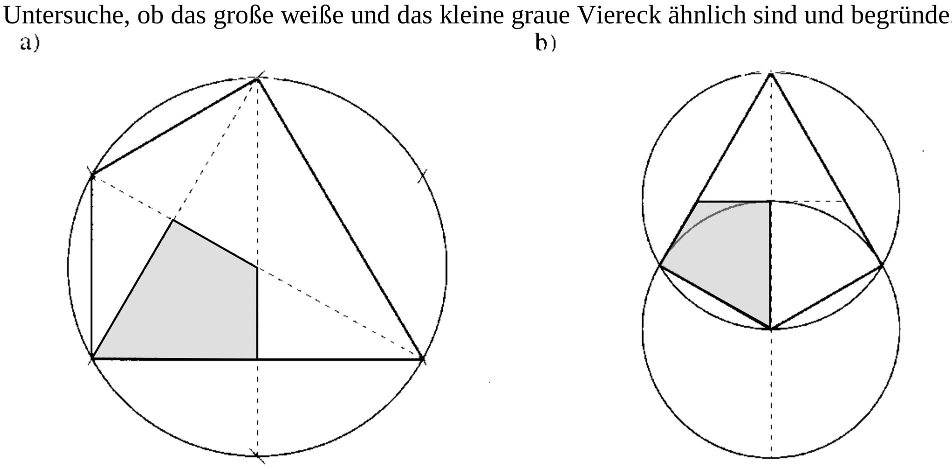
Aufgabe 29

Untersuche, ob das große weiße und das kleine graue Dreieck ähnlich sind und begründe.



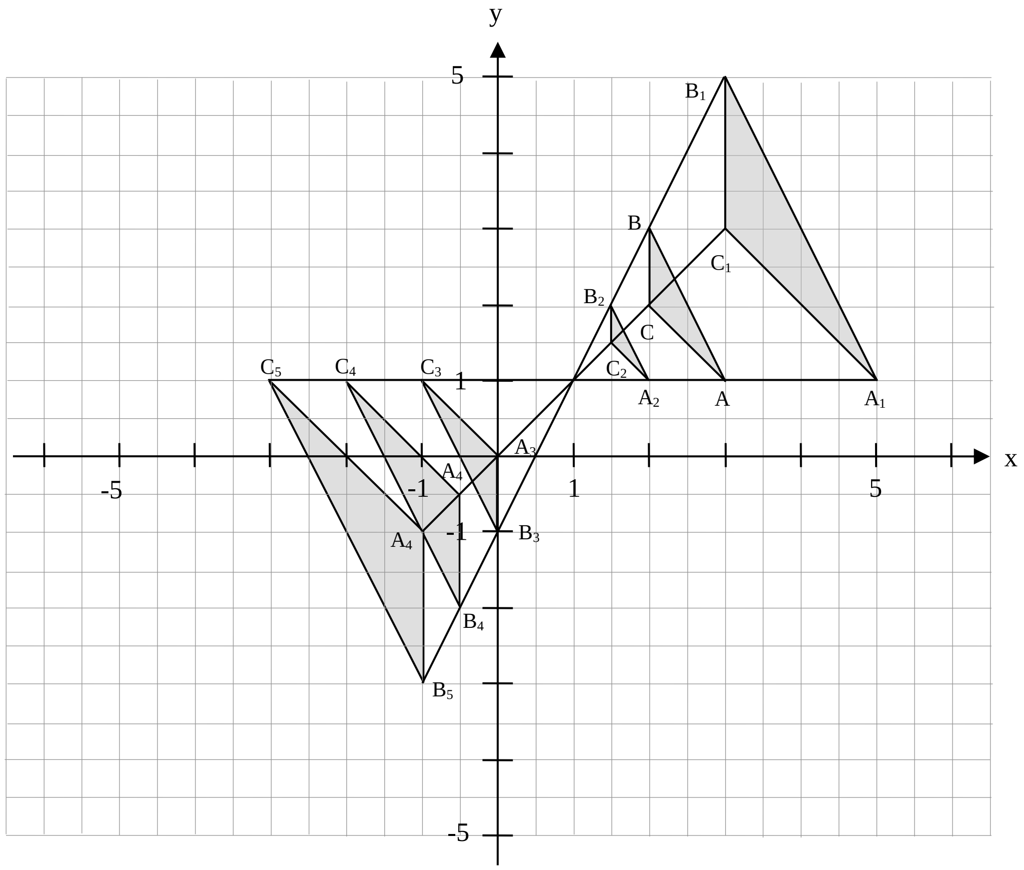
Aufgabe 30

Untersuche, ob das große weiße und das kleine graue Viereck ähnlich sind und begründe.

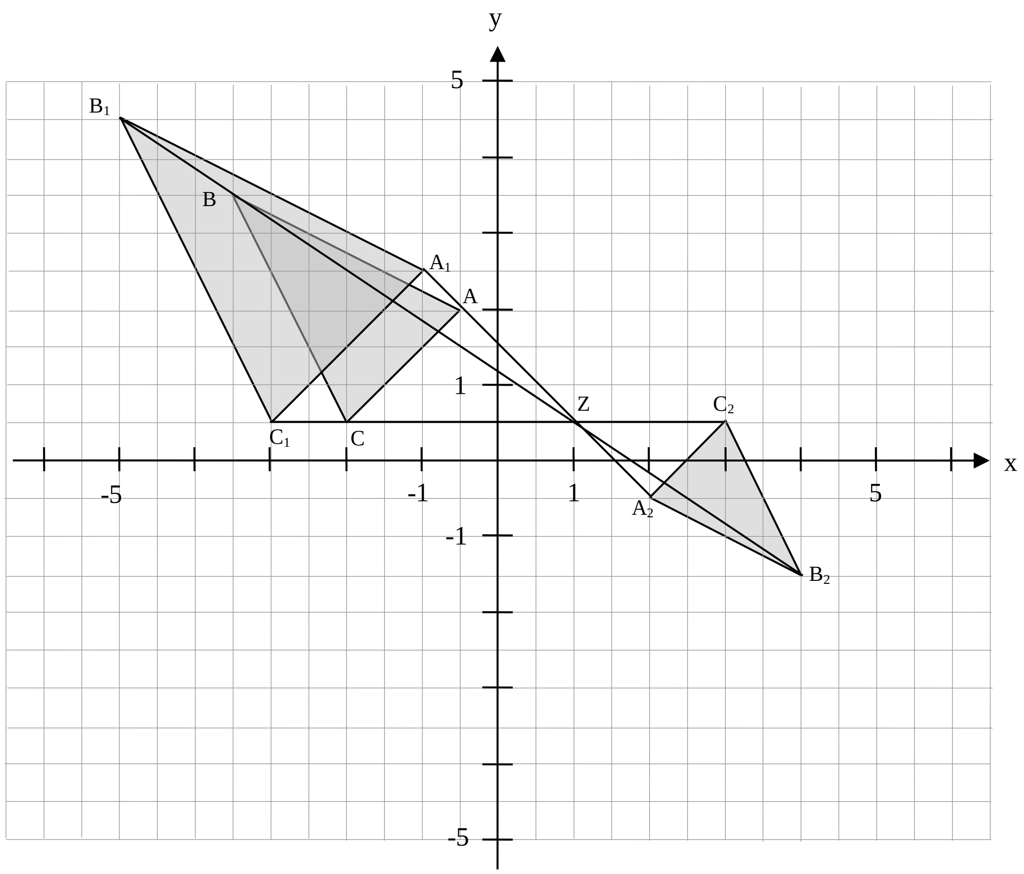


2.7. Lösungen zu den Aufgaben zu Ähnlichkeitsabbildungen

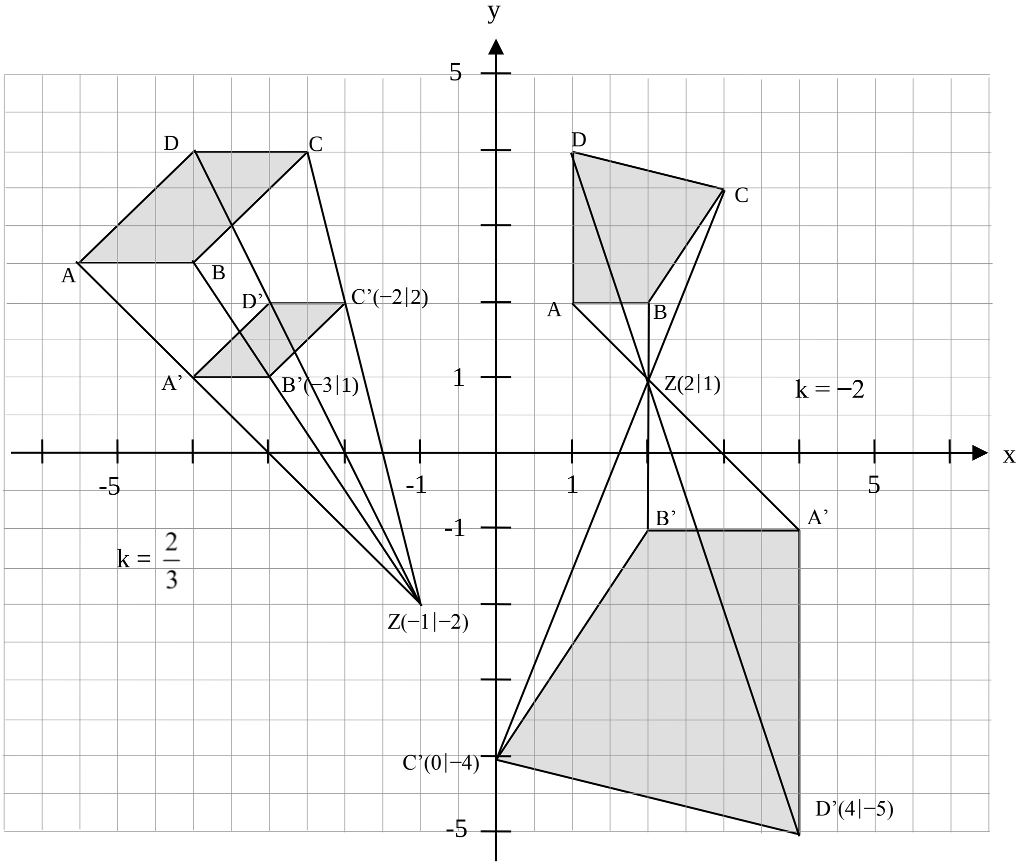
Aufgabe 1



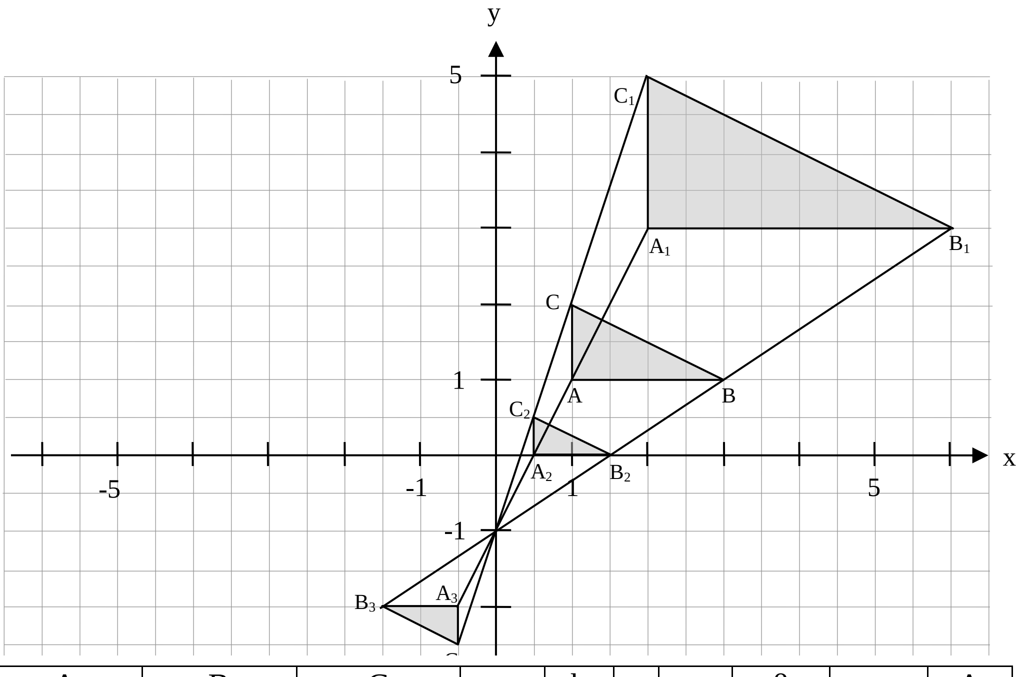
Aufgabe 2



Aufgabe 3



Aufgabe 4



Nr	k	A	B	C	a	b	c	α	β	γ	A
	1	(1|1)	(3|1)	(1|2)	2,24	1	2	90°	26,6°	63,4°	1
1	2	(2|3)	(6|3)	(2|5)	4,48	2	4	90°	26,6°	63,4°	4
2	0,5	(0,5|0)	(1,5|0)	(0,5|0,5)	1,12	0,5	1	90°	26,6°	63,4°	0,25
3	−0,5	(−0,5|−2)	(−1,5|−2)	(-0,5|-2,5)	1,12	0,5	1	90°	26,6°	63,4°	0,25

Allgemeine Regeln:

Die **Streckenlängen** ändern sich um den Faktor $|k|$.

Die **Flächeninhalte** ändern sich um den Faktor $|k|^2$.
Die **Winkel** bleiben unverändert.

Aufgabe 5: Die Bildfiguren müssen nicht gezeichnet werden und die Streckzentren daher ohne Bedeutung!

a) $A = \frac{1}{2} \cdot 3\text{ cm} \cdot 2{,}5\text{ cm} = 3{,}75\text{ cm}^2$ und $A' = k^2 \cdot A = 15\text{ cm}^2$.

e)

$A = 25\text{ cm}^2 - 3\text{ cm}^2 - 3\text{ cm}^2 - 2\text{ cm}^2 - 4{,}5\text{ cm}^2 = \underline{\underline{12{,}5\text{ cm}^2}}$

$A' = k^2 \cdot A = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{25}{2}\text{ cm}^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{25}{2}\text{ cm}^2 = \underline{\underline{5{,}\bar{5}\text{ cm}^2}}$

b)

$A = 30\text{ cm}^2 - 6\text{ cm}^2 - 6\text{ cm}^2 - 5\text{ cm}^2 = \underline{\underline{13\text{ cm}^2}}$

$A' = k^2 \cdot A = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 13\text{ cm}^2 = \frac{1}{4} \cdot 13\text{ cm}^2 = \underline{\underline{3{,}25\text{ cm}^2}}$

d)

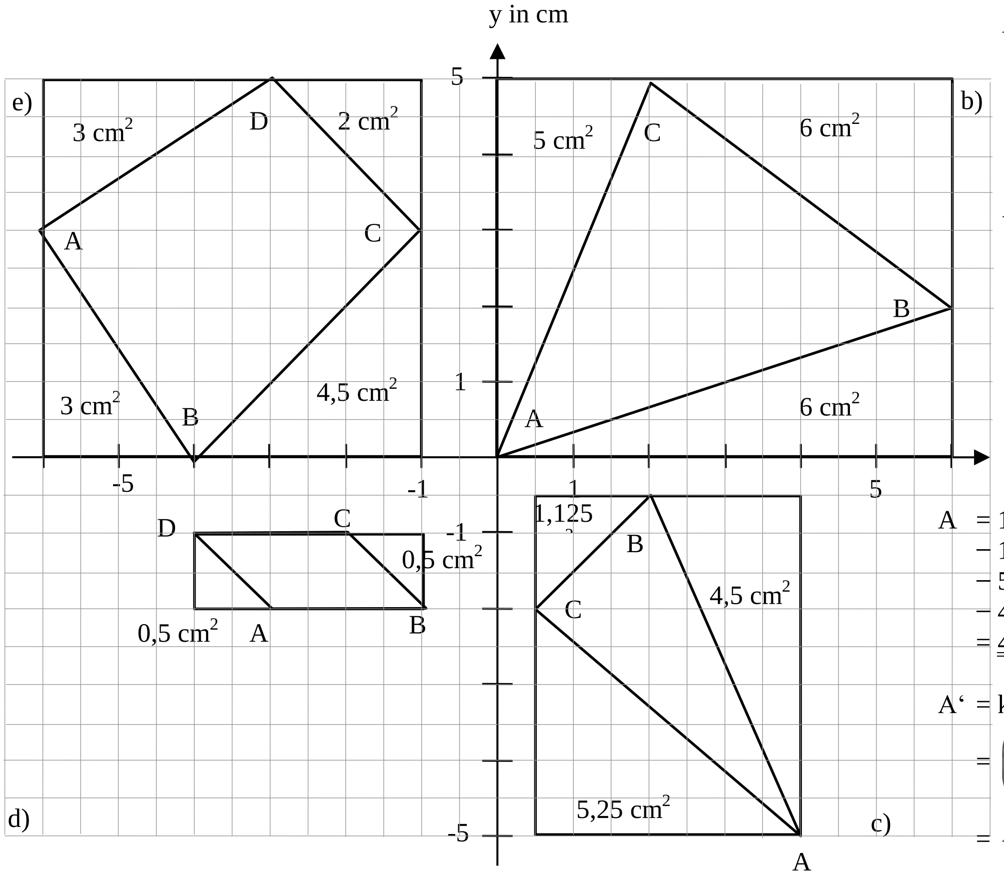
$A = 3\text{cm}^2 - 0{,}5\text{ cm}^2 - 0{,}5\text{ cm}^2 = \underline{\underline{2\text{ cm}^2}}$

$A' = k^2 \cdot A = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 2\text{ cm}^2 = \frac{9}{4} \cdot 2\text{ cm}^2 = \underline{\underline{4{,}5\text{ cm}^2}}$

c)

$A = 15{,}75\text{ cm}^2 - 1{,}125\text{ cm}^2 - 5{,}25\text{ cm}^2 - 4{,}5\text{ cm}^2 = \underline{\underline{4{,}875\text{ cm}^2}}$

$A' = k^2 \cdot A = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 4{,}875\text{ cm}^2 = \frac{4}{9} \cdot 4{,}875\text{ cm}^2 \approx \underline{\underline{2{,}167\text{ cm}^2}}$



i)

$A = 15\text{ cm}^2 - 2\text{ cm}^2 - 2\text{ cm}^2 - 1\text{ cm}^2 - 1\text{ cm}^2 = \underline{\underline{9\text{ cm}^2}}$

$A' = k^2 \cdot A = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 9\text{ cm}^2 = \frac{9}{4} \cdot 9\text{ cm}^2 = 20{,}25\text{ cm}^2$

f)

$A = 12\text{ cm}^2 - 3\text{ cm}^2 - 2\text{ cm}^2 - 1{,}5\text{ cm}^2 = \underline{\underline{5{,}5\text{ cm}^2}}$

$A' = k^2 \cdot A = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{11}{2}\text{ cm}^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{11}{2}\text{ cm}^2 = 2{,}\bar{3}\text{ cm}^2$

h)

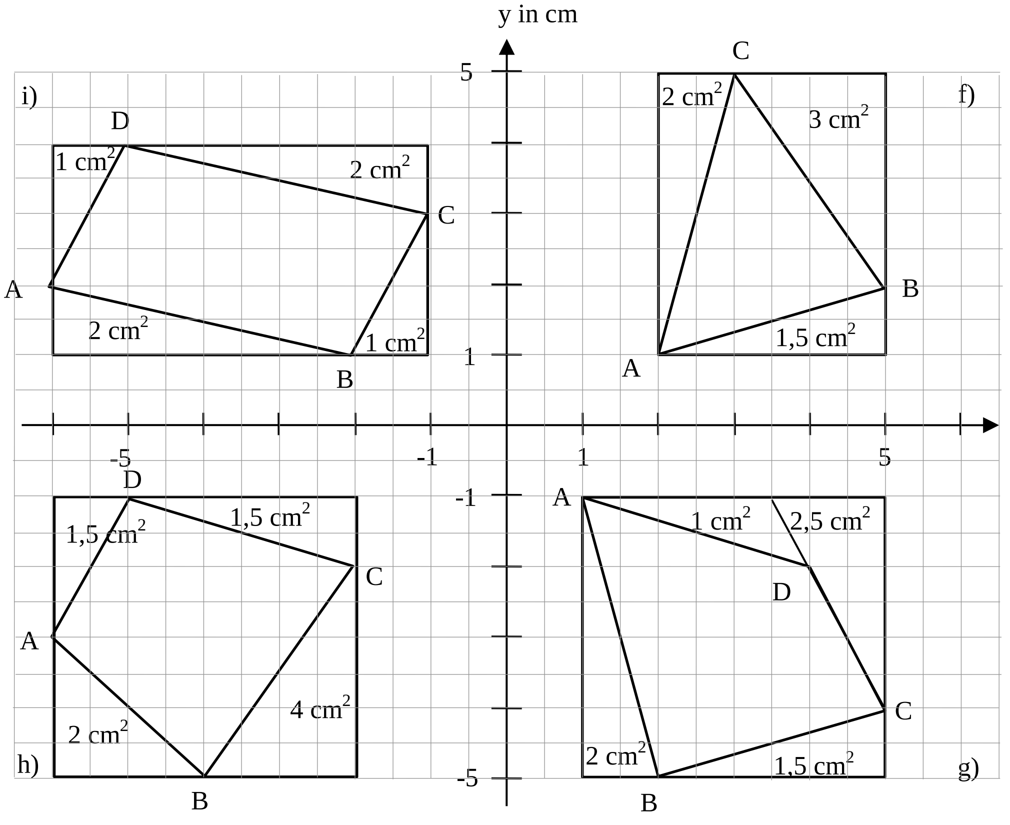
$A = 20\text{ cm}^2 - 1{,}5\text{ cm}^2 - 1{,}5\text{ cm}^2 - 2\text{ cm}^2 - 4\text{ cm}^2 = \underline{\underline{11\text{ cm}^2}}$

$A' = k^2 \cdot A = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 11\text{ cm}^2 = \frac{1}{4} \cdot 11\text{ cm}^2 = \underline{\underline{2{,}75\text{ cm}^2}}$

g)

$A = 16\text{ cm}^2 - 2\text{ cm}^2 - 1{,}5\text{ cm}^2 - 2{,}5\text{ cm}^2 - 1\text{ cm}^2 = \underline{\underline{9\text{ cm}^2}}$

$A' = k^2 \cdot A = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot 9\text{ cm}^2 = \frac{16}{9} \cdot 9\text{ cm}^2 = \underline{\underline{16\text{ cm}^2}}$



Aufgabe 6

a) Bei 2 cm Kantenlänge hat der Würfel eine Oberfläche von $4 \cdot 6\ \text{cm}^2 = 24\ \text{cm}^2$ und ein Gewicht von $8 \cdot 19{,}3\ \text{g} = 154{,}4\ \text{g}$.

b) Streckfaktor 125 % = 1,25 $\Rightarrow$ $O' = 1{,}25^2 \cdot O = 1{,}5625 \cdot O$ und $V' = 1{,}25^3 \cdot V = 1{,}9531 \cdot V$ $\Rightarrow$ Die Oberfläche wächst um 56,25 % und das Volumen sogar um 95,31 %!

c) Die Indricotherien wogen vermutlich ca. $\left(\frac{4}{1{,}8}\right)^3 \cdot 2 \approx 22$ Tonnen und waren Zeitgenossen unserer ersten aufrecht gehenden Vorfahren. Sie wogen nicht viel weniger als die bekannten Sauropoden der Jurazeit (100 Millionen Jahre vor unserer Zeit)

d) Der Schwertwal hat das $8^3 = 512$ fache Volumen und müsste daher mehr als 10 Tonnen wiegen. Beim Blauwal käme man auf 540 Tonnen. Große Fische haben andere Proportionen als kleine Fische: Der Schwanz ist vergleichsweise schlanker und nimmt einen größeren Teil der Länge ein.

Aufgabe 7

a) $x = \frac{20}{3}$ b) $x = \frac{8}{3}$ c) $x = \frac{15}{4}$

Aufgabe 8

a) $x = \frac{3}{2}$ und $y = 8$ b) $x = \frac{35}{4}$ und $y = \frac{42}{5}$ c) $x = \frac{45}{4}$ und $y = 12$

Aufgabe 9

keine ist parallel mit einer anderen, weil $1{,}2 : 1{,}4 : 1{,}2 \neq 1{,}8 : 2 : 1{,}9$ ist.

Aufgabe 10

x = 373,33 m

Aufgabe 11

h = 30 m

Aufgabe 12

a) $x \approx 1{,}23$ und $y = 1{,}125$ b) $x \approx 1{,}16$ und $y \approx 1{,}027$ c) $w = 19{,}5$; $z = 6{,}67$; $x = 10{,}4$ und $y = 15{,}6$

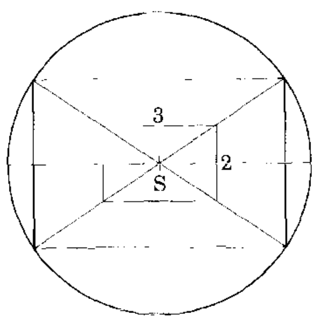
Aufgabe 13

a) x = 18,75 m b) x = 30 m c) $x \approx 18{,}95$ m

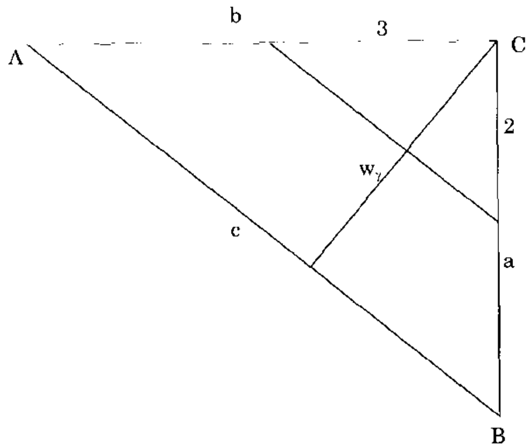
Aufgabe 14

a’ = 3,3 cm

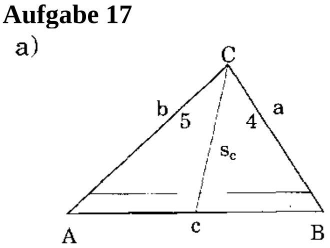
Aufgabe 15

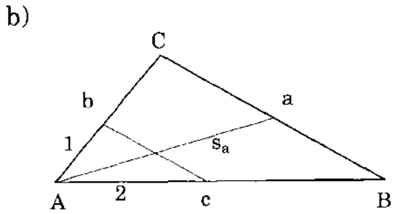


Aufgabe 16

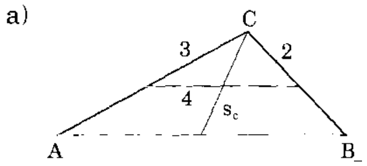


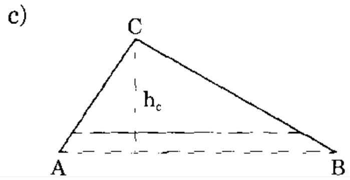
Aufgabe 17



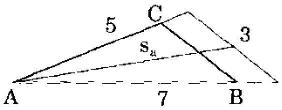


Aufgabe 18

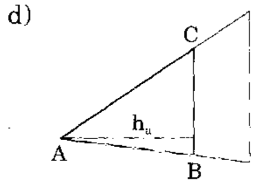




b)

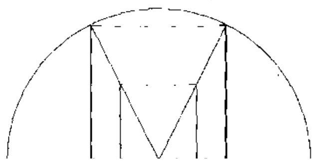


d)

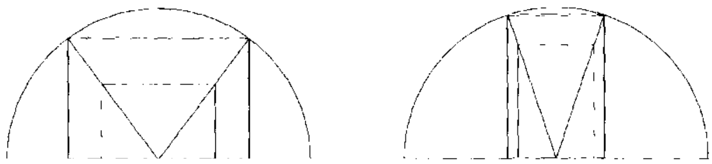


Aufgabe 19

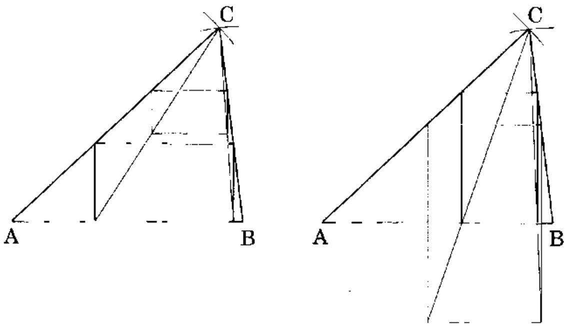
a)



b)



Aufgabe 20



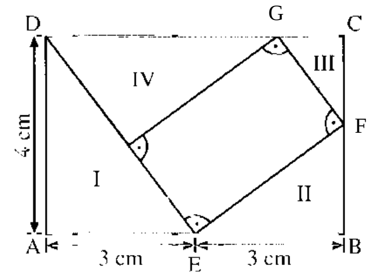
Aufgabe 21

a) nein, da die entsprechenden Seitenlängen nicht im gleichen Verhältnis zueinander stehen.
b) ja, da es sich um rechtwinklige gleichschenklige Dreiecke handelt. Sie stimmen in allen Winkeln überein und haben daher auch gleiche Längenverhältnisse.
c) nein, da die entsprechenden Seitenlängen nicht im gleichen Verhältnis zueinander stehen.
d) ja mit Streckfaktor k = 2.
e) ja mit Streckfaktor $k = \frac{5}{3}$.
f) nein, da die entsprechenden Seitenlängen nicht im gleichen Verhältnis zueinander stehen.

Aufgabe 22

Prüfe, ob ein Dreieck mit den angegebenen Winkeln zu einem Dreieck mit Winkeln von 55° und 30° ähnlich ist.

a) Ja, denn $\alpha = 55°$ b) Nein, denn $\gamma = 50°$ c) Ja, denn $\beta = 30°$

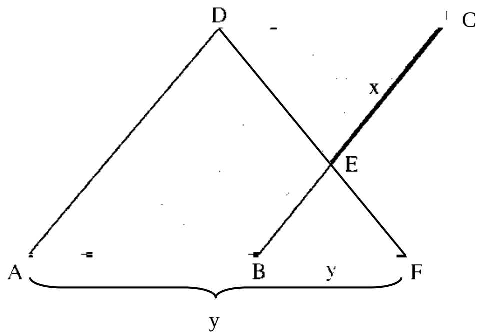


Aufgabe 23

a) In beiden Dreiecken sind die Winkel 30°, 60° und 90°.
b) In beiden Dreiecken sind die Winkel 72°, 72° und 36°.

Aufgabe 24

a) Mittels Winkelsummen sieht man, dass alle Dreiecke die gleichen Winkel besitzen und daher ähnlich sind.
b) $\overline{BF} = \frac{9}{4}$ cm, $\overline{CF} = 1{,}75$ cm, $\overline{CG} = \frac{21}{16}$ cm, $\overline{GD} = \frac{75}{16}$ cm.
c) I : II : III : IV = 4 : 3 : 1,75 : 3,75 = 16 : 12 : 7 : 15



Aufgabe 25

Die Dreiecke AFD und EDC stimmen in zwei Winkeln (jeweils Wechselwinkel an geschnitten Parallelen) überein und sind daher ähnlich. Daher ist $\frac{y}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CD}}{x} \Leftrightarrow x \cdot y = \overline{AD} \cdot \overline{CD}$ = konstant

Aufgabe 26

Da die Dreiecke ACD, ECD und AED in allen Winkeln übereinstimmen, sind sie ähnlich. Daher gilt $\frac{x}{z} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow z = \sqrt{2}\,x$ und ebenso $\frac{z}{y} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow z = \frac{y}{\sqrt{2}}$. Gleichsetzen ergibt $\sqrt{2}\,x = \frac{y}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y = 2x$.

Aufgabe 27

Wenn man das Dreieck ABC am Zentrum C um den Faktor $k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ streckt, erhält man das Dreieck A’B’C’.

Aufgabe 28

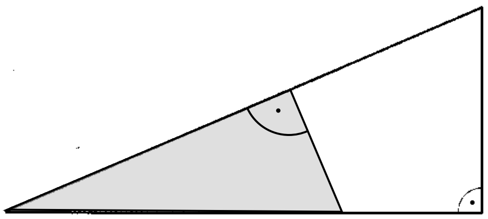
Die Dreiecke ABD und AEC stimmen in allen Winkeln übereil und sind daher ähnlich. Daher gilt $h_b : h_c = c : b$.

Aufgabe 29

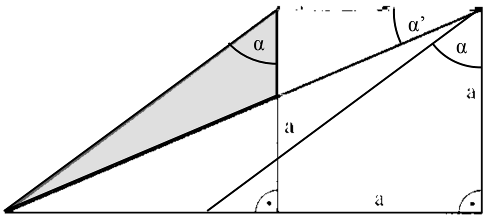
a) Ja, denn die beiden Dreiecke stimmen in allen Winkeln überein.

b) Nein, denn z.B. durch Ergänzung zu einem Parallelogramm sieht man, dass die beiden sich entsprechenden mittleren Winkel verschieden sind $\alpha > \alpha'$.

a)



b)

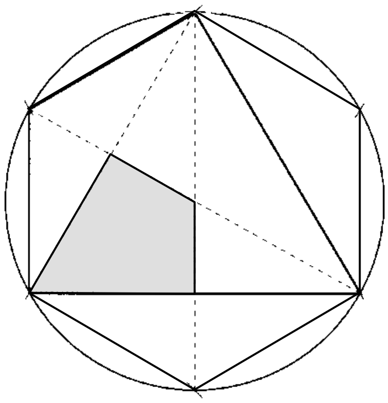


Aufgabe 30

a) Ja, denn aus der angedeuteten Konstruktion sieht man, dass es sich um einen Teil eines **regelmäßigen Sechseckes** handelt. Die Innenwinkel in beiden Vierecken sind also 90°, 120°, 90° und 60°. Der Streckfaktor ist k = 2

b) Ja, denn aus der angedeuteten Konstruktion sieht man wieder, dass es sich um einen Teil **zweier regelmäßige Sechsecke** handelt. Die Innenwinkel in beiden Vierecken sind also 90°, 120°, 90° und 60°. Der Streckfaktor ist k = 1,5

a)



b)