Aufgabe A1

Gib an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

a) Die Nullhypothese ist die Vermutung, die man testen möchte.

b) Durch den Test findet man heraus, ob die Nullhypothese wahr ist.

c) Wenn das Ergebnis der Stichprobe außerhalb des Annahmebereiches liegt, wird die Nullhypothese verworfen.

d) Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass man die Nullhypothese beibehält, obwohl sie falsch ist.

e) Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsvariable bei gültiger Nullhypothese in den Ablehnungsbereich fällt.

f) Das Signifikanzniveau gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Nullhypothese falsch ist.

Aufgabe A2

Lina hat im Internet gelesen, dass beim Werfen eines Reißnagels die Wahrscheinlichkeit, dass er mit der Spitze nach oben landet, $80\,\%$ beträgt. Sie glaubt, dass dieser Wert zu hoch ist. Um dies zu überprüfen, führt sie einen Signifikanztest mit einem Stichprobenumfang von 200 und einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ durch. Bestimme den Ablehnungsbereich des Tests sowie die tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit.

Aufgabe A3

Ein Unternehmen bezieht Metallteile von einem Zulieferer. Laut Liefervertrag kann das Unternehmen die Lieferung ablehnen, wenn mehr als $2\,\%$ der Teile defekt sind. Das Unternehmen glaubt bei einer Lieferung, dass es mehr sind. Es führt einen Signifikanztest mit einem Stichprobenumfang von 400 und einem Signifikanztest von $5\,\%$ durch.

a) Bestimme die Null- und Alternativhypothese und den Annahmebereich des Tests.

b) Welche Entscheidung trifft das Unternehmen, wenn bei der Stichprobe 12 Teile defekt sind?

Aufgabe A4

Nach einer Umfrage sind $85\,\%$ der Deutschen für ein Tempolimit auf Autobahnen. Ein Automobilclub bezweifelt dies und behauptet, dass es in Wirklichkeit weniger sind. Eine Umweltorganisation glaubt dagegen, dass es noch mehr sind.

Beide wollen mithilfe eines Signifikanztests die Nullhypothese $H_0: p = 0{,}85$ testen. Der Stichprobenumfang soll 2000 und das Signifikanzniveau $5\,\%$ betragen.

a) Gib die Alternativhypothese und den Annahmebereich des Tests an, den der Automobilclub durchführt.

b) Gib die entsprechenden Antworten für den Test der Umweltorganisation.

c) Bei welchen der folgenden Stichprobenergebnissen verwerfen der Automobilclub bzw. die Umweltorganisation die Nullhypothese?

A: 1600 B: 1674 C: 1700 D: 1750 E: 1800

d) Gibt es ein Stichprobenergebnis, bei dem beide die Nullhypothese verwerfen? Begründe deine Antwort.

Lösung A1

Klausuraufschrieb

a) Die Aussage ist falsch. Mit dem Hypothesentest wird die Vermutung der Alternativhypothese (H_1) getestet.
b) Die Aussage ist falsch. Man kann durch den Test nicht herausfinden, ob die Nullhypothese richtig oder falsch ist.
c) Die Aussage ist richtig. Dies ist das Prinzip des Annahme- bzw. des Ablehnungsbereichs.
d) Die Aussage ist falsch. Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der man die Nullhypothese verwirft, obwohl sie richtig ist (Fehler der 1. Art).
e) Die Aussage ist richtig.
f) Die Aussage ist falsch. Das Signifikanzniveau ist die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit dafür, dass man die Nullhypothese verwirft, obwohl sie richtig ist (Fehler der 1. Art).

Lösung A2

Lösungslogik

Die Nullhypothese ist $H_0\colon\ p_0 = 0{,}8$, die Gegenhypothese $H_1\colon\ p_1 < 0{,}8$, das Signifikanzniveau $\alpha = 5\ \%$, der Stichprobenumfang $n = 200$.
Linksseitiger Test mit einem Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0; 1; 2; \dots; k\}$ mit k als größter natürlicher Zahl.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Reißnägel, die mit der Spitze nach oben landen und ist $B_{200;0,8}$-verteilt.

Klausuraufschrieb GTR

GTR-Einstellungen
Y1:$binomcdf(200, .8, X)$
$H_0\colon\ p_0 = 0{,}8;\ n = 200$, X ist $B_{200;0,8}$–verteilt.
Linksseitiger Test mit $H_1\colon\ p_1 < 0{,}8;\ \ \alpha = 0{,}05$
$\overline{A} = \{0; 1; 2; \dots; k\}$

$B_{200;0,8}(X \le k) \le 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad k \overset{\text{GTR}}{=} 150$
$\overline{A} = \{0; 1; 2; \dots; 150\}$

$B_{200;0,8}(X \le 150) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}04935$
Wenn höchstens 150 Reißnägel mit der Spitze nach oben fallen, wird die Nullhypothese abgelehnt. Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt dann etwa $4.9\ \%$.

Klausuraufschrieb WTR

$H_0\colon\ p_0 = 0{,}8;\ n = 200$, X ist $B_{200;0,8}$–verteilt.
Linksseitiger Test mit $H_1\colon\ p_1 < 0{,}8;\ \ \alpha = 0{,}05$
$\overline{A} = \{0; 1; 2; \dots; k\}$
$B_{200;0,8}(X \le k) \le 0{,}05$
Bestimmung des Startwertes für k:
$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}8 = 160$
$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)} = \sqrt{160 \cdot 0{,}2} \approx 5$
$B_{200;0,8}(X \le k) \le 0{,}05$ liegt etwa im $1{,}6\sigma$-Bereich
$\mu - 1{,}5\sigma = 160 - 8 = 152$ | $\mu - 1{,}5\sigma$ wegen linksseitigem Test

Lösung A1

Wir starten mit $k = 152$.

$B_{200;0,8}(X \leq 152) \approx 0{,}0944$ $\qquad$ $B_{200;0,5}(X \leq 151) \approx 0{,}0690$

$B_{200;0,8}(X \leq 150) \approx 0{,}0493$

$k = 150;\ \overline{A} = \{0; 1; 2; \dots; 150\}$

Wenn höchstens 150 *Reißnägel mit der Spitze nach oben fallen, wird die Nullhypothese abgelehnt. Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt dann etwa* $4.9\,\%$.

Lösung A3

Lösungslogik

Die Nullhypothese ist $H_0\colon\ p_0 = 0{,}02$, die Gegenhypothese $H_1\colon\ p_1 > 0{,}02$, das Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$, der Stichprobenumfang $n = 400$.

Rechtsseitiger Test mit einem Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{k; k+1; k+2; \dots; 400\}$ mit k als kleinster natürlicher Zahl.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Metallteile, die defekt sind und ist $B_{400;0,02}$-verteilt.

Klausuraufschrieb GTR

GTR-Einstellungen

Y1: $1 - binomcdf(400, .02, X - 1)$

a) $H_0\colon\ p_0 = 0{,}02;\ n = 400$, X ist $B_{400;0,02}$–verteilt.
Rechtsseitiger Test mit $H_1\colon\ p_1 > 0{,}02;\ \ \alpha = 0{,}05;\ \ \overline{A} = \{k; k+1; k+2; \dots; 400\}$

$B_{400;0,02}(X \geq k) = 1 - B_{400;0,02}(X \leq k-1) \leq 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad k \overset{GTR}{=} 14$

$\overline{A} = \{14; 15; 16; \dots; 400\} \qquad A = \{0; 1; 2; \dots; 13\}$

b) Wenn bei der Stichprobe 12 Teile defekt sind, wird das Unternehmen die Nullhypothese annehmen.
$B_{400;0,02}(X \leq 12) \approx 0{,}93814$
$1 - 0{,}93814 = 0{,}06186$
Die Irrtumswahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese dennoch nicht stimmt beträgt dann etwa $6{,}2\,\%$ (Fehler der 2. Art).

Klausuraufschrieb WTR

a) $H_0\colon\ p_0 = 0{,}02;\ n = 400$, X ist $B_{400;0,02}$–verteilt.
Rechtsseitiger Test mit $H_1\colon\ p_1 > 0{,}02;\ \ \alpha = 0{,}05;\ \ \overline{A} = \{k; k+1; k+2; \dots; 400\}$
$B_{400;0,02}(X \geq k) = 1 - B_{400;0,02}(X \leq k-1) \leq 0{,}05$
$-B_{400;0,02}(X \leq k-1) \leq -0{,}95 \qquad | \quad \cdot(-1)$
$B_{400;0,02}(X \leq k-1) \geq 0{,}95$
Bestimmung des Startwertes für $k - 1$:
$\mu = n \cdot p = 400 \cdot 0{,}02 = 8$
$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)} = \sqrt{8 \cdot 0{,}98} \approx 3$
$B_{400;0,02}(X \leq k-1) \geq 0{,}95$ liegt etwa im $1{,}6\sigma$-Bereich
$\mu + 1{,}5\sigma = 8 + 4{,}5 = 12 \qquad | \quad \mu + 1{,}5\sigma$ wegen rechtsseitigem Test
Wir starten mit $k - 1 = 12$.
$B_{400;0,02}(X \leq 12) \approx 0{,}9381 \qquad B_{400;0,02}(X \leq 13) \approx 0{,}9673$
$k - 1 = 13$
$k = 14$
$\overline{A} = \{14; 15; 16; \dots; 400\} \qquad A = \{0; 1; 2; \dots; 13\}$

b) Wenn bei der Stichprobe 12 Teile defekt sind, wird das Unternehmen die Nullhypothese annehmen.
$B_{400;0,02}(X \leq 12) \approx 0{,}93814$
$1 - 0{,}93814 = 0{,}06186$
Die Irrtumswahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese dennoch nicht stimmt beträgt dann etwa $6{,}2\,\%$ (Fehler der 2. Art).

Lösung A4

Lösungslogik

Die Nullhypothese ist sowohl für den Automobilclub als auch für die Umweltorganisation $H_0\colon\ p_0 = 0{,}85$. In beiden Fällen wird eine Stichprobe unter Autofahrern mit einem Signifikanzniveau von durchgeführt.

a) Der Automobilclub glaubt, dass es weniger als $85\,\%$ sind. Somit ist die Gegenhypothese $H_1\colon\ p_1 < 0{,}85$. Dies führt zu einem linksseitigen Test.

b) Der Umweltorganisation glaubt, dass es mehr als $85\,\%$ sind. Somit ist die Gegenhypothese $H_1\colon\ p_1 > 0{,}85$. Dies führt zu einem rechtsseitigen Test.

Klausuraufschrieb GTR

a) GTR-Einstellungen
Y1:$binomcdf(2000, .85, X)$
$H_0\colon\ p_0 = 0{,}85;\ n = 2000$, X ist $B_{2000;0,85}$–verteilt.
Linksseitiger Test mit $H_1\colon\ p_1 < 0{,}85;\ \ \alpha = 0{,}05$
$\overline{A} = \{0; 1; 2; \ldots; k\}$

$B_{2000;0,85}(X \leq k) \leq 0{,}05 \Rightarrow k \overset{\text{GTR}}{=} 1673$
$\overline{A} = \{0; 1; 2; \ldots; 1673\};\quad A = \{1674; 1675; 1676; \ldots; 2000\}$

b) GTR-Einstellungen
Y1:$1 - binomcdf(2000, .85, X - 1)$
$H_0\colon\ p_0 = 0{,}85;\ n = 2000$, X ist $B_{2000;0,85}$–verteilt.
Rechtsseitiger Test mit $H_1\colon\ p_1 > 0{,}85;\ \ \alpha = 0{,}05$
$\overline{A} = \{k; k+1; k+2; \ldots; 2000\}$

$B_{2000;0,85}(X \geq k) = 1 - B_{2000;0,85}(X \leq k-1) \leq 0{,}05 \Rightarrow k \overset{\text{GTR}}{=} 1727$
$\overline{A} = \{1727; 1728; 1729; \ldots; 2000\};\quad A = \{0; 1; 2; \ldots; 1726\}$

c) A: 1600 : Liegt im Ablehnungsbereich des Automobilclubs.
B: 1674 : Liegt im Annahmebereich sowohl des Automobilclubs als auch der Umweltorganisation.
C: 1700 : Liegt im Annahmebereich sowohl des Automobilclubs als auch der Umweltorganisation.
D: 1750 : Liegt im Ablehnungsbereich der Umweltorganisation.
E: 1750 : Liegt im Ablehnungsbereich der Umweltorganisation.
Der Automobilclub bzw. die Umweltorganisation verwerfen die Nullhypothese bei den Ergebnissen A, D und E.

d) Es gibt kein Stichprobenergebnis, bei dem beide Organisationen die Nullhypothese verwerfen, da sich die beiden Ablehnungsbereiche nicht überschneiden (was auch logisch nicht möglich wäre).

Klausuraufschrieb WTR

a) H_0: $p_0 = 0{,}85$; $n = 2000$, X ist $B_{2000;0,85}$–verteilt.
Linksseitiger Test mit H_1: $p_1 < 0{,}85$; $\alpha = 0{,}05$
$\overline{A} = \{0; 1; 2; \dots; k\}$
$B_{2000;0,85}(X \leq k) \leq 0{,}05$
Bestimmung des Startwertes für k:
$\mu = n \cdot p = 2000 \cdot 0{,}85 = 1700$
$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)} = \sqrt{1700 \cdot 0{,}15} \approx 16$
$B_{2000;0,85}(X \leq k) \leq 0{,}05$ liegt etwa im $1{,}5\sigma$-Bereich
$\mu - 1{,}5\sigma = 1700 - 24 = 1676$ | $\mu - 1{,}5\sigma$ wegen linksseitigem Test
Wir starten mit $k = 1676$.
$B_{2000;0,85}(X \leq 1676) \approx 0{,}0717$ $B_{2000;0,85}(X \leq 1675) \approx 0{,}06365$
$B_{2000;0,85}(X \leq 1674) \approx 0{,}0635$ $B_{2000;0,85}(X \leq 1673) \approx 0{,}0497$
$k = 1673$
$\overline{A} = \{0; 1; 2; \dots; 1673\}$; $A = \{1674; 1675; 1676; \dots; 2000\}$

b) H_0: $p_0 = 0{,}85$; $n = 2000$, X ist $B_{2000;0,85}$–verteilt.
Rechtsseitiger Test mit H_1: $p_1 > 0{,}85$; $\alpha = 0{,}05$
$\overline{A} = \{k; k+1; k+2; \dots; 2000\}$
$B_{2000;0,85}(X \geq k) = 1 - B_{2000;0,85}(X \leq k-1) \leq 0{,}05$
$-B_{2000;0,85}(X \leq k-1) \leq -0{,}95$ | $\cdot(-1)$
$B_{2000;0,85}(X \leq k-1) \geq 0{,}95$
Bestimmung des Startwertes für $k-1$:
$\mu = n \cdot p = 2000 \cdot 0{,}85 = 1700$
$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)} = \sqrt{1700 \cdot 0{,}15} \approx 16$
$B_{2000;0,85}(X \leq k-1) \geq 0{,}95$ liegt etwa im $1{,}5\sigma$-Bereich
$\mu + 1{,}5\sigma = 1700 + 24 = 1724$ | $\mu + 1{,}5\sigma$ wegen rechtsseitigem Test
Wir starten mit $k = 1724$.
$B_{2000;0,85}(X \leq 1724) \approx 0{,}9388$ $B_{2000;0,85}(X \leq 1725) \approx 0{,}9462$
$B_{2000;0,85}(X \leq 1726) \approx 0{,}9528$
$k - 1 = 1726$
$k = 1727$
$\overline{A} = \{1727; 1728; 1729; \dots; 2000\}$; $A = \{0; 1; 2; \dots; 1726\}$

c) A: 1600 : Liegt im Ablehnungsbereich des Automobilclubs.
B: 1674 : Liegt im Annahmebereich sowohl des Automobilclubs als auch der Umweltorganisation.
C: 1700 : Liegt im Annahmebereich sowohl des Automobilclubs als auch der Umweltorganisation.
D: 1750 : Liegt im Ablehnungsbereich der Umweltorganisation.
E: 1750 : Liegt im Ablehnungsbereich der Umweltorganisation.
Der Automobilclub bzw. die Umweltorganisation verwerfen die Nullhypothese bei den Ergebnissen A, D und E.

d) Es gibt kein Stichprobenergebnis, bei dem beide Organisationen die Nullhypothese verwerfen, da sich die beiden Ablehnungsbereiche nicht überschneiden (was auch logisch nicht möglich wäre).