Lösung zu Textaufgaben mit exponentiellem Wachstum

Aufgabe	Rechnung
1. In einem Teich sind 10 Seerosen. Die Seerosen verdoppeln sich pro Zeiteinheit. Nach 50 Zeiteinheiten ist der See komplett mit Seerosen bedeckt. Nach wie vielen Zeiteinheiten ist der See zur Hälfte mit Seerosen bedeckt? Nach wie vielen Zeiteinheiten ist ein Viertel des Sees mit Seerosen bedeckt?	Nach 49 Zeiteinheiten ist er halb voll, nach 48 Zeiteinheiten ist ein Viertel des Sees bedeckt.
2. Eine Zelle teilt sich jede Stunde in 4 Teile. Zu Beginn der Beobachtung waren 30 Zellen vorhanden. a. Mit wie vielen Zellen kann nach 1,2,3,4 Stunden rechnen? b. Wie lautet die Funktionsgleichung?	a. Nach 1 Stunde: $30 \cdot 4 = 120$, d.h. es gibt 120 Zellen Nach 2 Stunden: $30 \cdot 4 \cdot 4 = 120 \cdot 4 = 480$, d.h. es gibt 480 Zellen Nach 3 Stunden: $30 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 480 \cdot 4 = 1920$, d.h. es gibt 1920 Zellen Nach 4 Stunden: $30 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1920 \cdot 4 = 7680$, d.h. es gibt 7680 Zellen b. **$f(x) = 30 \cdot 4^x$**
3. Ein weibliches Meerschweinchen wirft im Schnitt 4 weibliche Tiere pro Jahr. Zu Beginn sind drei Weibchen im Käfig. a. Mit wie vielen weiblichen Meerschweinchen kann nach 1,2,3,4 Jahren rechnen? b. Wie lautet die Funktionsgleichung?	a. Nach 1 Jahr: 3 (Mütter) + $3 \cdot 4$ (Kinder) = 15 (= $3 \cdot 5$) Nach 2 Jahren: 15 (Mütter) + $15 \cdot 4$ (Kinder) = 75 (= $3 \cdot 25$) Nach 3 Jahren: 75 (Mütter) + $75 \cdot 4$ (Kinder) = 375 (=$3 \cdot 125$) Nach 4 Jahren: 125 (Mütter) + $3 \cdot 125$ (Kinder) = 1875 (=$3 \cdot 625$) b. **$f(x) = 3 \cdot 5^x$**
4. Auf einem Sparbuch liegen 2000 €. Bei der Bank A erhält der Sparer jedes Jahr 2% Zinsen. a. Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf und berechnen Sie, wie viel Geld nach 10 Jahren auf dem Konto ist. b. Wann hat sich das Kapital verdoppelt?	a. **$f(x) = 2000 \cdot 1{,}02^x$** $f(10) = 2000 \cdot 1{,}02^{10} = 2437{,}99$ **Nach 10 Jahren hat sich das Kapital auf 2437,99€ erhöht.** b. $4000 = 2000 \cdot 1{,}02^x$ $\Leftrightarrow 2 = 1{,}02^x \Leftrightarrow x = \log_{1,02} 2 \approx 35$ **Nach 35 Jahren hat sich das Kapital verdoppelt.**
5. Die Milchleistung pro Kuh steigt aufgrund von Züchtungen exponentiell an. Zu Beginn der Aufzeichnungsphase (im Jahr 1800) konnte man im Jahr 900 Liter pro Kuh melken, 200 Jahre später sind es 7000 Liter. a. Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf!	a. Jahr 1800: 900 Liter => x = 0 P(0/900) Jahr 2000: 7000 Liter => Q(200/7000) $f(x) = k \cdot a^x$ 1. $f(0) = 900 \Leftrightarrow k \cdot a^0 = 900 \Rightarrow k = 900$, also : $f(x) = 900 \cdot a^x$ 2. $f(200) = 7000 \Leftrightarrow 900 \cdot a^{200} = 7000 \Leftrightarrow a = \sqrt[200]{\frac{7000}{900}} \approx 1{,}01$ => **$f(x) = 900 \cdot 1{,}01^x$**

b. Berechnen Sie, wie viele Liter Milch eine Kuh im Jahr 1950 gegeben hat! c. In welchem Jahr gibt die Kuh 5000 Liter Milch?	b. 1950: x = 150 $f(150) \approx 4003{,}58$ **Eine Kuh lieferte im Jahr 1950 4003 Liter Milch.** **c.** $f(x) = 5000 \Leftrightarrow 900 \cdot 1{,}01^x = 5000 \Leftrightarrow x = \log_{1{,}01} \frac{5000}{900} \approx 172{,}34$ **Nach 172,34 Jahren, d.h. im April 1972 müsste eine Kuh 5000l produzieren.**
6. Im November fällt das Laub eines Eichenbaums auf den Boden. In den nächsten 12 Monaten kann der verbleibende Rest des Laubs in Prozent durch eine exponentielle Funktion angegeben werden. Im Januar sind noch 62% des Eichenlaubs vorhanden. Stellen Sie die Funktionsgleichung auf und berechnen Sie, wie viel Prozent des Laubs noch im Februar, Mai und Juli des folgenden Jahres vorhanden sind.	November: x = 0: 100% Januar: x = 2: 62% $f(x) = k \cdot a^x$ 1. $f(0) = 100 \Leftrightarrow k \cdot a^0 = 100 \Rightarrow k = 100$, also : $f(x) = 100 \cdot a^x$ 2. $f(2) = 62 \Leftrightarrow 100 \cdot a^2 = 62 \Leftrightarrow a = \sqrt[2]{\frac{62}{100}} \approx 0{,}79$ => **$f(x) = 100 \cdot 0{,}79^x$** Februar: x = 3=> $f(3) = 100 \cdot 0{,}79^3 \approx 49{,}3$ Mai: x = 6=> $f(6) = 100 \cdot 0{,}79^6 \approx 24{,}3$ Juli: x = 8=> $f(8) = 100 \cdot 0{,}79^8 \approx 15{,}17$ **Im Februar sind noch 49,3%, im Mai 24,3% und im Juli 15,17% des Laubes vorhanden.**
7. Die Weltbevölkerung steigt exponentiell an. Im Jahr 1650 gibt es 0,5 Milliarden Menschen, im Jahr 2000 6,3 Milliarden Menschen. Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf und berechnen Sie, wie viele Menschen es im Jahr 1900 gegeben hat und wie viele es nach dem Modell im Jahr 2025 sein werden. (Runden Sie auf 4 Stellen hinter dem Komma!)	1650: 0,5 Milliarden => x = 0 f(x) = 500.000.000 2000: 6,3 Milliarden => x = 350 f(x) = 6.300.000.000 $f(x) = k \cdot a^x$ 1. $f(0) = 500.000.000 \Leftrightarrow k \cdot a^0 = 500.000.000 \Rightarrow k = 500.000.000$, also : $f(x) = 500.000.000 \cdot a^x$ 2. $f(350) = 6.300.000.000 \Leftrightarrow 500.000.000 \cdot a^{350} = 6.300.000.000$ $\Leftrightarrow a = \sqrt[350]{\frac{6.300.000.000}{500.000.000}}\ \sqrt[350]{\frac{63}{5}} \approx 1{,}0073$ => **$f(x) = 500.000.000 \cdot 1{,}0073^x$** 1900: x = 250 $f(250) \approx 3.080.910.000$ 2025: x = 375 $f(375) \approx 7.647.730.000$ **Im Jahr 1900 waren 3.080.910.000 Menschen und im Jahr 2025 sind es laut Modell 7.647.730.000 Menschen auf diesem Planeten.**

8. Bei der Inflation in der Weimarer Republik steigt der Wert der Goldmark im Modell exponentiell an. Im Jahr 1918 ist eine Goldmark eine Papiermark wert, im Jahr 1924 ist eine Goldmark 1.000.000.000.000 Papiermark wert. Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf und berechnen Sie den Wert der Goldmark im Jahr 1922 und 1923. Vergleichen Sie den Wert aus dem Modell mit dem des Graphen unten.	1918: $x = 0$: $f(x) = 1$, x = Jahr nach 1918; f(x) Wert der Goldmark in Papiermark 1924: $x = 6$: $f(6) = 1.000.000.000.000$ $f(x) = k \cdot a^x$ 1. $f(0) = 1 \Leftrightarrow k \cdot a^0 = 1 \Rightarrow k = 1$, also : $f(x) = a^x$ 2. $f(6) = 1.000.000.000.000 \Leftrightarrow a^6 = 1.000.000.000.000$ $\Leftrightarrow a = \sqrt[6]{1.000.000.000.000} = 100 \Rightarrow$ **$f(x) = 100^x$** 1922: $x = 4$; $f(4) = 100.000.000$ 1923: $x = 5$; $f(5) = 10.000.000.000$ Die Werte sind viel höher als die realen Werte, d.h. das exponentielle Wachstum tritt erst nach 1923 ein.
9. Die Halbwertszeit von Jod 131 beträgt ungefähr 8 Tage. Zu Beginn der medizinischen Behandlung sind 4mg Jod 131 vorhanden. Die Funktion: Zahl der Tage→ Masse hat die Form $f(x) = k \cdot a^x$. a. Bestimmen Sie k und a! b. Wie viel Gramm Jod 131 sind nach einem Tag vorhanden? c.Wie viel Prozent des Jods 131 zerfällt innerhalb eines Tages? Wie viel Prozent des Jods 131 zerfällt innerhalb von 2 Tagen?	a. Tag 0: $x = 0$: $f(x) = 4$ x in Tagen, f(x) in mg Jod131 Tag 8: $x = 8$: $f(x) = 2$ $f(x) = k \cdot a^x$ 1. $f(0) = 4 \Leftrightarrow k \cdot a^0 = 4 \Rightarrow k = 4$, also : $f(x) = 4 \cdot a^x$ 2. $f(8) = 2 \Leftrightarrow 4 \cdot a^8 = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt[8]{\frac{1}{2}} \approx 0{,}92 \Rightarrow$ **$f(x) = 4 \cdot 0{,}92^x$** b. $f(1) = 4 \cdot 0{,}92^1 \approx 3{,}68$, d.h. es bleiben **3,68mg** übrig. c. Nach einem Tag sind noch 92% da, **also zerfällt Jod 131 am ersten Tag um 8%.** Nach dem zweiten Tag zerfällt es nochmal auf 92%. $0{,}92^2 = 0{,}8464$, **also zerfällt Jod 131 in den ersten 2 Tagen um 15,36%.**
10. Cäsium 137 hat eine Halbwertszeit von 33 Jahren. a. Zu Beginn der Beobachtung sind 200 mg Cäsium 137 vorhanden. Bestimmen Sie die Exponentialfunktion, die den Zerfall des Cäsiums 137 mit dem Anfangswert beschreibt! b. Wie viel Prozent beträgt die Abnahme nach einem Jahr? c. 1986 ereignete sich der GAU in Tschernobyl. Dort wurden große Mengen von Caesium-137 freigesetzt. Wie viel Prozent dieses Cäsiums sind im Jahr 2015 noch in der Natur vorhanden?	a. $f(x) = k \cdot a^x$, x in Jahren, f(x) in mg Cäsium 137 1. $f(0) = 200 \Leftrightarrow k \cdot a^0 = 200 \Rightarrow k = 200$, also : $f(x) = 200 \cdot a^x$ 2. $f(33) = 100 \Leftrightarrow 200 \cdot a^{33} = 100 \Leftrightarrow a = \sqrt[33]{\frac{1}{2}} \approx 0{,}98 \Rightarrow$ **$f(x) = 200 \cdot 0{,}98^x$** b. **Die Abnahme beträgt 2 %.** c. **$f(x) = 100 \cdot 0{,}98^x$** , x in Jahren, f(x) in Prozent des noch vorhandenen Anfangsstoffes 2015: Es sind seitdem 29 Jahre vergangen: $f(29) \approx 55{,}66$ **Es sind noch 55% des Cäsiums vorhanden.**

11. Frau Meier legt Geld auf ihrem Konto an, sie lässt das Geld plus Zinsen auf ihrem Konto stehen. Nach 5 Jahren hat sie 14490,9 € und nach 8 Jahren 15834,6 € auf dem Konto. Berechnen Sie den Zinssatz und das Anfangskapital!	P(5/14490,9) und Q(8/15834,6) sind gegeben. $f(x) = k \cdot a^x$ P und Q einsetzen: I. $14490{,}9 = k \cdot a^5 \Leftrightarrow k = \frac{14490{,}9}{a^5}$ II. $15834{,}6 = k \cdot a^8$ I n II einsetzen, um damit a auszurechnen: $15834{,}6 = \frac{14490{,}9}{a^5} \cdot a^8 \Leftrightarrow 15834{,}6 = 14490{,}9 \cdot a^3 \Leftrightarrow \frac{15834{,}6}{14490{,}9} = a^3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{15834{,}6}{14490{,}9}} = 1{,}03$ a in I einsetzen, um k auszurechnen: $k = \frac{14490{,}9}{1{,}03^5} = 12500$ Der Zinssatz beträgt 3 % und das Anfangskapital 12500 €.
12. Ein Biologiestudent setzt Bakterien in eine Petrischale, die sich exponentiell vermehren. Nach 5 Tagen sind 2560 Bakterien und nach 7 Tagen 10240 Bakterien vorhanden. Der Biologiestudent hat leider vergessen, wie viele Bakterien er zu Beginn in die Petrischale hineingetan hat. Berechnen Sie die Anzahl und den Wachstumsfaktor!	P(5/2560) und Q(7/10240) sind gegeben. $f(x) = k \cdot a^x$ P und Q einsetzen: III. $2560 = k \cdot a^5 \Leftrightarrow k = \frac{2560}{a^5}$ IV. $10240 = k \cdot a^7$ I n II einsetzen, um damit a auszurechnen: $10240 = \frac{2560}{a^5} \cdot a^7 \Leftrightarrow 10240 = 2560 \cdot a^2 \Leftrightarrow \frac{10240}{2560} = a^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{10240}{2560}} = 2$ a in I einsetzen, um k auszurechnen: $k = \frac{2560}{2^5} = 80$ Zu Beginn waren 80 Bakterien in der Petrischale, der Wachstumsfaktor ist 2.