Grundwissen Mathematik Klasse 9

1. Wurzeldefinition und irrationale Zahlen (MH 1 S. 24f. / MH2 S. 12f.)

- Wurzel als nichtnegative Lösung der reinquadratischen Gleichung

  (z:B: $x = \sqrt{0{,}25}$ $(x > 0)$ $\Leftrightarrow x^2 = 0{,}25 \Leftrightarrow x = 0{,}5$)
- Begriffe Wurzel, Radikand, Radizieren
- $\sqrt{2}$ (und ähnliche) ist irrationale Zahl, also kein herkömmlicher Bruch
- Rechnen mit Wurzeln ($\sqrt{a^2} = |a|$; Grundrechenarten $+ - \bullet \div$, partielles radizieren

Aufgaben:

1. Ein Quadrat besitzt den Flächeninhalt 32cm^2. Bestimme seine Seitenlänge s!

Lösung: Quadrat: 32cm²=s² $\rightarrow$ s $= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 4\sqrt{2}\,cm \approx 5{,}66\,cm$

2. Löse: a) $x^2 = \dfrac{25}{121}$ b) $x^2 + 3 = 21$

Lösungen: a) $\sqrt{x^2} = \sqrt{\dfrac{25}{121}} \rightarrow |x| = \sqrt{\dfrac{25}{121}} \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{25}{121}} \rightarrow x_1 = \frac{5}{11}$ und $x_2 = -\frac{5}{11}$

b)
$x^2 + 3 = 21$ | -3

$x^2 = 18$ | $\sqrt{}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{18}$

$|x| = \sqrt{18} \rightarrow x = \pm\sqrt{18} = \pm\sqrt{9 \cdot 2} = \pm 3\sqrt{2} \rightarrow x_1 = 3\sqrt{2}$ und $x_2 = -3\sqrt{2}$

3. Vereinfache: a) $\sqrt{(-9)^2} =$ b) $\sqrt{18 \cdot b^2 \cdot c^4} =$ c) $(3 \cdot \sqrt{5} + 7\sqrt{5}) : 2 =$

Lösungen:

a) $\sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81} = 9$

b) $\sqrt{18 \cdot b^2 \cdot c^4} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot b^2 \cdot c^4} = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot b \cdot c^2$

c) $(3 \cdot \sqrt{5} + 7\sqrt{5}) : 2 = (10 \cdot \sqrt{5}) : 2 = (10 \cdot \sqrt{5}) : 2 = 5 \cdot \sqrt{5}$

2. Lösen quadratischer Gleichungen (MH 2 S. 30 ff)

- Lösungsformel: $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Zahl der Lösungen mit Hilfe der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ bestimmen
- Lösen von Gleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen (Biquadratische Gleichungen, Bruchgleichungen)

Aufgaben

1. Bestimme die Anzahl der Lösungen folgender Gleichungen

a) $4x^2 – 5x – 6 = 0$ b) $x^2 + 3 = 2x$ c) $x^2 + x + 0,25 = 0$

Lösungen:

a) a= 4; b= –5; c= –6 $\rightarrow$ $D = b^2 - 4ac$ =25 – 4·4·(–6)=121>0→zwei Lösungen

b) a= 1; b= –2 (!); c= 3 $\rightarrow$ $D = b^2 - 4ac$ =4 – 4·1·3= –8<0 → keine Lösung

c) a= 1; b= 1; c= 0,25 $\rightarrow$ $D = b^2 - 4ac$ =1–4·1·0,25=0 → eine Lösung

2. Löse die Gleichungen aus 1.

Lösungen:

a) a= 4; b= –5; c= –6 $\rightarrow$ $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6)}}{2 \cdot 4}$

$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} \rightarrow x_1 = \frac{5+11}{8} = 2$ und $x_2 = \frac{5-11}{8} = -\frac{3}{4}$

b) keine Lösung! ☠

c) a= 1; b= 1; c= 0,25 $\rightarrow$ $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,25}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{-1 \pm 0}{2} \rightarrow x_{1/2} = -\frac{1}{2}$ (nur eine Lösung!)

3. Löse die Gleichungen: a) $x - 1 = \frac{1-x}{x-3}$ b) $2t^4 – 8 – 6t^2 = 0$

Lösungen:

a) $x - 1 = \frac{1-x}{x-3}$ | ·(x–3)

(x – 1)·(x – 3) = 1 – x | ausmultiplizieren!

x^2–3x – x + 3 = 1 – x | –1+x

x^2–3x + 2 =0

a=1; b= –3; c=2 → $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow x_1=2$ und $x_2=1$

b) $2t^4 - 8 - 6t^2 = 0$ | :2

$t^4 - 4 - 3t^2 = 0$ | Substitution: $t^2=x$

$x^2 - 4 - 3x = 0$ | Sortieren

$x^2 - 3x - 4 = 0$ | Lösungsformel

a=1; b= –3; c= –4 → $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{3 \pm 5}{2} \rightarrow x_1= 4$ und $x_2= -1$

Rücksubstitution:

mit x_1: $t^2=4 \rightarrow t_1=2$ und $t_2= -2$

mit x_2: $t^2= -1 \rightarrow$ keine weiteren Lösungen.

3. Binomische Formeln

- Erste Binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Zweite Binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Dritte Binomische Formel: $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Aufgaben

1. Kürze folgenden Bruchterm vollständig: $\frac{2x+2}{x^2-1}$

Lösung: $\frac{2x+2}{x^2-1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x-1}$

2. Fülle die Lücken: $a^2 + \_\_\_ + \_\_\_ = (\underline{\ a\ } + 2)^2$ dann Formel anwenden: (a+2)²=a²+4a+4

4. Parabeln / Quadratische Funktionen (MH 2, S.52-54)

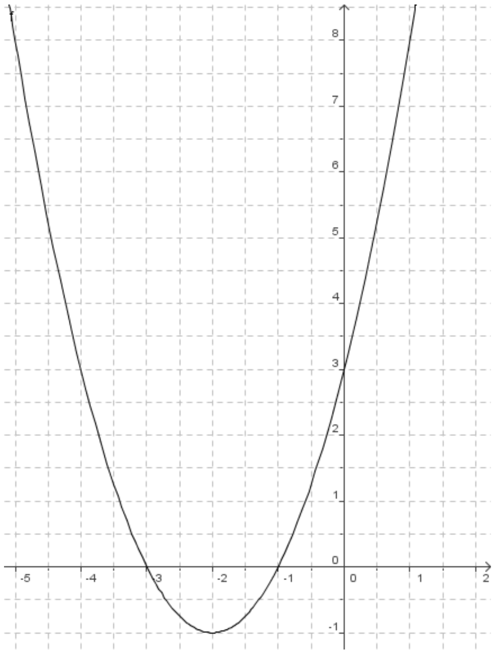
- Zeichnen von Parabeln (Bestimmung des Scheitelpunkts sowie der Form und Lage der Parabel)
- Berechnung von Nullstellen sowie den Schnittpunkten von Parabeln bzw. Parabeln und Geraden

Aufgaben

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 3$ mit maximalem Definitionsbereich

a) Zeichne den Graphen G_f der Funktion im Bereich $-5 \leq x \leq 1$

Lösung:



b) Gib den Wertebereich von f an

Lösung: $W_f=[-1;+\infty[$

c) Berechne die Nullstellen von f

Lösung: $f(x) = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$ (mit Lösungsformel)

a=1; b= 4; c=3 $\rightarrow$ $x_1= -1$ und $x_2= -3$

d) Berechne die Schnittpunkte des Graphen von f mit der Geraden $g(x)=x+7$

Lösung: $f(x)=g(x) \rightarrow \rightarrow x^2 + 4x + 3 = x+7$ (mit Lösungsformel)

a=1; b=3; c= –4 $\rightarrow$ $x_1= -4$ und $x_2= 1$

$y_1=f(x_1)=f(-4)= (-4)^2 + 4\cdot(-4) + 3 = 3$ Schnittpunkt: $S_1(-4|3)$

$y_2=f(x_2)= 8$ Schnittpunkt: $S_2(1|8)$

5. Potenzen und Potenzgesetze

- n-te Wurzel als nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad (a \geq 0)$
- Termvereinfachung und Lösen von Gleichungen mit Hilfe der Potenzgesetze (MH1 S.26f MH2 S. 37)

Aufgaben:

1. Vereinfache: a) $\sqrt[3]{z \cdot \sqrt[4]{z}} =$ $\qquad$ b) $y^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-0,75} \cdot \left(\sqrt[4]{y}\right)^5 =$ $\qquad$ c) $u^{-0,5} : \left(u^{-\frac{1}{3}} \cdot u^{-\frac{1}{6}}\right) =$

Lösungen:

a) $\sqrt[3]{z \cdot \sqrt[4]{z}} = \sqrt[3]{z \cdot z^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[3]{z^{\frac{5}{4}}} = \left(z^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = z^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{z^5}$

b) $y^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-0,75} \cdot \left(\sqrt[4]{y}\right)^5 = y^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-0,75} \cdot y^{\frac{5}{4}} = y^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-0,75} \cdot y^{\frac{5}{4}} = y^{-\frac{1}{2}-0,75+\frac{5}{4}} = y^0 = 1$ (für $y \neq 0$)

c) $u^{-0,5} : \left(u^{-\frac{1}{3}} \cdot u^{-\frac{1}{6}}\right) = u^{-0,5} : \left(u^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}\right) = u^{-0,5} : \left(u^{-\frac{3}{6}}\right) = u^{-0,5} : \left(u^{-\frac{1}{2}}\right) = u^{-0,5} \cdot \left(u^{+\frac{1}{2}}\right) =$
$u^0 = 1$ (für $u \neq 0$)

2. Löse: $\qquad$ a) $\sqrt[5]{x} = 3$ $\qquad$ b) $x^{\frac{3}{2}} = 27$ $\qquad$ c) $(2x+1)^{-3} = 8$

Lösungen:

a) $\sqrt[5]{x} = 3 \mid (\ )^5 \rightarrow x = 3^5 \rightarrow x = 243$

b) $x^{\frac{3}{2}} = 27 \mid (\ )^{\frac{2}{3}} \rightarrow x = 27^{\frac{2}{3}} \rightarrow x = 9$

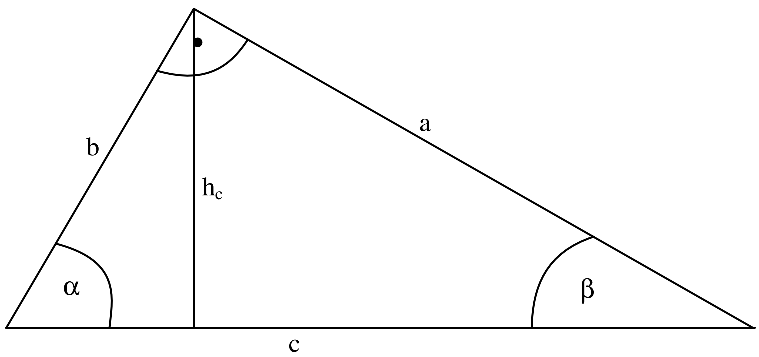
c) $(2x+1)^{-3} = 8 \mid (\ )^{-\frac{1}{3}} \rightarrow 2x+1 = 8^{-\frac{1}{3}} \rightarrow 2x+1 = \frac{1}{2} \rightarrow x = -\frac{1}{4}$

6. Trigonometrie (MH3 S. 24 u. MH3 S. 54)

- Satz des Pythagoras
- sin cos tan – Definitionen und Anwendung im rechtwinkligen Dreieck, Werte für 0° und 90°

Aufgaben

1. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABC (rechter Winkel ist γ)



$\alpha = 11{,}5°$ und $h_c = 129\text{cm}$

2. Bestimme die Seitenlänge eines Quadrates mit der Diagonalen d = 7cm
3. Bestimme die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge s

Lösungen

1. $\beta = 90° - \alpha \rightarrow \beta = 78{,}5°$

$\sin\alpha = \frac{h}{b} \rightarrow b = \frac{h}{\sin\alpha} = 129\text{cm} : 0{,}1993679 = 647{,}04487\text{cm} \approx 647\text{cm}$

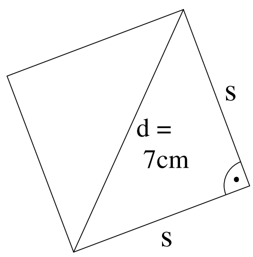
$\cos\alpha = \frac{b}{c} \rightarrow c = \frac{b}{\cos\alpha} = 647\text{cm} : 0{,}979924 = 660{,}30059\text{cm} \approx 660\text{ cm}$

$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 660\text{cm} \cdot 129\text{cm} = 42570\text{cm}^2 \approx 42{,}6\text{dm}^2$

einerseits $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ andererseits $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \rightarrow c \cdot h_c = a \cdot b \rightarrow a = \frac{c \cdot h_c}{b} = 131{,}59196\text{cm} \approx 132\text{cm}$

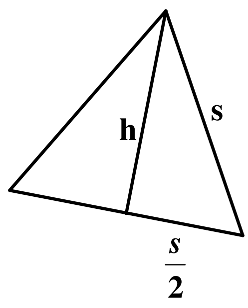
2. Satz des Pythagoras: $d^2 = s^2 + s^2 = 2s^2 \rightarrow s^2 = \frac{49cm^2}{2} = 24{,}5cm^2$

$\rightarrow s = +\sqrt{24{,}5cm^2} \approx 4{,}95cm$



3. Satz des Pythagoras: $s^2 = h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{s^2}{4}$

$\rightarrow h^2 = s^2 - \frac{s^2}{4} = \frac{3}{4}s^2 \rightarrow h = +\sqrt{\frac{3}{4}s^2} = \sqrt{\frac{s^2}{4} \cdot 3} = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3}$



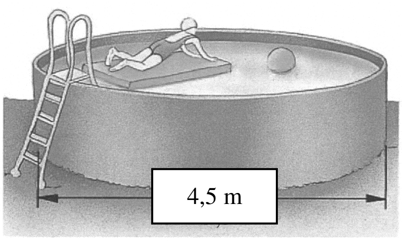
7. Körpergeometrie (MH3 S. 43ff)

- Volumen und Oberfläche von geraden Prismen und geraden Kreiszylindern
- Volumen von Pyramiden und Kegeln

Aufgaben

1. Berechne Volumen und Oberfläche eines geraden Prismas mit einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge 3cm als Grundfläche und der Höhe 20cm (Toblerone-Schachtel).

2. Wie viel Folie wird für den Boden und die Mantelfläche des Schwimmbeckens benötigt, das maximal $20m^3$ Wasser enthält?



3. Die Cheops-Pyramide bei Kairo mit der quadratischen Grundfläche 53.000 m² besteht aus ca. 2500000 Steinquadern mit durchschnittlich $1{,}04m^3$ Volumen. Berechne die Höhe der Pyramide.

4. Ein kegelförmiges Sektglas hat den Randdurchmesser 6cm und eine Höhe von 15cm. Wieviele dieser Gläser können mit einer Sektflasche (0,75l) gefüllt werden?

Lösung:

1. Höhe des gleichseitigen Dreiecks: $h_\Delta = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,cm \approx 2{,}6cm$ (siehe Aufgabe 6.3)

$\rightarrow$ Inhalt der Grundfläche : $G = A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 3cm \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3}\,cm = \frac{9}{4}\sqrt{3}\,cm^2$

$\rightarrow$ Volumen des Prismas: $V = G \cdot h = \frac{9}{4}\sqrt{3}\,cm^2 \cdot 20cm = 45\sqrt{3}\,cm^3 \approx 77{,}9cm^3$

2. Inhalt der Grundfläche : $G = A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi = (2{,}25m)^2 \cdot \pi = 5{,}0625\pi\, m^2 \approx 15{,}90\ m^2$

$\rightarrow$ Höhe des Schwimmbeckens: $V_{Zylinder} = G \cdot h \ \rightarrow\ h = \frac{V}{G} \approx \frac{20m^3}{15{,}90m^2} \approx 1{,}26m$

$\rightarrow$ Mantelfläche: $M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot 2{,}25m \cdot \pi \cdot 1{,}26m \approx 21{,}77m^2$

$\rightarrow$ benötigte Folie: $G + M \approx 15{,}90m^2 + 21{,}77m^2 = 37{,}67m^2$

3. Volumen der Pyramide: $\mathrm{V} = 2500000 \cdot 1{,}04\mathrm{m}^3 = 2\,600\,000\mathrm{m}^3$

$\rightarrow$ mit $V_{Pyramide} = \frac{1}{3}G \cdot h$ gilt: $h = \frac{3V}{G} = \frac{7800000m^3}{53000m^2} \approx 147m$

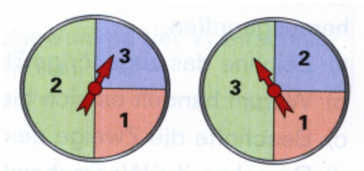
4. Volumen des Glases: $V_{Gesamt} = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}(3cm)^2 \cdot \pi \cdot 15cm \approx 141{,}37cm^3$

$\rightarrow \frac{0{,}75l}{141{,}37cm^3} = \frac{750cm^3}{141{,}37cm^3} = 5{,}3....$ $\rightarrow$ es können 5 Gläser gefüllt werden

8. Stochastik

- Mehrstufige Zufallsexperimente
- Erstellen von Baumdiagrammen
- Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der ersten und zweiten Pfadregel

Aufgabe:



Die Klasse 9e hat ein doppeltes Glücksrad gebaut. Ein Spiel besteht daraus, dass zuerst das linke, dann das rechte Glücksrad gedreht wird. Aus den beiden angezeigten Ziffern wird anschließend die kleinstmögliche zweistellige Zahl gebildet.

a) Zeichne ein sauberes und vollständig beschriftetes Baumdiagramm für dieses Zufallsexperiment!

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die gebildete Zahl gerade?

Lösung

a)

				Wahrscheinlichkeit (1.Pfadregel)	gebildete Zahl
$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$	11
		$\frac{1}{4}$	2	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$	12
		$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$	13
$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$	12
		$\frac{1}{4}$	2	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$	22
		$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	23
$\frac{1}{4}$	3	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$	13
		$\frac{1}{4}$	2	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$	23
		$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$	33

Gerade Zahlen

b) P(die gebildete Zahl ist gerade) $= \frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}=0{,}3125=31{,}25\%$

Zweite Pfadregel