

2 Ausmultiplizieren und Ausklammern

„Da gehe ich doch lieber zum Metzger!“



Beim Umformen von Termen wird häufig das Distributivgesetz angewendet.

Das Produkt $x \cdot (y + 5)$ kann man durch **Ausmultiplizieren** als Summe schreiben:

$$x \cdot (y + 5) = x \cdot y + x \cdot 5 = x \cdot y + 5 \cdot x$$

Umgekehrt kann man die Summe $r^2 + rs$ durch **Ausklammern** als Produkt schreiben.

$$r^2 + rs = r \cdot r + r \cdot s = r \cdot (r + s)$$

Im Produkt $x \cdot (y + 5)$ ist der Faktor $(y + 5)$ eine Summe.

In einem Produkt können auch beide Faktoren Summen sein. In Fig. 1 ist das Produkt $(a + b) \cdot (c + d)$ als Flächeninhalt eines Rechtecks veranschaulicht. Dieses Rechteck wird schrittweise in die vier Teilflächen $a \cdot c$; $a \cdot d$; $b \cdot c$ und $b \cdot d$ zerlegt.

Die Terme $(a + b) \cdot (c + d)$ und $a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$ sind also gleichwertig (äquivalent).

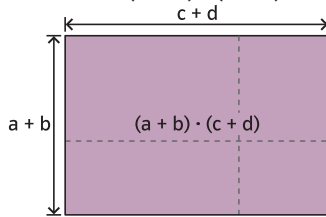


Fig. 1

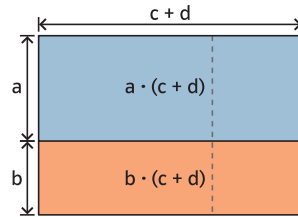


Fig. 2

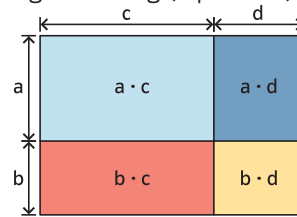


Fig. 3

Die Äquivalenz der Terme kann man auch rechnerisch bestätigen. Dazu wird das Distributivgesetz mehrfach angewendet. Man multipliziert das Produkt $(a + b) \cdot (c + d)$ schrittweise aus. Die erste Anwendung des Distributivgesetzes ergibt

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) \quad (\text{Fig. 2}).$$

Die beiden Summanden $a \cdot (c + d)$ und $b \cdot (c + d)$ sind Produkte. Diese können ebenfalls mithilfe des Distributivgesetzes als Summen geschrieben werden.

So erhält man $a \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d$ und $b \cdot (c + d) = b \cdot c + b \cdot d$ (Fig. 3).

Daraus ergibt sich

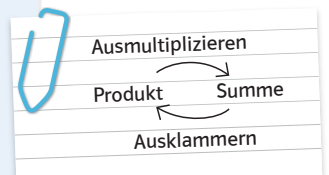
$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Ausmultiplizieren

Man multipliziert das Produkt zweier Summen aus, indem man jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multipliziert und dann die Produkte addiert.

Ausklammern

Haben die Summanden einer Summe einen gemeinsamen Faktor, so kann man diesen ausklammern. Dabei muss man jeden Summanden durch den gemeinsamen Faktor teilen.



Beispiel 1 Ausmultiplizieren

Schreibe als Summe.

a) $3a \cdot (5 + 4b)$

b) $(4 + x) \cdot (3x + 2)$

c) $12 - (2x + 3) \cdot (2x - 3)$

Lösung

$$\begin{aligned} \text{a) } 3a \cdot (5 + 4b) \\ &= 3a \cdot 5 + 3a \cdot 4b \\ &= 15a + 12ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (4 + x) \cdot (3x + 2) \\ &= 4 \cdot 3x + 4 \cdot 2 + x \cdot 3x + x \cdot 2 \\ &= 12x + 8 + 3x^2 + 2x \\ &= 3x^2 + 12x + 2x + 8 \\ &= 3x^2 + 14x + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 12 - (2x + 3) \cdot (2x - 3) \\ &= 12 - (4x^2 - 6x + 6x - 9) \\ &= 12 - (4x^2 - 9) \\ &= 12 - 4x^2 + 9 \\ &= -4x^2 + 21 \end{aligned}$$

Beispiel 2 Ausklammern

Schreibe als Produkt.

a) $7b - 9b^2$

b) $3x^2 + 6x$

c) $12x^2 + 4x$

Lösung

$$\begin{aligned} \text{a) } 7b - 9b^2 \\ &= 7 \cdot b - 9b \cdot b \\ &= b \cdot (7 - 9b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3x^2 + 6x \\ &= 3x \cdot x + 3x \cdot 2 \\ &= 3x \cdot (x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 12x^2 + 4x \\ &= 3x \cdot 4x + 1 \cdot 4x \\ &= 4x \cdot (3x + 1) \end{aligned}$$

Aufgaben**1** Multipliziere aus.

a) $(a + b) \cdot 2$

b) $2,5 \cdot (e - f)$

c) $\frac{1}{2} \cdot (r^2 + s^2)$

d) $(x + y) \cdot (-1)$

e) $(x^2 - y) \cdot (-2)$

f) $(-3,2) \cdot (5xy - 1)$

g) $(2 \cdot (5x^2 - 8z)) \cdot 3$

h) $(ab + b) \cdot 3b$

i) $4x \cdot (a + 3b)$

j) $(3u - \frac{v}{2}) \cdot w$

k) $(-p - q) \cdot (-r)$

l) $(x \cdot (2x + 3y)) \cdot 5$

m) $(p - q + 2r) \cdot r$

n) $(-u) \cdot (u - uv + w)$

o) $(x^2 + 2xy - y^2) \cdot y$

p) $\frac{k}{2} \cdot (4k - 3u + 6ku)$

q) $3 \cdot (x + 2y) \cdot z$

r) $5 \cdot (2a - b) + c$

s) $2d - 3e \cdot (4e + 3f)$

t) $5t^2 + (2w - t) \cdot r$

u) $(2x - y) \cdot 3 - (2a - 3)$

v) $x \cdot (2x \cdot 3y) + (x + y) \cdot 2$

w) $(5 - 3) \cdot (7x - 3c)$

x) $3 - (5n - 7m) \cdot 4x + y$

2 Löse die Klammern auf und fasse so weit wie möglich zusammen.

a) $3x + 4 \cdot (1 - x) - (x - 2)$

b) $3 \cdot (2r - s) - (4s - 1,5r) + 10r$

c) $2a - 6 \cdot (2b - 3a) + 4 \cdot (3b - 5a)$

d) $x - y \cdot (2 - x) + 2xy$

e) $(-x - y) \cdot z - 2z \cdot (-x + y)$

f) $-9x \cdot (-3y + 5z) + (-7y - 6z) \cdot 5x$

3 Multipliziere aus und fasse so weit wie möglich zusammen.

a) $(x + 5) \cdot (3x + 1)$

b) $(3 + 2s) \cdot (s - 4)$

c) $(4a - 5) \cdot (3a + 7)$

d) $(b - 3) \cdot (b - 5)$

e) $(2a + b) \cdot (b + 8c)$

f) $(v + 5w) \cdot (2s + 7)$

g) $(4 - 6p) \cdot (q + 5p)$

h) $(5x + 3y)(x - 6y)$

i) $(a + 7) \cdot (b + 8)$

j) $3 \cdot (v + 5) \cdot (s + 2)$

k) $(5 + p) \cdot (q + 6)$

l) $(4 + r) \cdot 5 \cdot (t + 6)$

m) $(b - c) \cdot (c - b) + c^2$

n) $ab - (a - b)(a + b)$

o) $(c - 5)^2$

4 Klammere aus.

a) $ax - ay$

b) $by - 24y$

c) $18x^2 - 9y^2$

d) $5v^2 - 4uv$

e) $9a - 6b + 12c$

f) $5a + 24ab - a^2$

g) $u \cdot 4 - 8vu^2 + 32u^2$

h) $6x^2y - 9y^2x + 3xy$

i) $a(3 - x) + b(3 - x)$

j) $(a + b)c - (a + b)d$

k) $(s + t) \cdot 5 - (t + s)a$

l) $(t + 3) \cdot 4 + a(t + 3)$

5 Schreibe als Produkt.

a) $7u - 14v$

b) $16x^2 - 24y^2$

c) $by + 2y$

d) $by - b$

e) $x - x^2$

f) $v^2 - uv$

g) $6rt - 3rs$

h) $\frac{1}{2}rs + s^2t$

i) $7xy - 14xs + 49ax$

j) $5b^3 + 10b^2 - 25b$

k) $6az^3 - 3az^2 + 9az$

l) $2x^2y - 4x^3y + 3x^2$