

- 1 Eine bestimmte Bakterienkultur vermehrt sich gemäß der exponentiellen Wachstumsfunktion $N(t) = 200 \cdot 1,26^t$, wobei t die Zeit in Stunden angibt.
- a) Um wie viel Prozent wächst die Population pro Stunde?
- b) Wie viele Bakterien sind nach 10 Stunden vorhanden?
- c) Nach welcher Zeit wird eine Anzahl von einer Million erreicht sein?
- 2 Die Einwohnerzahlen zweier Länder können durch folgende Exponentialfunktionen bestimmt werden:

$$E_1(t) = 21,25 \cdot 1,0056^t \quad \text{und} \quad E_2(t) = 17,85 \cdot 1,0167^t$$

Dabei wird t in Jahren und die Einwohnerzahlen in Millionen gemessen.

Nach wie vielen Jahren (beginnend ab $t = 0$) haben beide Länder gleich viele Einwohner und wie groß ist die Einwohnerzahl zu diesem Zeitpunkt?

- 3 In einem bestimmten See nimmt die Intensität des Sonnenlichts pro Meter um 13,5 % ab.
- a) Die tiefste Stelle des Sees liegt 18 m unter der Wasseroberfläche. Welcher Anteil des Sonnenlichts erreicht diese Stelle?
- b) In welcher Tiefe beträgt die Sonnenlichtintensität nur noch 10 % des Wertes an der Wasseroberfläche?
- 4 Am 1. Jänner 2014 lebten in einem bestimmten Land 28,5 Mio. Menschen. 10 Jahre später waren es um 1,3 Mio. Einwohner mehr. Es wird von einem exponentiellen Wachstum ausgegangen.
- a) Bestimme die Funktionsgleichung $E(t) = c \cdot a^t$, bei welcher t für die Jahre ab dem 1. Jänner 2020 steht und $E(t)$ die zugehörige Einwohnerzahl in Mio. Einwohnern beschreibt.
- b) Um wie viel Prozent wächst die Bevölkerung pro Jahr durchschnittlich?
- c) Wie viele Menschen werden am 1. Jänner 2050 in diesem Land leben?
- d) Wann werden erstmals 40 Mio. Menschen in diesem Land leben? Gib das Ergebnis als Jahreszahl an!
- 5 Erfinde eine kontextbezogene Aufgabenstellung, welche durch die Gleichung $18,5 \cdot 1,007^t = 21$ gelöst werden kann und gehe dabei auf die Bedeutung der drei Zahlen ein.
- 6 Um 13 Uhr trinkt Fabian einen Energy Drink und nimmt dabei 75 mg Koffein auf. Um 18:30 Uhr trinkt er einen Kaffee mit 60 mg Koffein. Der Abbau von Koffein erfolgt in seinem Körper gemäß der Funktion $N(t) = N_0 \cdot 0,65^t$, wobei t die Zeit in Stunden ist.
- a) Berechne, wie viel Koffein sich unmittelbar vor dem Trinken des Kaffees im Körper befand.
- b) Berechne, wie viel Koffein sich um 22 Uhr im Körper befindet.
- 7 An der Wasseroberfläche werden 20 % des auftreffenden Sonnenlichts gespiegelt. In einer Tiefe von 15 m sind noch 30 % des auf die Wasseroberfläche auftreffenden Sonnenlichts vorhanden. Um wie viel Prozent nimmt die Intensität des Sonnenlichts pro Meter ab, wenn innerhalb des Wassers eine exponentielle Abnahme vorliegt?
- 8 Die Einwohnerzahlen der beiden bevölkerungsreichsten Länder der Erde sind in folgender Tabelle ersichtlich:

Jahr	China	Indien
2000	1,263 Mrd.	1,060 Mrd.
2010	1,338 Mrd.	1,241 Mrd.

Berechne anhand dieser Zahlen und der Annahme eines exponentiellen Bevölkerungswachstums, wann Indien mehr Einwohner als China haben wird bzw. hatte.

- 9 Die Einwohnerzahl eines bestimmten Landes nimmt jährlich um 1,5 % zu. Derzeit leben in diesem Land 3,2 Mio. Menschen.
- Gib eine Funktionsgleichung an, welche der Zeit t (in Jahren) die Einwohnerzahl $E(t)$ zuordnet.
 - Wie viele Menschen werden in 20 Jahren in diesem Land leben?
 - Wie viele Menschen lebten vor 20 Jahren in diesem Land?
 - In wie vielen Jahren wird dieses Land 5 Mio. Einwohner haben?
 - Warum kann eine Exponentialfunktion nur für einen beschränkten Zeitraum die Bevölkerung eines Landes beschreiben?
- 10 Ein Lichtstrahl mit Intensität I_0 durchdringt senkrecht eine Glasplatte der Dicke d . Dabei verliert er beim Eintritt und beim Austritt jeweils 3 % seiner Intensität aufgrund von Reflexion. Pro Millimeter Glas verliert er außerdem 0,5 % seiner Intensität aufgrund von Absorption.
- Berechne die Intensität des Lichtstrahls nachdem er eine 5 Millimeter dicke Glasplatte durchquert hat.
 - Stelle eine Funktion $I(d)$ auf, mit welcher die Intensität für beliebige Plattendicken d berechnet werden kann.
- 11 Bei der Bakterienart *E. coli* verdoppelt sich die Größe der Bakterienkultur alle 20 Minuten. In einer Probe befinden sich zu Beginn 50 Bakterien.
- Wie viele Bakterien befinden sich nach 3 Stunden in der Probe?
 - Stelle eine Funktion auf, welche die Anzahl der Bakterien nach der Zeit t (in Stunden) beschreibt.
 - Berechne, nach welcher Zeit die Anzahl von 1 000 000 Bakterien erreicht ist.
- 12 Für die Joghurtherstellung werden Milchsäurebakterien benötigt, deren Wachstum durch die folgende Funktion beschrieben werden kann:

$$N(t) = 20 \cdot 1,0157^t$$

Dabei ist t die Zeit in Minuten und $N(t)$ die zugehörige Masse an Bakterien (gemessen in μg).

- Gib das prozentuelle Wachstum pro Minute an!
- Gib das prozentuelle Wachstum pro Stunde an!
- Welche Masse ist nach drei Stunden vorhanden? Vergiss die Einheit nicht!
- Erkläre, was bei folgender Umformung falsch ist, und korrigiere den Fehler!

$$\frac{a}{20} = 1,0157^t$$

$$\frac{\log(a)}{\log(20)} = t \cdot \log(1,0157)$$

- 13 Die Abnahme der Intensität von blauem Licht unter Wasser kann durch die Funktion $I(x) = I_0 \cdot e^{-0,03x}$ beschrieben werden. Für rotes Licht lautet der Zusammenhang $I(x) = I_0 \cdot e^{-0,6x}$. Dabei ist x die Tiefe unter der Wasseroberfläche (in Meter). Berechne jeweils, wie viel Prozent der ursprünglichen Intensität I_0 in einer Tiefe von 10 m noch vorhanden sind.

- 14 Die Einwohnerzahl der Vereinigten Staaten von Amerika (gemessen in Millionen Einwohnern) kann näherungsweise durch die Exponentialfunktion $N(t) = 281,4 \cdot 1,0093^t$ beschrieben werden, wobei der Zeitpunkt $t = 0$ für den 1. Jänner 2000 steht.
- Um wie viel Prozent wächst die Bevölkerung dieses Landes jährlich?
 - In welchem Jahr wird laut diesem Modell die 500-Millionen-Einwohner-Marke erreicht?
- 15 Der Abbau eines Medikaments erfolgt im menschlichen Körper gemäß einer Exponentialfunktion. Um 9 Uhr betrug die Wirkstoffkonzentration $40 \mu\text{g/L}$ und drei Stunden später nur noch $25 \mu\text{g/L}$.
- Erstelle eine zu diesen Angaben passende Funktionsgleichung in der Form $N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$.
 - Berechne, zu welcher Uhrzeit die Konzentration auf $5 \mu\text{g/L}$ abgesunken ist.
- 16 Die durchschnittlichen Mietpreise sind in Österreich zwischen 2013 und 2017 um $14,6\%$ gestiegen. Erstelle unter der Annahme eines exponentiellen Wachstums eine Funktionsgleichung, welche jedem Jahr die zugehörigen durchschnittlichen Mietpreise zuordnet. Dabei soll $t = 0$ das Jahr 2000 repräsentieren.
- 17 Herr Müller weiß aufgrund der Analyse der Vorjahre, dass sich der Holzbestand seines Waldes jährlich um 2% vermehrt. Der aktuelle Bestand beträgt 4500 m^3 .
- Erstelle eine Funktionsgleichung, welche den Holzbestand in Abhängigkeit der Jahre (beginnend ab jetzt) beschreibt.
 - In wie vielen Jahren wird ein Holzbestand von 5000 m^3 erreicht sein?
 - Erkläre, ob es sich weiterhin um ein exponentielles Wachstum handelt, wenn jedes Jahr 100 m^3 Holz aus dem Bestand entnommen werden.
- 18 Bestimme jeweils eine passende Funktionsgleichung (linear oder exponentiell). Verwende für den Anfangswert die Bezeichnung $f(0)$ und achte auf die vorgegebenen Einheiten.
- Eine Pflanze wächst pro Tag um 7 mm , wobei x in Tagen und $f(x)$ in cm gemessen wird.
 - Die Helligkeit des Lichts nimmt pro Meter um 13% ab, wobei x in m gemessen wird.
 - Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle drei Stunden, wobei x in Stunden gemessen wird.
- 19 Nachfolgend sind für vier Länder die Wachstumsfunktionen der Einwohnerzahlen gegeben. Dabei ist $E(t)$ die Einwohnerzahl (gemessen in Millionen Einwohnern) und t die Zeit (gemessen in Jahren ab 2000). Beschreibe jeweils anhand eines vollständigen Satzes, wie sich die Einwohnerzahl gemäß dieser Funktionen jährlich verändert!
- $E(t) = 42 \cdot 1,0127^t$
 - $E(t) = 1,34t + 93,21$
 - $E(t) = 23,5$
 - $E(t) = 27,4 \cdot 0,9866^t$
- 20 Gib jeweils an, ob es sich um einen linearen oder um einen exponentiellen Zusammenhang handelt. Schreibe dazu entweder L oder E hinter den Satz.
- Das Taschengeld wird jährlich um 10 Euro erhöht.
 - Die Bakterienkultur wächst alle 20 Minuten um 10% .
 - Das Kapital wird jedes Quartal mit $0,5\%$ verzinst.
 - Der Wasserstand sinkt nach jeweils 15 Minuten um 5 cm .
 - Die Umfragewerte einer Partei stiegen pro Monat um 2 Prozentpunkte .
 - Die Bevölkerung wächst jährlich um ca. $50\,000 \text{ Einwohner}$.

- Die Bevölkerung wächst jährlich um ca. 1,3 %.
- Die Bevölkerung verdoppelt sich alle 70 Jahre.
- Pro Jahrhundert steigt die Bevölkerung um ca. 1 Mio. Einwohner.
- Der Umsatz eines Unternehmens steigt pro Jahr um 20 %.
- Ein menschliches Haar wächst pro Tag um 0,4 mm.
- Der Wasserstand der Donau steigt pro Stunde um 2 cm.
- Die Anzahl an Bakterien verdreifacht sich alle fünf Stunden.

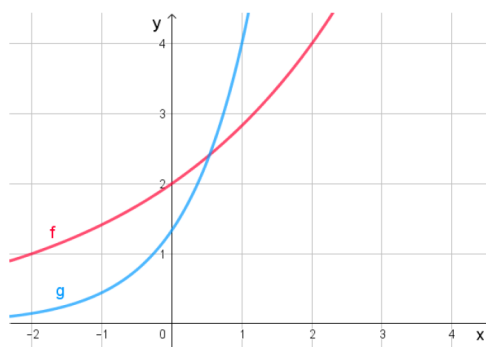
21 Gegeben ist die Funktion $f(x) = 5 \cdot 2^x$. Kreuze nachfolgend alle wahren Aussagen an.

- ☐ Wird x um 2 vergrößert, so verdoppelt sich der Funktionswert.
- ☐ Wird x um 1 vergrößert, so steigt der Funktionswert um 100 %.
- ☐ Wird die Variable x um 1 vergrößert, so verfünffacht sich der Funktionswert.
- ☐ Der Funktionsgraph schneidet die senkrechte Achse beim Wert 5.
- ☐ Wird x um 2 verkleinert, so sinkt der Funktionswert auf ein Viertel des ursprünglichen Werts.
- ☐ Im Intervall $[2, 3]$ ist die Funktion um denselben absoluten Wert angestiegen, wie im Intervall $[3, 4]$.
- ☐ Verkleinert man x um 1, so sinkt der Funktionswert um 50 %.

22 Kreuze an, ob es sich um eine exponentielle Zunahme oder Abnahme handelt.

- ☐ Zunahme ☐ Abnahme $f(x) = 20 \cdot 5^{0,5x}$
- ☐ Zunahme ☐ Abnahme $f(x) = 5 \cdot e^{-0,3x}$
- ☐ Zunahme ☐ Abnahme $f(x) = 0,4 \cdot 3^x$
- ☐ Zunahme ☐ Abnahme $f(x) = 3 \cdot e^{0,1x}$
- ☐ Zunahme ☐ Abnahme $f(x) = 7 \cdot 0,1^{2x}$

23 Im folgenden Koordinatensystem sind die Graphen der Exponentialfunktionen $f(x) = c \cdot a^x$ und $g(x) = d \cdot b^x$ eingezeichnet. Kreuze alle Aussagen an, die auf diese beiden Funktionen zutreffen.



- ☐ $c < d$ ☐ $c = d$ ☐ $c > d$
- ☐ $a < b$ ☐ $a = b$ ☐ $a > b$

24 Eine Exponentialfunktion der Form $f(x) = c \cdot a^x$ soll durch die Punkte $(x_1 | y_1)$ und $(x_2 | y_2)$ verlaufen. Erstelle allgemein anwendbare Formeln zur Berechnung von a und c . Die Formeln dürfen nur die Koordinaten der Punkte enthalten und sollen möglichst weit vereinfacht sein.

25 Kreuze nachfolgend alle wahren Aussagen an.

- ☐ Die Funktionen $f(x) = a^x$ und $g(x) = a^{-x}$ sind bezüglich der y -Achse gespiegelt.
- ☐ Der Graph der Funktion $f(x) = c \cdot a^x$ verläuft durch den Punkt $(0 \mid c)$.
- ☐ Die Graphen von $f(x) = 5 \cdot 3^x$ und $g(x) = 3 \cdot 2^x$ haben keinen Schnittpunkt.
- ☐ Zwei verschiedene Exponentialfunktionen der Form $f(x) = c \cdot a^x$ haben immer genau einen Schnittpunkt.
- ☐ Eine Exponentialfunktion der Form $f(x) = c \cdot a^x$ hat niemals eine Nullstelle.

26 Nachfolgend sind drei Wertetabellen gegeben. Gib jeweils an, ob es sich hier um eine lineare Abnahme, ein lineares Wachstum, eine exponentielle Abnahme oder ein exponentielles Wachstum handelt und begründe, woran man das erkennen kann.

a)

x	0	1	2	3
$f(x)$	0,2	0,6	1,8	5,4

b)

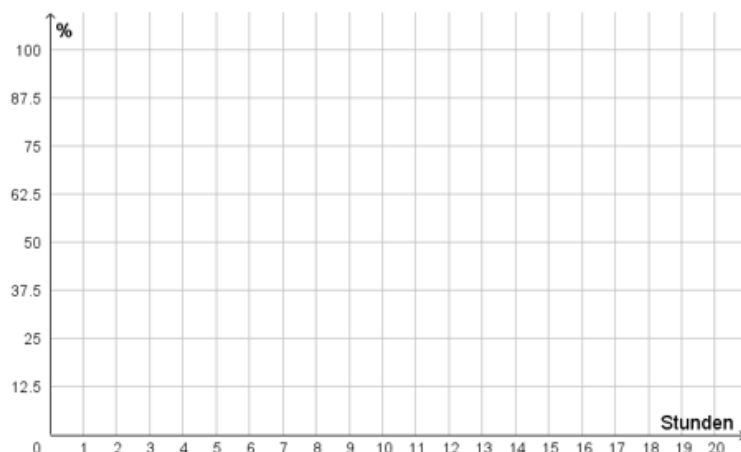
x	0	1	2	3
$f(x)$	0,7	2	3,3	4,6

c)

x	0	1	2	3
$f(x)$	5	2,5	1,25	0,625

27 Von einem bestimmten Medikament werden im Körper pro Stunde 13 % der noch vorhandenen Menge abgebaut.

- a) Berechne die Halbwertszeit dieses Medikaments.
- b) Stelle den Abbauverlauf grafisch dar. Gehe davon aus, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ noch 100 % des Medikaments im Körper waren.



28 Gegeben ist die Exponentialfunktion $f(x) = 4 \cdot 1,3^x$. Vervollständige die Lücken!

- Der Funktionsgraph schneidet die Ordinate beim Wert _____.
- Wird x um 2 verkleinert, so sinkt der Funktionswert auf _____ % des ursprünglichen Werts.
- Wird x um $\frac{1}{2}$ vergrößert, so steigt der Funktionswert um _____ %.

- An der Stelle 3,5 beträgt der Funktionswert _____.
- Den Wert 40 erreicht die Funktion an der Stelle _____.

- [29] Im Jahr 2000 hatte Mexiko 100,35 Mio. Einwohner. Zehn Jahre später waren es 112,32 Mio. Einwohner.
- a) Wie viele Menschen leben unter der Annahme eines linearen Bevölkerungswachstums voraussichtlich im Jahr 2050 in Mexiko?
- b) Wie viele Menschen leben unter der Annahme eines exponentiellen Bevölkerungswachstums voraussichtlich im Jahr 2050 in Mexiko?
- [30] Ein gewöhnliches Blatt Papier mit einer Dicke von 0,1 mm kann nur ca. sieben Mal in der Mitte gefaltet werden.
- a) Wie oft müsste man das Papier mindestens falten, damit der entstehende „Turm“ höher als 1 m ist?
- b) Wie dick wäre der „Turm“, wenn das Blatt 50 Mal gefaltet wird?
- c) Recherchiere im Internet nach einer vergleichbaren Größe aus der Realität, um sich das Ergebnis von Aufgabe b) besser vorstellen zu können.
- [31] Erstelle für die folgenden Sachverhalte jeweils eine geeignete Funktionsgleichung. Verwende für den Anfangswert die Bezeichnung $f(x)$ und für die unabhängige Variable die Bezeichnung x .
- a) Alle 3 Jahre wächst die Bevölkerung einer Stadt um 2000 Einwohner (x gemessen in Jahren).
- b) Die Lichtintensität nimmt in einem See pro Meter um 13,2% ab (x gemessen in Metern).
- c) Eine Bakterienkultur verdoppelt sich alle 200 Minuten (x gemessen in Stunden).
- [32] In einem bestimmten See halbiert sich die Intensität des Sonnenlichts unterhalb der Wasseroberfläche nach jeweils 5 m. Welcher Anteil des Sonnenlichts erreicht den Grund des Sees in 30 m Tiefe?

- 1 a) 26 %
b) 2017
c) 36,85 h
- 2 In 15,88 Jahren werden beide Länder jeweils 23,22 Mio. Einwohner haben.
- 3 a) 7,35 %
b) 15,877 m
- 4 a) $E(t) \approx 29,273 \cdot 1,00447^t$
b) 0,447 % pro Jahr
c) 33,46 Mio.
d) 2090
- 5 Diese Gleichung könnte die Entwicklung der Einwohnerzahl eines Landes beschreiben. Aktuell leben 18,5 Mio. Menschen in diesem Land. Pro Jahr wächst die Bevölkerung um 0,7 %. Die Variable t gibt an, nach wie vielen Jahren die Einwohnerzahl auf 21 Mio. gestiegen sein wird.
- 6 a) 7,0 mg
b) 14,8 mg
- 7 6,33 % pro Meter
- 8 2017 (tatsächlich kam es jedoch erst 2023 dazu)
- 9
- 10
- 11 a) 25 600
b) $N(t) = 50 \cdot 8^t$
c) ca. 4,76 h
- 12 ...
- 13 blaues Licht: ca. 74,1 %
rotes Licht: ca. 0,2 %
- 14 a) um 0,93 %
b) nach ca. 62,1 Jahren ab dem 1.1.2000, also Anfang 2062
- 15 ...
- 16 ...
- 17 ...
- 18 ...
- 19 a) Die Bevölkerung wächst jährlich um 1,27 %.
b) Die Bevölkerung wächst jährlich um 1,34 Millionen Einwohner.
c) Die Bevölkerung bleibt konstant.
d) Die Bevölkerung nimmt jährlich um 1,34 % ab.

- 20 ...
- 21 falsch, wahr, falsch, wahr, wahr, falsch, wahr
- 22 Zunahme, Abnahme, Zunahme, Zunahme, Abnahme
- 23 $c > d$ und $a < b$
- 24 Ansatz: $c \cdot a^{x_1} = y_1, c \cdot a^{x_2} = y_2 \dots$ 1. Gleichung nach c umformen und in 2. Gleichung einsetzen
... Man erhält: $a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$.
Dieses Ergebnis setzt man nun in die Umformung der 1. Gleichung ein und erhält: $c = \frac{y_1}{\left(\sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}\right)^{x_1}}$
- 25 wahr, wahr, falsch, wahr, wahr
- 26 exponentielle Zunahme, lineare Zunahme, exponentielle Abnahme
- 27 ...
- 28 ...
- 29 ...
- 30 ...
- 31 ...
- 32 ...