Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

Überblick

Die vorliegenden Extremwertaufgaben sind Textaufgaben, meist mit Zeichnungen versehen, bei denen die Frage gestellt wird, unter welchen Bedingungen ein Wert (z.B. Abstand, Länge, Fläche, Volumen) am größten oder am kleinsten ist.
Um diese Werte berechnen zu können, ist zum gegebenen Sachverhalt eine Funktionsgleichung (Zielfunktion) aufzustellen, in der alle notwendigen Größen sinnvoll eingebracht sind.

Wenn in der Aufgabenstellung also nach einer größten Fläche gefragt wird, muss mit der Zielfunktion eben diese Fläche berechnet werden.

Für die Lösungen der nachfolgenden Aufgaben wird keine höhere Mathematik, also Differenzialrechnung (Ableitung) herangezogen. Genau genommen, benötigt man noch nicht einmal einen Taschenrechner, vorausgesetzt, man beherrscht die Grundrechenarten im Kopf oder notfalls mit einem Stift und Zettel.

Es geht bei den meisten der folgenden Aufgaben darum, den Scheitel(punkt) einer quadratischen Gleichung zu bestimmen und zu erkennen bzw. abzulesen, ob es sich beim Extremwert um ein Maximum oder ein Minimum handelt.

Kurzanleitung zur Lösung von Extremwertaufgaben

a) Falls möglich, sollte eine Skizze des Sachverhaltes mit allen Konstanten und Variablen angelegt bzw. erweitert werden.

b) Zielfunktion ermitteln, d.h. eine mathematische Gleichung aufstellen mit der Größe, die einen Extremwert annehmen soll und den Variablen bzw. Konstanten.

c) Nebenbedingung(en) aufstellen, d.h. eine Gleichung mit allen Variablen.

d) Die Gleichung der Nebenbedingung(en) so nach einer Variablen umstellen, so dass sie in die Zielfunktion eingesetzt werden kann.

e) Durch Umformungen der Zielfunktion den Extremwert gewinnen
(Zahl, Länge, Fläche, Volumen)

Notwendige mathematische Grundkenntnisse zur Lösung der folgenden Aufgaben:

- Flächenformeln für Dreiecke, Quadrat, Rechteck,
- Satz des Pythagoras,
- Lösen quadratischer Gleichungen,
- quadratische Ergänzung (Parabelfunktion) und Scheitelwert,
- Geradengleichungen aufstellen,
- Vierstreckensatz / Strahlensatz,
- Substitution und trigonometrische Grundkenntnisse.

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

Neben den hier vorgestellten Extremwertproblemen gibt es noch viele weitere Aufgabentypen aus den Gebieten Technik, Physik, Wirtschaft, usw.

Weiteres Übungsmaterial auf meiner Webseite www.mathe-physik-aufgaben.de:

RM_AU003 Raumgeometrie - Prisma (Würfel, Quader); funktionale Abhängigkeiten

RM_AU007 Raumgeometrie – gerade Pyramide; funktionale Abhängigkeiten

RM_AU011 Raumgeometrie – schiefe Pyramide; funktionale Abhängigkeiten

RM_AU015 Raumgeometrie – Zylinder, Kegel; funktionale Abhängigkeiten

RM_AU020 Raumgeometrie – Zylinder, Kegel, Kugel; funktionale Abhängigkeiten

RM_AU027 Raumgeometrie – ebene Schnitte; funktionale Abhängigkeiten

RM_AU044 Trigonometrie – Funktionale Abhängigkeiten an Dreiecken

Extremwertaufgaben

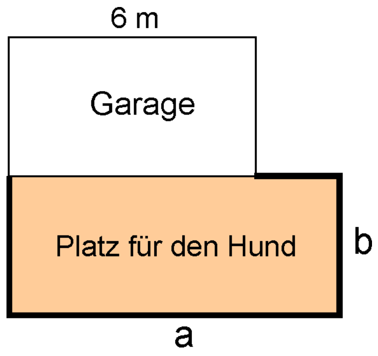
Klassen 8 bis 10

1. Aus einem Draht der Länge 60 cm soll ein Rechteck gebogen werden, das eine Fläche von maximalem Inhalt umrandet. Bestimme die Fläche des größten Rechtecks. Wie sind seine Länge und Breite zu wählen?

---

2. Franz möchte mit 34 m Maschendraht einen rechteckigen Platz für seinen Hund einzäunen. Die eingezäunte Fläche grenzt an eine 6 m lange Garage (siehe Skizze).

Stelle einen Term für den Flächeninhalt des Rechtecks in Abhängigkeit einer Seitenlänge (a oder b) auf, und bestimme die Maße des Rechtecks mit dem größten Flächeninhalt.



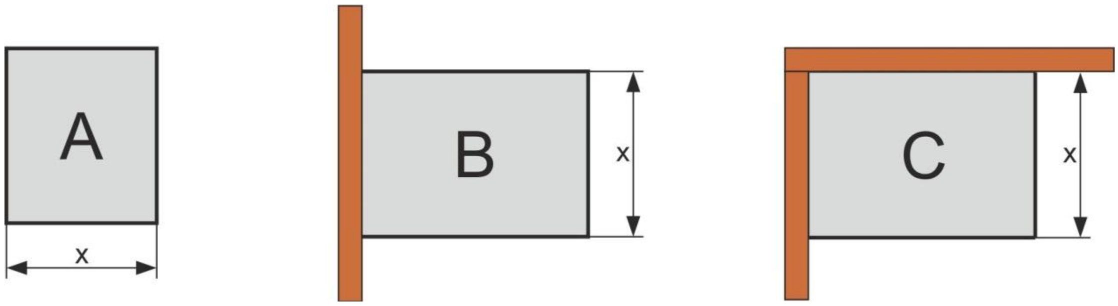
3.0 Emma hat im Baumarkt 12 m Haustierzaun gekauft, um für ihre Schildkröten im Garten ein Freigehege abzugrenzen. Den Tieren soll eine möglichst große rechteckige Fläche zur Verfügung stehen.

Emma hat drei Möglichkeiten zur Auswahl, um das Freigehege anzulegen:

a) Das Gehege ist völlig freistehend.

b) Eine Seite des Geheges grenzt an eine Mauer.

c) Zwei Seiten grenzen an eine Mauer



Hinweis: Dort wo das Gehege an eine Mauer angrenzt ist kein Zaun notwendig!

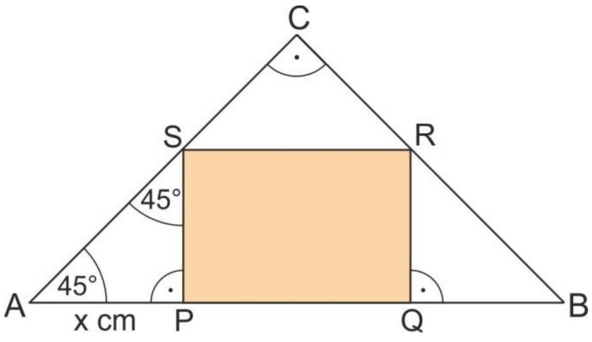
3.1 Stelle für die Varianten A, B und C jeweils einen Term auf, der die Fläche des Rechtecks in Abhängigkeit von x beschreibt.

3.2 Bestimme für jede der drei Varianten den maximalen Flächeninhalt und gib dabei die Belegung für x an.

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

4. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig rechtwinklig mit der Basis $\overline{AB} = 18\text{ cm}$.
Es werden Rechtecke PQRS einbeschrieben mit $\overline{PQ} \in \overline{AB}$ (siehe Abb.)
Die Strecke $\overline{AP}$ ist x cm lang.

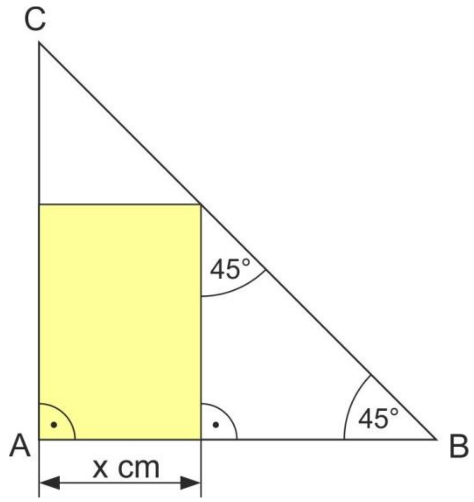


a) Gib einen Term an, der die Fläche der Rechtecke in Abhängigkeit von x beschreibt.

b) Ermittle für das flächengrößte Rechteck den Wert für x.

---

5. Gegeben ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\overline{AB} = \overline{AC} = 8\text{ cm}$.
Diesem Dreieck lassen sich beliebig viele Rechtecke einbeschreiben (siehe Skizze).



a) Bestimme den Flächeninhalt der Rechtecke in Abhängigkeit von x.

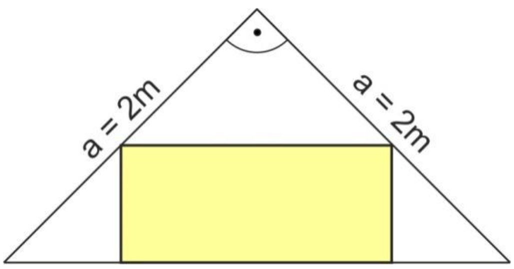
b) Bestimme den maximalen Flächeninhalt und den zugehörigen x-Wert.

---

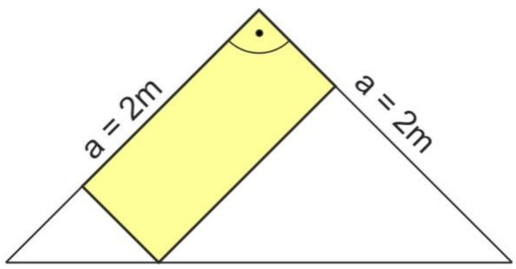
6. Aus einem Blech, das die Form eines halben Quadrates mit der Seitenlänge $a = 2\text{ m}$ hat, soll ein möglichst großes Rechteck herausgeschnitten werden.

Es stehen zwei Varianten zur Auswahl. Berechne jeweils den maximalen Flächeninhalt des Rechtecks.

a)



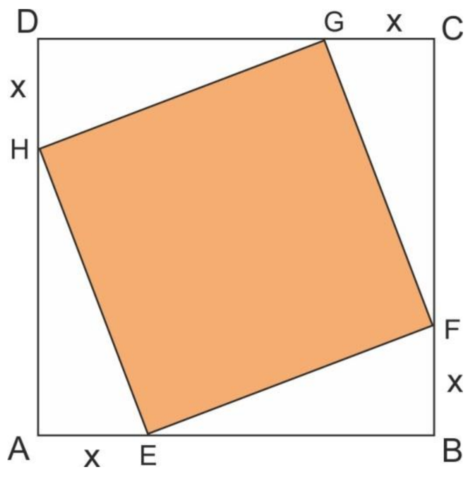
b)



Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

7. Gegeben ist das Quadrat ABCD mit dem Flächeninhalt $1\,m^2$. Von jedem Eckpunkt aus wird für jede Seite entgegen dem Uhrzeigersinn (linksherum) die Strecke x abgetragen.
Dadurch entstehen neue Quadrate $E_nF_nG_nH_n$.
Es gilt: $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x$ (vgl. Skizze).

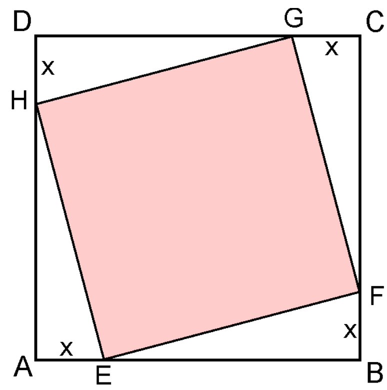


a) Bestimme den Flächeninhalt der neuen Quadrate $E_nF_nG_nH_n$ in Abhängigkeit von x. Welche Werte sind für x sinnvoll?

b) Berechne die Seitenlänge des kleinsten Quadrates und gib seinen Flächeninhalt an.

---

8. Gegeben ist ein Quadrat ABCD mit $\overline{AB} = 10$.
Von den vier Ecken aus werden jeweils Strecken x abgetragen, sodass neue Quadrate EFGH entstehen.
Es gilt: $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x$



a) Bestimme den Flächeninhalt des Quadrates EFGH in Abhängigkeit von x.

b) Berechne die Seite des kleinsten Quadrates. Gib den minimalsten Flächeninhalt an.

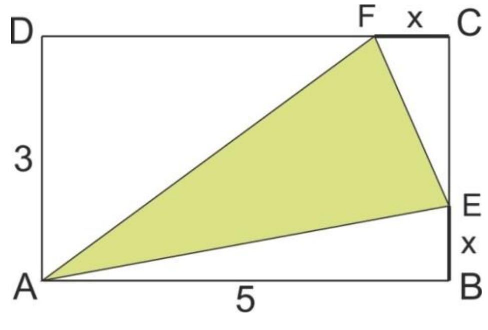
---

9. In das Rechteck ABCD mit den Seitenlängen 3 und 5 ist ein Dreieck AEF einbeschrieben.

Stelle einen Term für den Flächeninhalt des Dreiecks AEF in Abhängigkeit von x auf (vgl. nebenstehende Skizze).

Für welches x ist der Flächeninhalt minimal?

Gib diesen minimalen Flächeninhalt an.



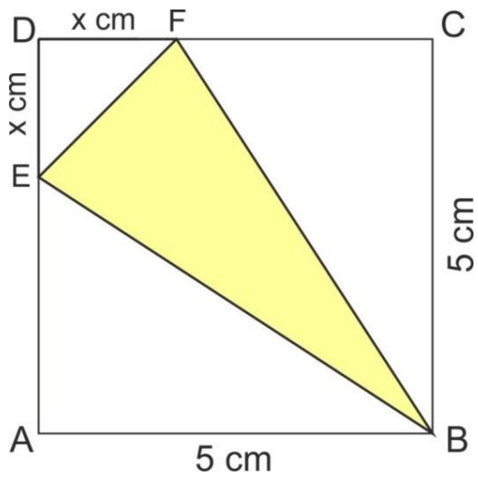
Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

10. Das Quadrat ABCD hat eine Seitenlänge von 5 cm. Trägt man von der Ecke D jeweils x cm ab, so erhält man die Punkte E und F (vgl. nebenstehende Skizze).

a) Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks BEF in Abhängigkeit von x.

b) Berechne, für welchen x-Wert das Dreieck den größten Flächeninhalt hat und gib diesen Wert an.



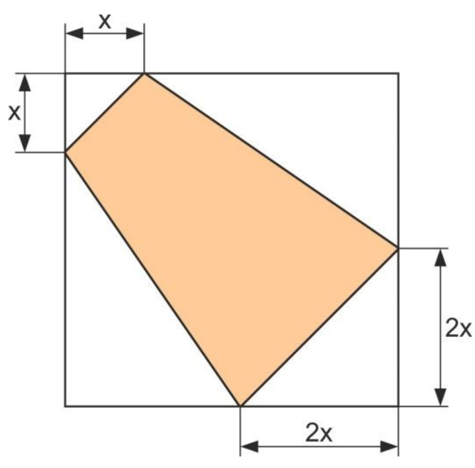
---

11. Einem Quadrat mit dem Flächeninhalt 144 cm^2 werden Trapeze einbeschrieben.
(Trapez einbeschreiben heißt, dass alle Eckpunkte des Trapezes genau auf Quadratseiten liegen.)
zulässiges Intervall für x: $0 < x \le 6$

a) Berechne die Flächeninhalte der Trapeze als Funktion von x.

b) Unter den Trapezen gibt es eines mit maximalem Flächeninhalt. Begründe dies.

c) Berechne den Wert für x, der das Trapez mit maximalem Inhalt liefert.

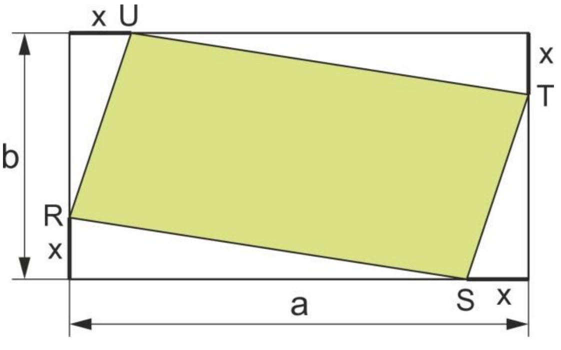


---

12. Auf den 4 Seiten eines Rechtecks mit den Längen $a = 8$ und $b = 4$ wird die Strecke x abgetragen (siehe nebenstehende Skizze).

a) Stelle einen Term auf für den Flächeninhalt des Parallelogramms RSTU in Abhängigkeit von x.

b) Für welches x ist der Flächeninhalt des Parallelogramms am kleinsten? Gib diesen Inhalt an.

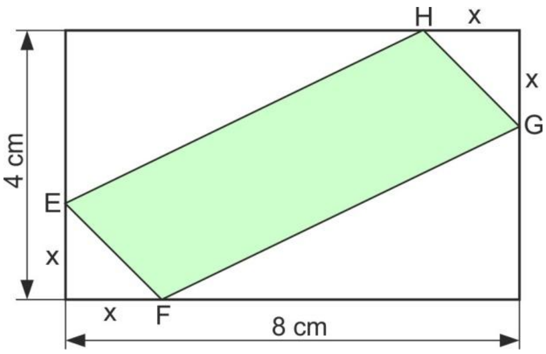


Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

13. Gegeben ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $8\,\text{cm}$ und $4\,\text{cm}$. Trägt man in zwei gegenüberliegenden Ecken jeweils die Strecken x ab, so erhält man das Parallelogramm EFGH (siehe Zeichnung).

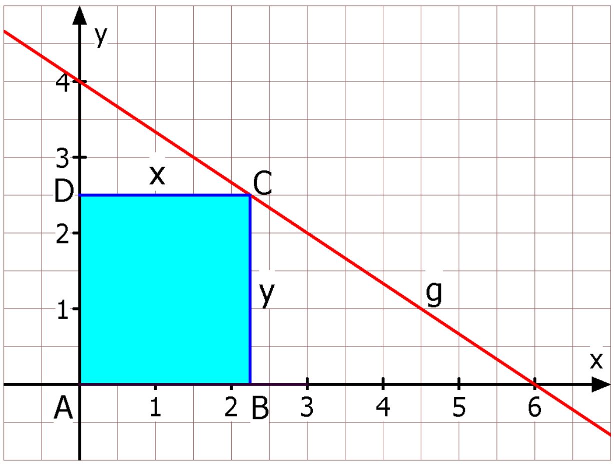
Für welchen x-Wert hat das Parallelogramm EFGH seinen größten Flächeninhalt?



---

14. Die Gerade g schneidet die y-Achse an der Stelle $(0\,|\,4)$ und die x-Achse an der Stelle $(6\,|\,0)$. Der Punkt C liegt auf der Geraden g und ist variabel.

Zeichnet man die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Punkt C, so entsteht das Rechteck ABCD (siehe nebenstehende Zeichnung).



a) Zeige, dass für den Flächeninhalt des Rechtecks gilt:

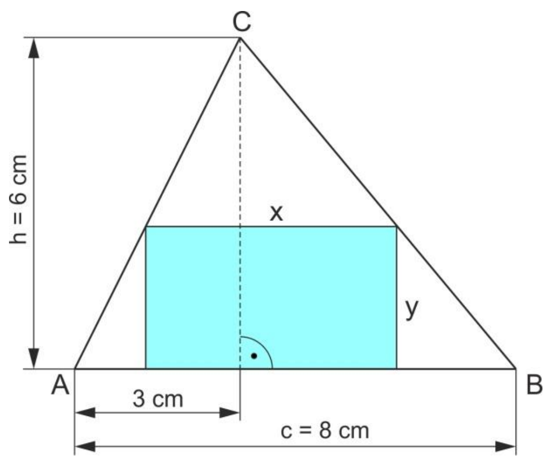
$$A(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x\,,\ \text{für}\ \ 0 < x < 6$$

b) Bestimme x so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks ABCD maximal wird. Gib diesen Maximalwert an.

---

15. In das Dreieck ABC mit der Grundseite $c = 8\,\text{cm}$ und der Höhe $h = 6\,\text{cm}$ soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt einbeschrieben werden.
Eine der Rechteckseiten liegt dabei auf der Grundseite c des Dreiecks (vgl. Skizze).

Wie lang sind die Seiten x und y des Rechtecks?



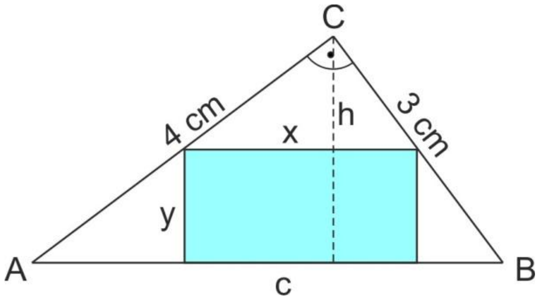
Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

16. Einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $a = 3\,\text{cm}$ und $b = 4\,\text{cm}$ wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass eine seiner Seiten auf der Hypotenuse c liegt.

a) Unter den Rechtecken gibt es eines mit maximaler Fläche. Berechne seine Seitenlängen x und y.

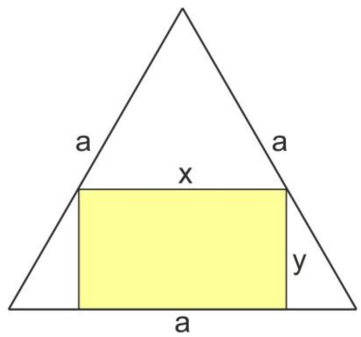
b) Je nach x-Wert nimmt das Rechteck eine andere Form an; auch der Sonderfall eines Quadrats kann auftreten. Berechne x so, dass dieser Sonderfall eintritt; d.h. $y = x$.



---

17. Einem gleichseitigen Dreieck (Seitenlänge $a = 10\,\text{cm}$) wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass eine der Rechteckseiten auf einer Dreiecksseite liegt (vgl. Skizze).

Wie lang sind die Seiten x und y des Rechtecks mit dem größten Flächeninhalt?



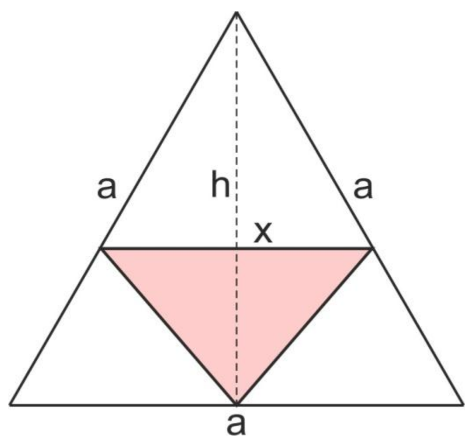
---

18. Einem gleichseitigen Dreieck mit dem Flächeninhalt $9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ werden gleichschenklige Dreiecke einbeschrieben (vgl. Skizze).

a) Stelle für die Flächeninhalte der einbeschriebenen Dreiecke einen Term in Abhängigkeit von der Grundlinie x auf.

b) Warum besitzt A(x) einen Extremwert?

c) Berechne die Belegung von x für den Extremwert. Wie groß ist die zugehörige einbeschriebene Dreiecksfläche?



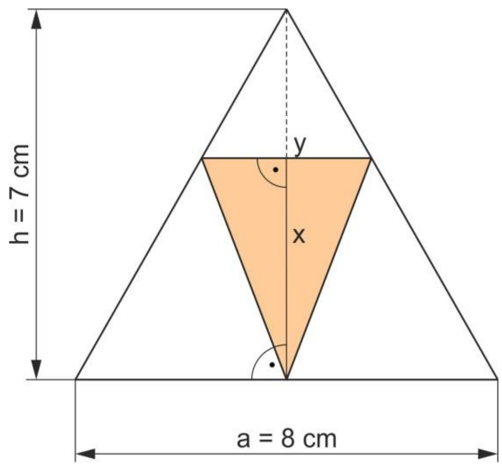
Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

19. Einem gleichschenkligen Dreieck mit der Grundlinie $a = 8\text{ cm}$ und der Höhe $h = 7\text{ cm}$ wird ein ebenfalls gleichschenkliges Dreieck einbeschrieben, dessen Spitze in der Mitte der Grundlinie a liegt.
Das einbeschriebene Dreieck hat die Grundlinie y und die Höhe x.

a) Bestimme den Flächeninhalt aller einbeschriebenen Dreiecke in Abhängigkeit von x

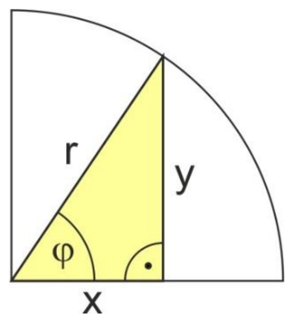
b) Wie groß ist die Grundlinie y des einbeschriebenen Dreiecks, das den größten Flächeninhalt hat?



---

20. Einem Viertelkreis mit dem gegebenen Radius r wird ein Dreieck einbeschrieben. Je nach Winkel φ besitzt das Dreieck unterschiedliche Flächeninhalte (siehe Skizze rechts).

Für welchen Winkel φ hat das Dreieck seinen größten Inhalt?



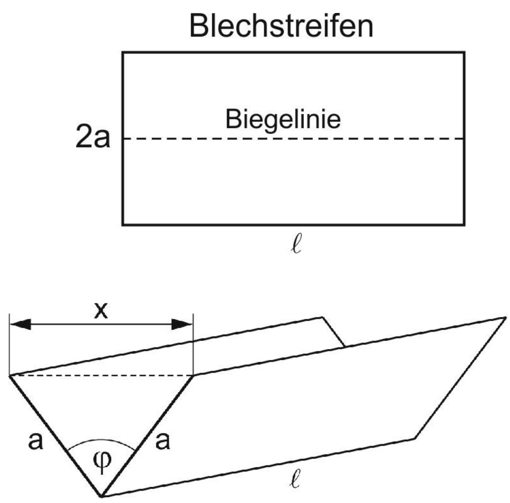
---

21. Aus einem Blechstreifen der Breite 2a und der Länge ℓ soll eine V-förmige Wasserrinne gebogen werden, die maximales Volumen aufnehmen kann.

a) Welcher Biegewinkel φ ist zu wählen?

b) Welche maximale Querschnittsfläche (Dreiecksfläche) erhält man?

c) Wie breit (Maß x) ist die Rinne dann am oberen Rand?

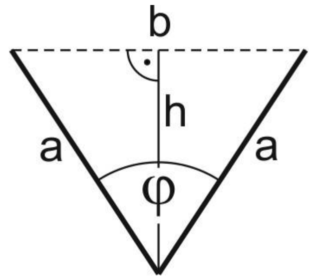


Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

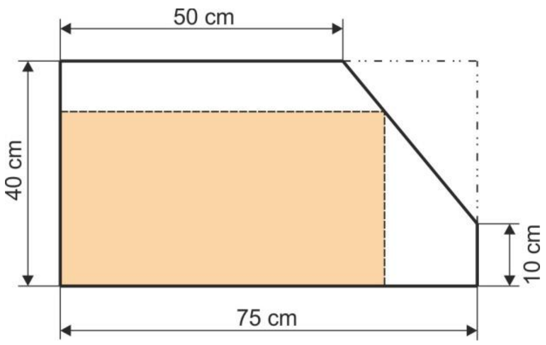
22. Eine V-förmige Wasserrinne soll aus einem Blech der Breite $2a = 40\ \text{cm}$ nach nebenstehender Skizze angefertigt werden (siehe auch Aufg. 21).

Wie groß müssen die Breite b und die Höhe h werden, damit möglichst viel Wasser transportiert werden kann? Die Fläche des Dreiecks soll also ein Maximum werden.



---

23. Von einer rechteckigen Platte ist eine Ecke abgebrochen. Aus der nun fünfeckigen Platte soll durch zwei Schnitte (parallel zu den Seiten des ursprünglichen Rechtecks) eine möglichst große rechteckige Platte herausgeschnitten werden
(siehe nebenstehende Skizze).



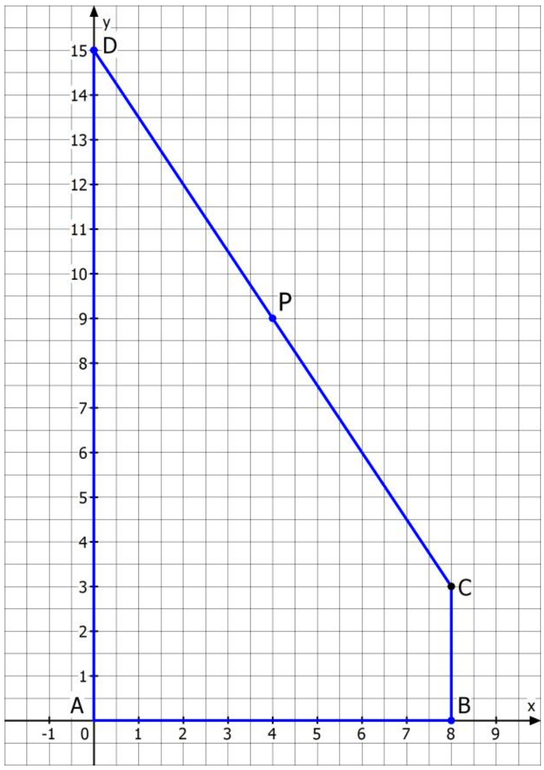
a) Bestimme die Abmessungen der herausgeschnittenen, rechteckigen Platte.

b) Um wie viel Prozent ist die fünfeckige Platte größer als die rechteckige Platte?

---

24. Gegeben ist das Trapez ABCD mit den Eckpunkten $A(0|0)$, $B(8|0)$, $C(8|3)$ und $D(0|15)$ $(1\text{LE} = 1\text{cm})$.

Dem Trapez werden Rechtecke einbeschrieben. Die Seiten dieser Rechtecke sind parallel zu den Koordinatenachsen. Alle Punkte P auf [CD] sind Eckpunkte der einbeschriebenen Rechtecke. Ebenso ist der Punkt A Eckpunkt eines jeden Rechtecks.



a) Zeichne das einbeschriebene Rechteck mit dem Punkt $P(4|y)$ in das Trapez ein und bestimme seinen Flächeninhalt.

b) Bewegt sich der Punkt $P(x|y)$ auf der Strecke $[CD]$, so ändert sich der Flächeninhalt F des zugehörigen Rechtecks. Begründe, dass sich der Flächeninhalt A mit der Gleichung $A(x) = x(-1{,}5x + 15)$ berechnen lässt.

c) Bestimme die Koordinaten von P für das einbeschriebene Rechteck mit dem größten Flächeninhalt. Gib seinen Inhalt an. Begründung!

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

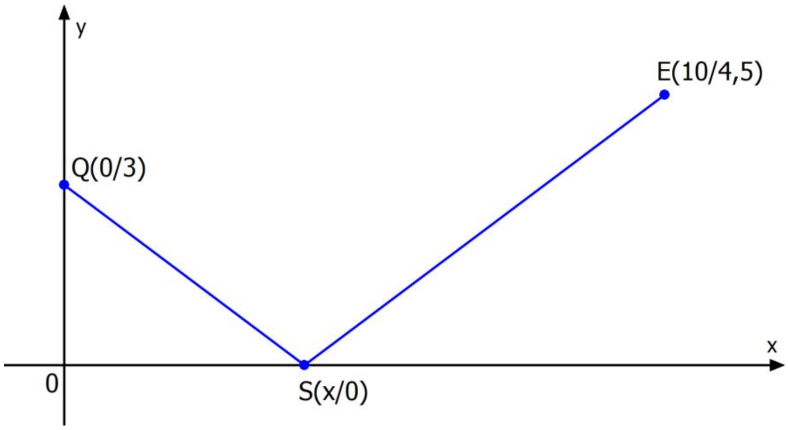
25. An welcher Stelle (Punkt Q_0) hat ein Punkt Q auf der Geraden $g:\ y = -2x + 4$ den kleinsten Abstand d_{min} zum Punkt $P(-3\,|\,-2{,}5)$? Bestimme diesen Abstand durch eine Rechnung. Fertige zunächst eine saubere Skizze an.

Welche Beziehung haben die Gerade g und die Gerade $\overline{PQ_0}$ zueinander?

---

26. Dargestellt ist der Strahlengang eines Laserstrahls von der Quelle Q über den Spiegelpunkt S auf der x-Achse bis zum Empfänger E.

Gesucht ist die x-Koordinate des Punktes S, für den kürzesten Weg von Q über S nach E.



Hinweis: Im Falle des kürzesten Weges gilt das Reflexionsgesetz.
(Der rechnerische Beweis erfolgt hier nicht.)

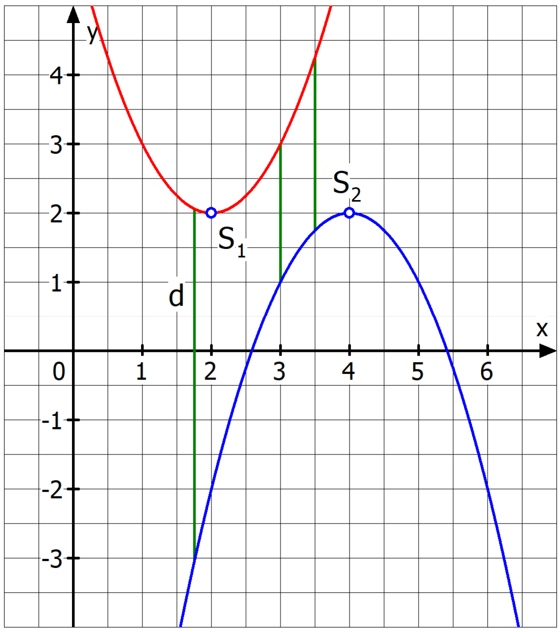
---

27. Die Graphen zweier Funktionen sind aus der Normalparabel durch Verschiebung bzw. Spiegelung an der x-Achse hervorgegangen. Die eine Parabel hat den Scheitel $S_1(2\,|\,2)$ und ist nach oben geöffnet, die zweite Parabel hat den Scheitel $S_2(4\,|\,2)$ und ist nach unten geöffnet.

a) Gib für beide Parabeln die Funktionsgleichung an.

b) Zwischen beiden Parabeln sind senkrechte Strecken d eingezeichnet.

Bestimme rechnerisch die kürzeste dieser Strecken und den zugehörigen x-Wert dieser Senkrechten.



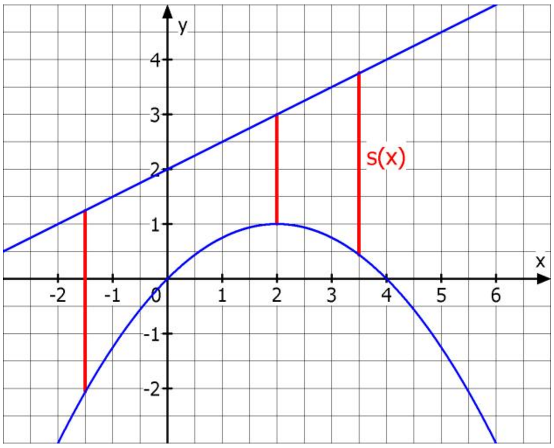
Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

28. Nebenstehendes Bild zeigt die Graphen einer Geraden und einer Parabel.
Die Parallelen zur y - Achse haben die Länge $s(x)$ und verlaufen zwischen der Parabel und der Geraden.

a) Gib die Funktionsgleichungen für die Parabel und für die Gerade an.
Entnimm die benötigten Werte dem Koordinatensystem.

b) Bestimme s_{min}, die kürzeste unter allen diesen Strecken, und gib an, wo sie liegt.



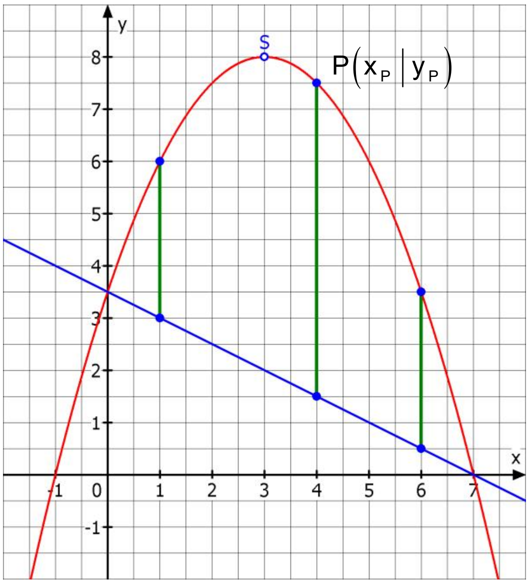
---

29. Das Bild rechts enthält den Graphen einer Parabel und einer Geraden.

a) Wie lautet die Funktionsgleichung für die Parabel und die Gerade?
Entnimm die benötigten Werte dem Koordinatensystem.

b) Bestimme durch Rechnung die Schnittpunkte von Parabel und Gerade.

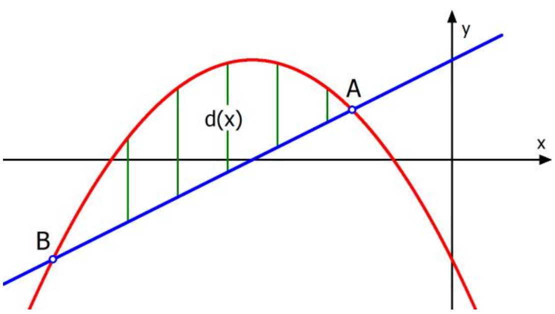
c) Im Bereich $0 < x < 7$ sind senkrechte Strecken zwischen Parabel und Gerade eingezeichnet. Bestimme die längste dieser Strecken rechnerisch.
Gib ihre Länge und den zugehörigen Punkt $P\left(x_P \mid y_P\right)$ auf der Parabel an.



---

30. Die Punkte $A\left(-2 \mid 1\right)$ und $B\left(-8 \mid -2\right)$ sind gemeinsame Schnittpunkte von Gerade g und Parabel p mit der Funktionsgleichung $p(x) = -0{,}25x^2 - 2x + c$.

Im Bereich $-8 < x < -2$ sind senkrechte Strecken zwischen Parabel und Gerade eingezeichnet. Bestimme rechnerisch die längste dieser Strecken und gib den zugehörigen x - Wert an.



Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

31. Gegeben sind die Parabeln $p_1: y = x^2 - 6x + 4$ und $p_2: y = -0{,}5\,x^2 + 4$.

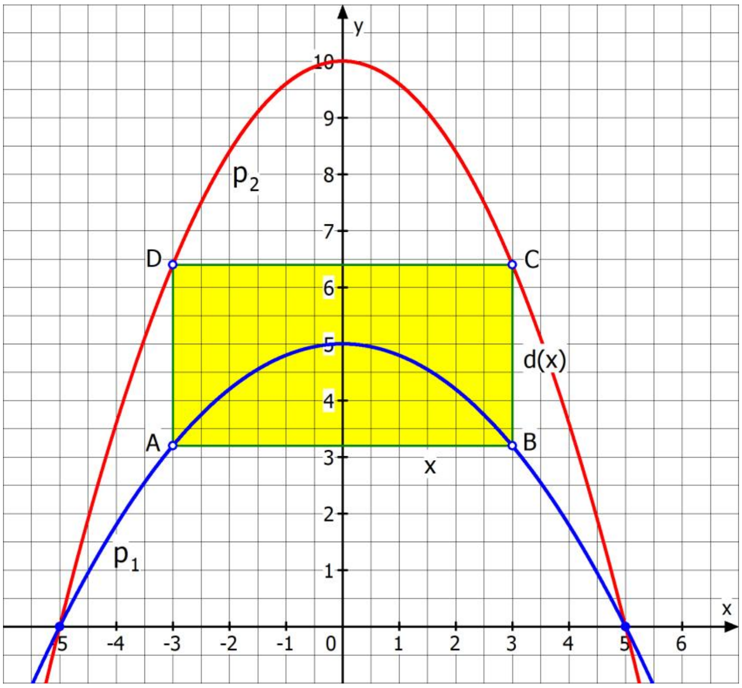
a) Bestimme von p_1 und p_2 jeweils den Scheitelpunkt und zeichne beide Parabeln in ein Koordinatensystem mit $-4 \le x \le 6$; $-6 \le y \le 6$.

b) Berechne die Schnittpunkte von p_1 mit p_2.
Erg.: $A(0\,|\,4)$ und $B(4\,|\,-4)$

c) Die Punkte $P \in p_2$ und $Q \in p_1$ haben stets dieselbe x-Koordinate. Es gilt: $P(x\,|\,-0{,}5x^2 + 4)$ und $Q(x\,|\,x^2 - 6x + 4)$.
Berechne für das Intervall $0 < x < 4$ den Abstand $d(x) = \overline{P_nQ_n}$ in Abhängigkeit von x. Zeichne $d(x)$ für $x_1 = 2$ in das Koordinatensystem ein.
Bestimme d_{max}, sowie den dazugehörenden x-Wert.

---

32. Gegeben sind die beiden Parabeln
$p_1:\ y = -0{,}2x^2 + 5$
$p_2:\ y = -0{,}4x^2 + 10$



Die Eckpunkte A und B bzw. C und D von Rechtecken $A_nB_nC_nD_n$ liegen jeweils auf den Parabeln p_1 bzw. p_2.
Die Rechteckseiten sind parallel zu den Koordinatenachsen (vgl. Skizze rechts).

a) Gib eine Funktion A(x) an, die den Flächeninhalt der Rechtecke in Abhängigkeit vom x-Wert des Punktes B beschreibt.
Zulässiges Intervall für die x-Werte: $x \in \,]0; 5[$

b) Unter allen Rechtecken gibt es eines mit dem größten Flächeninhalt.
Gib einen Näherungswert (1 Stelle nach dem Komma) des maximalen Flächeninhaltes und die zugehörige Belegung für x an.

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

33. Gegeben sind die beiden Parabeln
$p_1:\ y = 0{,}5x^2 - 2x + 3$ und $p_2:\ y = 0{,}5x^2 - 4x + 5$.

a) Bestimme jeweils die Scheitelkoordinaten und zeichne die Parabeln in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-1 \le x \le 9$; $-4 \le x \le 6$

b) Punkte B_n auf der Parabel p_1 und C_n auf der Parabel p_2 bilden zusammen mit $A\left(5\,|\,-1\right)$ Dreiecke AB_nC_n. Die Punkte B_n und C_n haben stets die gleiche Abszisse (den gleichen x-Wert).
Zeichne das Dreieck AB_1C_1 für $x = 3$ in das Koordinatensystem.

c) Bestimme den x-Wert für das Dreieck AB_0C_0, dessen Fläche einen Extremwert annimmt.
Von welcher Art ist dieser Extremwert und welchen Flächeninhalt hat dieses Dreieck?

---

34. Gegeben ist die Parabel $p:\ y = 0{,}5x^2 - 4x + 10$, $\quad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Die Gerade $g:\ y = 0{,}5x + 3$ schneidet die Parabel p in den Punkten C und D.

a) Bestimme durch Rechnung die Koordinaten des Scheitels S und zeichne die Parabel in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-3 \le x \le 9$; $-3 \le x \le 8$

b) Zeichne die Gerade g in das Koordinatensystem und berechne die Koordinaten der Schnittpunkte C und D.

c) Der Punkt C bildet zusammen mit den Punkten $A\left(-2\,|\,0\right)$ und $B\left(8\,|\,-2\right)$ das Dreieck ABC. Zeichne das Dreieck in das Koordinatensystem ein und überprüfe rechnerisch, ob das Dreieck bei C rechtwinklig ist.

d) Der Punkt C_n wandert auf der Parabel und bilden zusammen mit den Punkten A und B Dreiecke ABC_n. Gib die Fläche der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit vom x-Wert des Punktes C_n an.

e) Berechne denjenigen x-Wert, für den die Fläche der Dreiecke ABC_n einen Extremwert annimmt und gib den Flächeninhalt dieses Dreiecks an.

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

35. Die Punkte $A(2|4)$, $B(7|-1)$ und $C_n(x|y)$ liegen auf der Parabel p mit $y = -x^2 + 8x - 8$ und bilden die Dreiecke ABC_n.

a) Gib p in der Scheitelform an und bestimme den Scheitel S der Parabel.

b) Zeichne die Parabel p und das Dreieck ABC_1 für $x_1 = 3$ in ein KOS.
Für die Zeichnung: $-1 \le x \le 9$; $-2 \le y \le 9$

c) Gib ein Intervall für x an, sodass Dreiecke ABC_n entstehen.

d) Stelle den Flächeninhalt A(x) der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit vom x-Wert der Punkte C_n dar.

e) Berechne die Koordinaten des Punktes C_0 für das flächengrößte Dreieck ABC_0 und gib diesen maximalen Flächeninhalt an.

---

36. $S(2/1)$ ist der Scheitelpunkt einer nach oben geöffneten, verschobenen Normalparabel p.

a) Zeichne die Parabel p und stelle ihre Gleichung auf.

b) Zeige durch Rechnung: $R(0/5)$ sowie $Q(3/2)$ sind Punkte der Parabel p.

c) Auf dem Parabelbogen zwischen R und Q wandert ein Punkt P.
Zeichne das Dreieck P_1QR für $x_{P1} = 1{,}5$.

d) Stelle den Flächeninhalt aller Dreiecke P_nQR in Abhängigkeit von der x-Koordinate des Punktes P dar.

e) Gib ein Intervall für x an, sodass Dreiecke P_nQR entstehen.

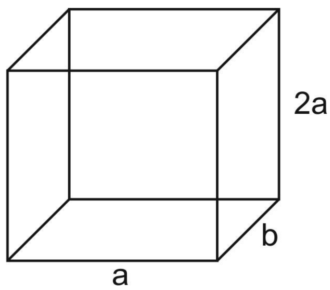
f) Für welchen x-Wert erhält man das Dreieck mit dem größten Flächeninhalt?

---

37. Aus einem 90 cm langen Draht soll das Kantenmodell eines Quaders entsprechend der nebenstehenden Skizze hergestellt werden. Die „Grundfläche“ A des Quaders hat die Längen a und b, die Quaderhöhe ist 2a.

Für welche Länge a wird die Grundfläche am größten?

Gib diese maximale Grundfläche an.

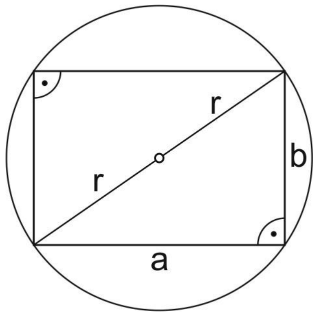


Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

38. In einem Kreis mit Radius r soll ein Rechteck mit größtmöglichem Flächeninhalt einbeschrieben werden (siehe Skizze rechts).

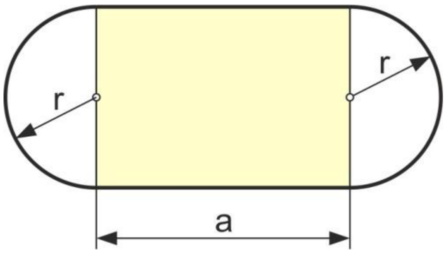
Bestimme die Länge der Seiten a und b für das flächengrößte Rechteck.



---

39. Der **Gesamtumfang** (beide Längsseiten a des Rechtecks und beide Halbkreise mit Radius r) der nebenstehend abgebildeten Sportfläche soll 400 m betragen.

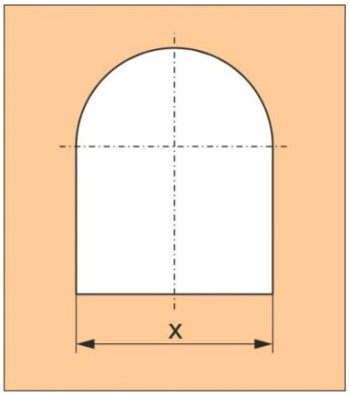
Bestimme den Radius r so, dass die Rechteckfläche (zwischen den beiden Halbkreisen) möglichst groß wird.



---

40. Ein Abwasserkanal soll im Querschnitt die Form eines Rechtecks mit anschließendem Halbkreis erhalten (vgl. Skizze rechts).

Berechne die <u>größtmögliche Fläche</u> des Querschnittes in Abhängigkeit vom Maß x, wenn der Umfang des Querschnittes 8 m betragen soll.



---

41. Gegeben ist eine Schar von Dreiecken AB_nC_n mit $A\left(-1\middle|-2\right)$.

Die Eckpunkte $C_n\left(x\,|\,y\right)$ wandern auf der Geraden $g:\ y = -0{,}5x + 4$. Die Eckpunkte B_n wandern auf der x-Achse; dabei ist die x-Koordinate der Eckpunkte B_n stets um 1 größer als die x-Koordinate der Eckpunkte C_n. Es gilt: $0 \le x \le 8$

a) Zeichne die Dreiecke AB_1C_1 mit $x = 0$ und AB_2C_2 mit $x = 5$ in ein KOS.
Für die Zeichnung: 1 LE = 1 cm; $-2 \le x \le 9$; $-3 \le y \le 6$

b) Berechne den Flächeninhalt $A(x)$ aller Dreiecke AB_nC_n in Abhängigkeit von der x-Koordinate der Punkte C_n.

c) Untersuche den Flächeninhalt auf einen Extremwert für $0 \le x \le 8$.

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

42. Gegeben sind die Punkte $A(-1|2)$, $B(6|-2)$, $C(4|6)$ sowie die Geraden $g:\ y=-2$ und $h:\ x=4$.

a) Zeichne das Dreieck ABC sowie g und h in ein Koordinatensystem, Platzbedarf: $-2<x<10$; $-3<y<7$

b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

c) Der Punkt B wandert nun auf g um a cm in positiver x-Richtung, C dagegen um 0,5a cm in negativer y-Richtung. Die „neuen" Punkte heißen B' und C'. Zeichne für $a=3$ das Dreieck $AB'C'$ in das Koordinatensystem ein.

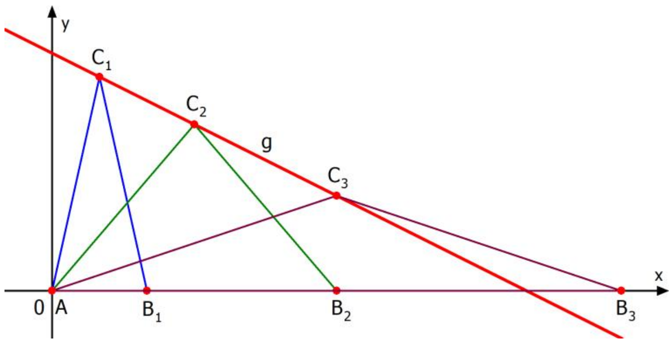
d) Gib die Koordinaten von B' und C' in Abhängigkeit von a an.

e) Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke $AB'C'$ in Abhängigkeit von a.

f) Für welche Belegung von a ergibt sich ein Extremwert von A? Gib den Extremwert, seine Art sowie den zugehörigen Wert für a an.

---

43. Durch die Punkte $A(0|0)$, $B(2x|0)$ und $C(x|-0{,}5x+5)$ sind gleichschenklige Dreiecke AB_nC_n festgelegt. In der nebenstehenden Zeichnung sind drei dieser Dreiecke dargestellt.



a) Alle Punkte C_n liegen auf einer Geraden g. Gib die Gleichung für g an.

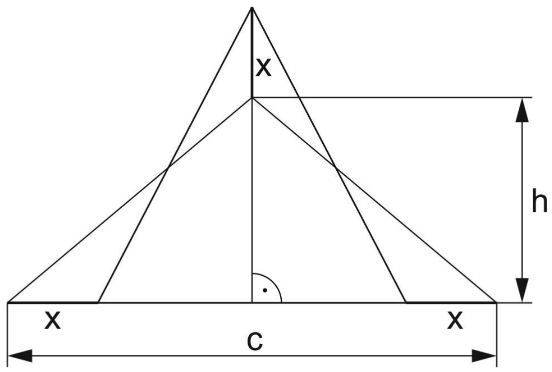
b) Bestimme für x den Definitionsbereich.

c) Für welchen Punkt C_0 ist der Flächeninhalt des entsprechenden Dreiecks AB_0C_0 ein Maximum? Berechne diesen maximalen Flächeninhalt.

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

44. Die Basis c eines gleichschenkligen Dreiecks ist 14 cm lang, die Länge der Höhe h auf die Basis beträgt 4 cm. Die Basis wird auf beiden Seiten jeweils um x cm verkürzt, dafür die Höhe um x cm verlängert.



a) Zeige, dass für den Term, der den Flächeninhalt des neuen Dreiecks in Abhängigkeit von x beschreibt, gilt:
$A(x) = (-x^2 + 3x + 28)\ \text{cm}^2$

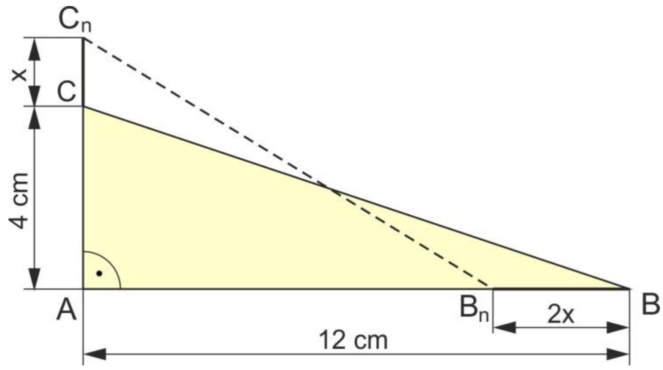
b) Berechne, für welches x der Flächeninhalt A(x) maximal wird.

Wie groß ist A_{max} in diesem Fall ?

Welches besondere Dreieck ergibt sich dann?

---

45. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten $\overline{AB} = 12$ cm und $\overline{AC} = 4$ cm.
Es entstehen neue Dreiecke AB_nC_n, wenn man $\overline{AB}$ von B aus um 2x cm verkürzt und gleichzeitig $\overline{AC}$ über C hinaus um x cm verlängert (vgl. Skizze rechts).



a) Gib das Intervall für x an, damit Dreiecke AB_nC_n entstehen.

b) Berechne den Flächeninhalt aller Dreiecke AB_nC_n in Abhängigkeit von x.

c) Für welchen x-Wert ist der Flächeninhalt des Dreieck AB_nC_n maximal?

d) Ermittle die Länge der Hypotenuse $\overline{B_nC_n}$ in Abhängigkeit von x.

Gib denjenigen x-Wert an, der einen Extremwert für die Hypotenuse $\overline{B_nC_n}$ liefert. Welcher Art ist dieser Extremwert?

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

46. Gegeben ist die Raute ABCD mit $A(0|-5)$, $B(3|0)$, $C(0|5)$ und $D(-3|0)$. Verkürzt man die Diagonale [AC] von A und C aus um x LE und verlängert [BD] über B hinaus um 3x LE, so entstehen achsensymmetrische Drachen $A_nB_nC_nD$.

a) Zeichne die Raute ABCD und den Drachen $A_1B_1C_1D$ für $x_1 = 1{,}5$ und bestimme den Flächeninhalt des Drachen.

b) Welche Werte sind für x zulässig?

c) Bestimme den Flächeninhalt A(x) der Drachen $A_nB_nC_nD$ in Abhängigkeit von x.

d) Bestimme die Belegung für x, für die man den Drachen mit dem größten Flächeninhalt erhält. Gib A_{max} an.

---

47. Gegeben ist eine Raute ABCD mit den Diagonalen $\overline{AC} = 6$ cm und $\overline{BD} = 8$ cm. Verlängert man die Diagonale [AC] über A und C hinaus jeweils um 1,5x cm und verkürzt man gleichzeitig die Diagonale [BD] von B und D aus jeweils um x cm, so erhält man neue Rauten $A_nB_nC_nD_n$.

a) Zeichne die Raute ABCD und die Raute $A_1B_1C_1D_1$ für $x = 2$.

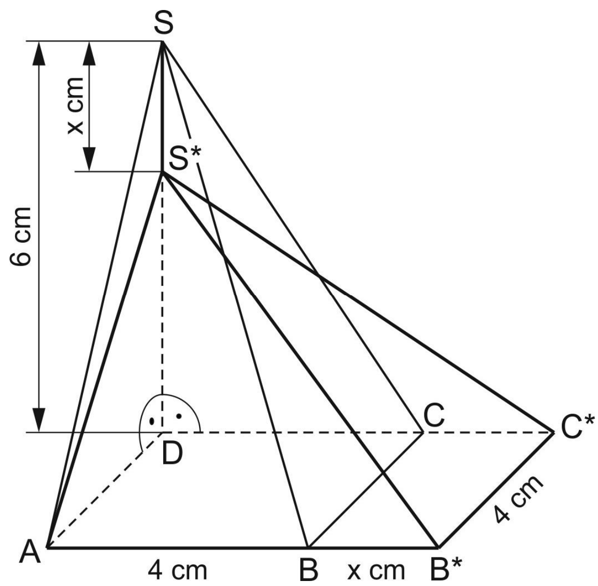
b) Welche Werte darf die Maßzahl x annehmen?

c) Bestimme den Flächeninhalt A(x) der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ in Abhängigkeit von x.

d) Bestimme die Belegung für x, für die man die Raute mit dem größten Flächeninhalt erhält. Gib A_{max} an.

---

48. Gegeben ist eine Pyramide mit der quadratischen Grundfläche ABCD. Die Seiten des Quadrates sind 4 cm, die Höhe [DS] ist 6 cm lang. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Punkt D der Grundfläche. Man erhält neue Pyramiden AB*C*DS* mit rechteckiger Grundfläche, wenn man die Seiten [AB] und [DC] um x cm verlängert und gleichzeitig die Höhe [DS] um x cm kürzt.



a) Ermittle das Volumen V(x) der Pyramiden AB*C*DS* in Abhängigkeit von x.

b) Für welchen x-Wert erhält man eine Pyramide mit 20 cm^3 Volumen?

c) Ermittle rechnerisch die Zahl für x, damit die Pyramide mit dem kleinsten Volumen entsteht. Gib dieses Volumen an.

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

49. Die Raute ABCD mit den Diagonalen $\overline{AC} = e$ und $\overline{BD} = f$ ist die Grundfläche einer schiefen Pyramide ABCDS. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Punkt D der Grundfläche. Es gilt: $e = 10\,cm$; $f = 8\,cm$; $\overline{DS} = h = 6\,cm$.
Verlängert man die Diagonale [AC] über A und C hinaus jeweils um x cm und verkürzt [DS] von S aus um x cm, so erhält man neue Pyramiden $A_nBC_nDS_n$.

a) Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit AC als Schrägbildachse, sowie $\omega = 45°$ und $q = 0{,}5$. Zeichne ferner die für $x_1 = 2$ neu entstandene Pyramide $A_1BC_1DS_1$ in das Schrägbild ein.

b) Stelle das Volumen der Pyramiden $A_nBC_nDS_n$ in Abhängigkeit von x dar.

c) Ermittle den Extremwert für das Volumen und gib an, um welche Art von Extremwert es sich handelt.

d) Für welche Werte von x wird der Flächeninhalt des Schnittdreiecks BDS_n der Pyramiden kleiner als 14 cm^2 ?

---

50. Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 6 cm ist die Grundfläche einer 10 cm hohen Pyramide ABCDS. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Diagonalen-schnittpunkt M.
Verlängert man die Seiten [AB] und [CD] über die Endpunkte hinaus um jeweils x cm und verkürzt gleichzeitig die Höhe um x cm ($0 < x < 10$), so entstehen neue vierseitige Pyramiden A*B*C*D*S* mit dem Rechteck A*B*C*D* als Grundfläche.

a) Zeichne ein Schrägbild der ursprünglichen Pyramide (CD = Schrägbildachse; $\omega = 45°$; $q = 0{,}5$) und zeichne eine Pyramide A*B*C*D*S* ein.

b) Berechne das Volumen der Pyramiden A*B*C*D*S* in Abhängigkeit von x.

c) Für welche Belegung von x erhält man die Pyramide mit dem größten Volumen?

d) Für welche Belegung von x besitzt die Seitenfläche B*C*S* der Pyramide einen extremen Flächeninhalt?