Grundwissen Mathematik Klasse 8

1. Funktionen allgemein (Mathehelfer 2: S.47)

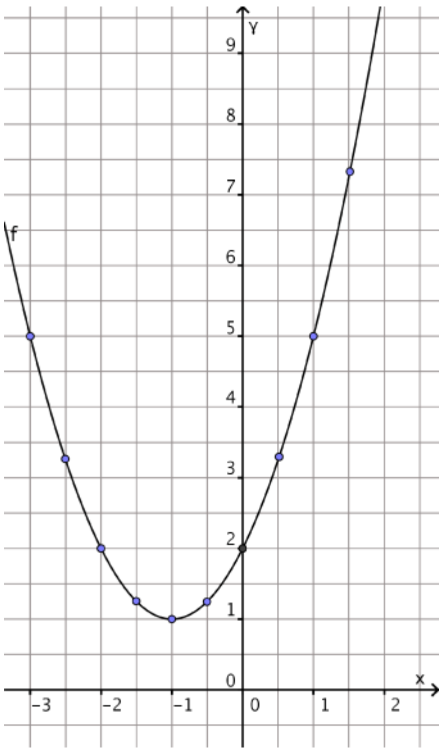
- Erstellen einer Wertetabelle bei gegebener Funktionsgleichung
- Zeichnen des Funktionsgraphen
- Ablesen von Wertepaaren (x / f(x)) aus einem Graphen
- Berechnung von Nullstellen einer Funktion und von Schnittpunkten zweier Funktionsgraphen

Aufgaben

1. Erstelle eine Wertetabelle und zeichne den Graph der Funktion $f(x)=(x+1)^2+1$ für $-3 \leq x \leq 2$

Lösung:

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	5	3,25	2	1,25	1	1,25	2	3,25	5	7,25	10

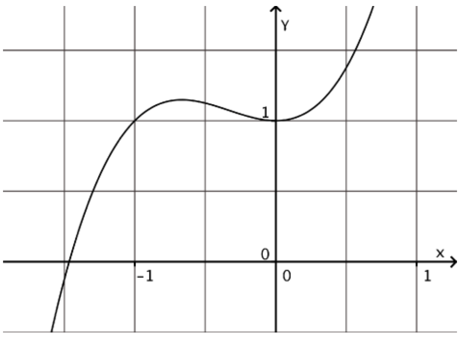


2. Lies aus dem gegebenen Graph der Funktion g folgende Zahlen ab:

a) g(0,5)

b) die Stelle(n) x, für die g(x) = 1 gilt

c) die Nullstelle(n)

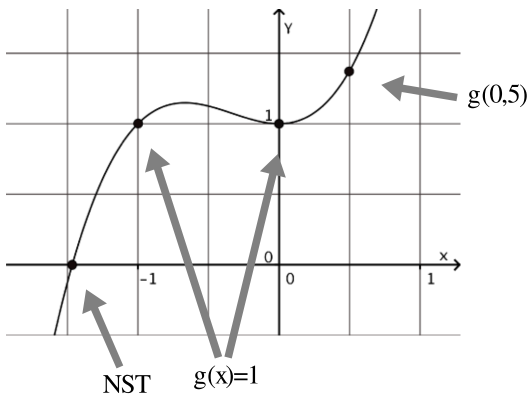


Lösung:

a) $g(0{,}5)\approx 1{,}4$

b) $g(-1)=g(0)=1$

c) NST: $x\approx -1{,}5$



3. Berechne die Nullstelle(n) der Funktion $h(x)=\frac{2x+3}{4}$ sowie die Schnittpunkte der Graphen von h und $k(x)=\frac{2}{3}x$

Lösung:

NST: $h(x)=0 \leftrightarrow \frac{2x+3}{4}=0 \leftrightarrow 2x+3=0 \leftrightarrow 2x=-3 \leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

Schnittpunkt(e): $h(x)=k(x) \leftrightarrow$ $\frac{2x+3}{4}=\frac{2}{3}x \quad | \cdot 4$

$$2x+3=\frac{8}{3}x \quad | -2x$$

$$3=\frac{2}{3}x \quad | :\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{9}{2}$$

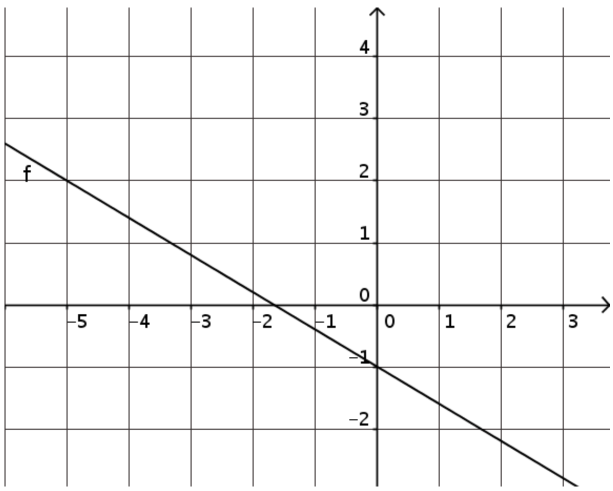
Einsetzen in eine der Funktionen: z.B. $k\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}=3 \rightarrow$ Schnittpunkt $S(4{,}5/3)$

2. Lineare Funktionen (Mathehelfer 2: S.50; Achtung, hier wird der Y-Achsenabschnitt **n** statt **t** abgekürzt)

- Begriff der Steigung, des Steigungsdreiecks und des Y-Achsenabschnitt
- Ablesen des Funktionsterms bei gegebenem Funktionsgraph (Gerade)
- Zeichnen des Graphen bei gegebener Funktionsgleichung

Aufgaben:

1. Lies den Funktionsterm der linearen Funktion f ab!
2. Zeichne den Graph der Funktion g(x)= 1,5x + 1



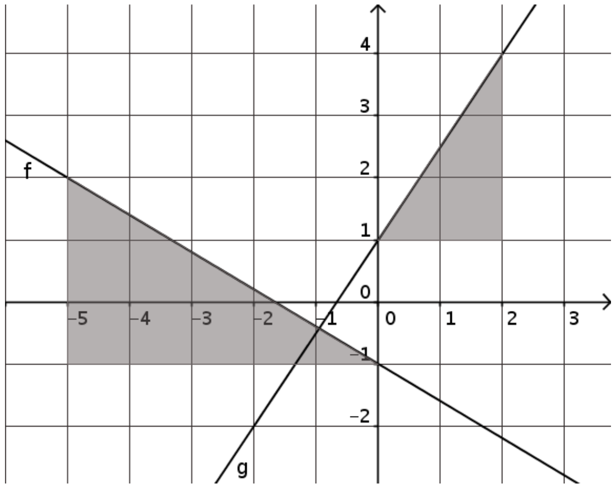
Lösung:

1. Steigungsdreieck liefert $m=-\frac{3}{5}$

   Y-Achsenabschnitt ist -1, also

   $f(x)=-\frac{3}{5}x-1$

2. siehe Graphik



3. Bestimmung des Funktionsterms einer linearen Funktion bei zwei gegebenen Punkten des Graphen bzw. gegebener Steigung und einem gegebenen Punkt (Mathehelfer 2: S.51)

Aufgaben:

Bestimme den Funktionsterm der linearen Funktion f, deren Graph durch die Punkte P(-1 / 2) und Q(4 /-5) verläuft!

Lösung:

f(x) ist von der Form $f(x)=m\cdot x+t$

1. Schritt: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_P-y_Q}{x_p-x_Q}=\frac{2-(-5)}{-1-4}=-\frac{7}{5}$

jetzt also bekannt: $f(x)=-\frac{7}{5}x+t$

2.Schritt: P liegt auf dem Graphen von f, also gilt f(-1) = 2, d.h. $-\frac{7}{5}\cdot(-1)+t=2$

$\leftrightarrow \quad \frac{7}{5}+t=2$

$\leftrightarrow \quad t=\frac{3}{5}$

Ergebnis: Funktionsterm: $f(x)=-\frac{7}{5}x+\frac{3}{5}$

Test mit Q: $f(4)=-\frac{7}{5}\cdot 4+\frac{3}{5}=-\frac{28}{5}+\frac{3}{5}=-\frac{25}{5}=-5=y_Q$

4. Direkte und Indirekte Proportionalität

- Quotienten- bzw. Produktgleichheit der zugeordneten Größen
- Zuordnungsvorschrift

Aufgaben:

1. Von welcher Art können die durch die Tabellen gegebenen Zuordnungen sein? Begründe deine Antwort. Gib die Zuordnungsvorschrift an und ergänze die fehlenden Werte.

a)

x	0,8	2	3	3,2	
y		42	28		24

b)

x		6,75	8,1	10,8	11,7
y	0,4	0,75		1,2	

Lösung:

a) Für die gebenen Wertepaare gilt $2 \cdot 42 = 3 \cdot 28 = 84$. Wegen dieser Produktgleichheit liegt eine umgekehrt proportionale Zuordnung mir der Zuordnungsvorschrift $y = \frac{84}{x}$. Daraus ergeben sich die fehlenden Werte:

x	0,8	2	3	3,2	**3,5**
y	**105**	42	28	**26.25**	24

b) Für die gebenen Wertepaare gilt $\frac{0,75}{6,75} = \frac{1,2}{10,8} = \frac{1}{9}$. Wegen dieser Quotientengleichheit liegt eine direkt proportionale Zuordnung mir der Zuordnungsvorschrift $y = \frac{1}{9} \cdot x$. Daraus ergeben sich die fehlenden Werte:

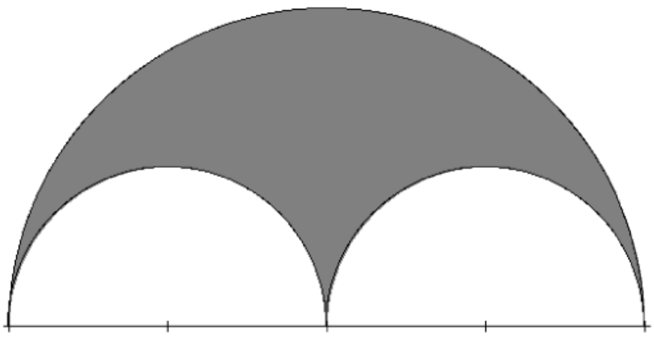
x	**3,6**	6,75	8,1	10,8	11,7
y	0,4	0,75	**0,9**	1,2	**1,3**

5. Umfang und Fläche des Kreises (Mathehelfer 3: S.38)

- Kenntnis und Anwendung der Umfangs- und Flächenformel

Aufgabe:

Berechne Umfang und Flächeninhalt der gefärbten Fläche!



Lösung:

1. Umfang:

Die Fläche ist durch einen großen Halbkreis mit Radius $r_{\text{groß}} = 3\text{cm}$ und zwei Halbkreise mit Radius $r_{\text{klein}} = 1{,}5\,\text{cm}$ begrenzt.

$$U_{\text{Fläche}} = \frac{1}{2} \cdot U_{\text{großer Kreis}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot U_{\text{kleiner Kreis}} = \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot r_{\text{groß}} \cdot \pi\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot r_{\text{klein}} \cdot \pi\right) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot 3\text{cm} \cdot \pi\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot 1{,}5\,\text{cm} \cdot \pi\right) = 3\text{cm} \cdot \pi + 3\text{cm} \cdot \pi = 6\pi\,\text{cm} \approx (6 \cdot 3{,}14)\text{cm} = 18{,}84\ \text{cm}$$

2. Flächeninhalt:

Der Flächeninhalt ergibt sich durch Subtraktion zweier kleiner Halbkreise von einem großen Halbkreis.

$$A_{\text{Fläche}} = \frac{1}{2} \cdot A_{\text{großer Kreis}} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot A_{\text{kleiner Kreis}} = \frac{1}{2} \cdot \left((r_{\text{groß}})^2 \pi\right) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left((r_{\text{klein}})^2 \cdot \pi\right) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left((3\text{cm})^2 \cdot \pi\right) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left((1{,}5)^2 \cdot \pi\right) = 4{,}5\,\text{cm}^2 \cdot \pi - 2{,}25\,\text{cm}^2 \cdot \pi = 2{,}25 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 7{,}07\,\text{cm}^2$$

6. Lösung von Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten
(Mathehelfer 2: S.24-25)

- Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren, graphische Lösung

Aufgabe:

Löse das folgende Gleichungssystem rechnerisch und zeichnerisch

I) $-5x+y=-3$

II) $3x-7=-2y$

Lösung:

Mit dem Einsetzungsverfahren::

I) nach y auflösen: $y=5x-3$ (*)

Einsetzen in II): $3x-7=-2(5x-3)$

$3x-7=-10x+6$

$13x=13$, also x = 1

Einsetzen in (*) $y=5\cdot1-3$, also y = 2

Lösung: x = 1 ; y = 2

Mit dem Additionsverfahren:

Gleichungen sortieren: I) $-5x+y=-3$

II) $3x+2y=7$

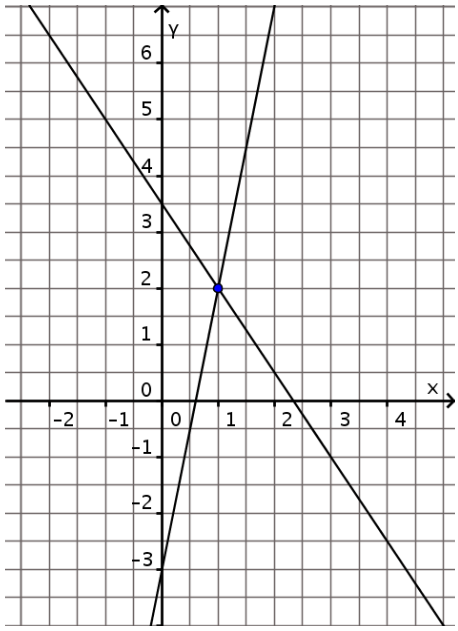
Gleichungen geeignet verändern I)·(-2) $10x-2y=6$

II) $3x+2y=7$

Addieren I) + II) $13x+0y=13$

x = 1, einsetzen in I) oder II) liefert y = 2

Zeichnerisch:



Beide Gleichungen nach y auflösen:

I) $y = 5x - 3$

II) $y = -1{,}5\,x + 3{,}5$

Die beiden zugehörigen Geraden zeichnen und Schnittpunkt ablesen:

Schnittpunkt S(1 / 2), also Lösung x = 1, y = 2

7. Definition der Laplace-Wahrscheinlichkeit, Begriffe, Schreibweise

- Ergebnis, Ereignis, günstige Ergebnisse, mögliche Ergebnisse, Zählprinzip

Aufgabe:

a) Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 bilden, wenn jede Ziffer in jeder Zahl nur einmal vorkommt.

b) Wie groß ist bei zufälliger Auswahl einer dieser Zahlen die Wahrscheinlichkeit, dass sie mit einer zwei beginnt?

Lösung:

a) Für die Hunderterstelle der Zahl sind fünf Ziffern möglich, für die Zehnerstelle dann noch vier und für die Einerstelle bleiben drei mögliche Ziffern übrig. Nach dem Zählprinzip sind also $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ verschiede Zahlen möglich.

b) Unter den 60 möglichen Ergebnissen sind nur die günstig, die mit der Ziffer 2 beginnen. Somit ist für die Hunderterstelle der Zahl nur diese eine Ziffer möglich, für die Zehnerstelle bleiben vier und für die Einerstelle drei mögliche Ziffern. Nach dem Zählprinzip sind also $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$ Zahlen günstig.

Definition der Laplace-Wahrscheinlichkeit: $P(\text{Ereignis}) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$.

In diesem Fall also: $P(\text{Zahl beginnt mit zwei}) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 20\,\%$

8. Rechnen mit Bruchtermen (Mathehelfer 2: S.10-11)

- Kürzen und Erweitern von Bruchtermen
- Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren von Bruchtermen

Aufgaben:

1. Kürze soweit wie möglich

a) $\frac{x^3 - x^2y}{x^2 - xy}$ b) $\frac{a^2b - a^3}{a^2 - ab}$ c) $\frac{2st^2 + 3st}{6t + 9}$

Lösung

a) $\frac{x^3 - x^2y}{x^2 - xy} = \frac{x^2(x-y)}{x(x-y)} \underset{(x-y)}{=} \frac{x^2}{x} \underset{x}{=} x$

b) $\frac{a^2b - a^3}{a^2 - ab} = \frac{a^2(b-a)}{a(a-b)} \underset{a}{=} \frac{a(b-a)}{(a-b)} = \frac{-a(a-b)}{(a-b)} \underset{(a-b)}{=} -a$

c) $\frac{2st^2 + 3st}{6t + 9} = \frac{st(2t+3)}{3(2t+3)} \underset{(2t+3)}{=} \frac{st}{3}$

2. Berechne und vereinfache soweit wie möglich

a) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x-1}$ b) $\frac{a+1}{2a + a^2} + \frac{1}{a+2}$ c) $\frac{4x - 3y}{x - 2y} : \frac{6y - 8x}{y - 2x}$

d) $3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x}$ e) $\frac{2u}{u+2} - \frac{1}{u} : (4 + 2u)$

Lösung:

a) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} = \frac{1 \cdot (x-1)}{x \cdot (x-1)} - \frac{2 \cdot x}{x \cdot (x-1)} = \frac{x - 1 - 2x}{x \cdot (x-1)} = \frac{-x-1}{x \cdot (x-1)} = \frac{-x-1}{x^2 - x}$

b) $\frac{a+1}{2a + a^2} + \frac{1}{a+2} = \frac{a+1}{2a + a^2} + \frac{1}{2+a} = \frac{a+1}{2a + a^2} + \frac{a}{a(2+a)} = \frac{a+1}{2a + a^2} + \frac{a}{2a + a^2} = \frac{2a+1}{2a + a^2}$

c) $\frac{4x-3y}{x-2y}:\frac{6y-8x}{y-2x} = \frac{4x-3y}{x-2y}\cdot\frac{y-2x}{6y-8x} = \frac{(4x-3y)\cdot(y-2x)}{(x-2y)\cdot 2(3y-4x)} = \frac{-(3y-4x)\cdot(y-2x)}{(x-2y)\cdot 2(3y-4x)} =$

$\frac{-(y-2x)}{(x-2y)\cdot 2} = \frac{2x-y}{2x-4y}$

d) $3+\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x} = \frac{3\cdot x\cdot(1+x)}{x\cdot(1+x)}+\frac{1\cdot(1+x)}{x\cdot(1+x)}+\frac{1\cdot x}{x\cdot(1+x)} = \frac{3\cdot x\cdot(1+x)+(1+x)+x}{x\cdot(1+x)} =$

$\frac{3x+3x^2+1+x+x}{x\cdot(1+x)} = \frac{3x^2+5x+1}{x\cdot(1+x)}$

e) $\frac{2u}{u+2}-\frac{1}{u}:(4+2u) = \frac{2u}{u+2}-\frac{1}{u\cdot(4+2u)} = \frac{2u}{u+2}-\frac{1}{2u\cdot(2+u)} = \frac{2u\cdot 2u}{2u\cdot(u+2)}-\frac{1}{2u\cdot(u+2)} =$

$\frac{4u^2-1}{2u\cdot(u+2)}$

9. Lösen einfacher Bruchgleichungen (Mathehelfer 2: S.28)

- Mit dem Hauptnenner multiplizieren
- „Über-Kreuz-Multiplizieren“

Aufgaben:

Löse die Gleichungen!

a) $\frac{2}{x+1}=3$ b) $\frac{1}{2}-\frac{2}{x}=\frac{4}{9}$ c) $\frac{2x+3}{4-x}=1$

e) $\frac{x}{x+2}=\frac{3+4x}{4x}$ f) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2x}{2x^2+2x}$ g) $\frac{0{,}75x-4}{2x+2}=0$

Lösungen

a) $\frac{2}{x+1}=3 \quad | \cdot(x+1)$

$2=3x+3$

$x=-\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2}-\frac{2}{x}=\frac{4}{9}$

$\frac{x-4}{2x}=\frac{4}{9} \quad | \cdot 2x \ ; \ \cdot 9$

$9(x-4)=4\cdot 2x$

x = 36

c) $\frac{2x+3}{4-x}=1 \quad | \quad \cdot(4-x)$

$\cdot(x+2)$; $\cdot 4x$

$2x+3=4-x$

$3x=1$

$x=\frac{1}{3}$

d) $\frac{x}{x+2}=\frac{3+4x}{4x} \quad |$

$x\cdot 4x=(3+4x)\cdot(x+2)$

$4x^2=3x+6+4x^2+8x \quad | \quad -4x^2$

$0=11x+6$

$x=-\frac{6}{x}$

e) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2x}{2x^2+2x} \quad |$ linke Seite addieren

Null !

$\frac{x+1}{x\cdot(x+1)}+\frac{x}{x\cdot(x+1)}=\frac{x}{x^2+x}$

$\frac{x+1+x}{x\cdot(x+1)}=\frac{x}{x\cdot(x+1)} \quad | \quad \cdot x(x+1)$

$2x+1=x$

$x = 1$

g) $\frac{0{,}75x-4}{2x+2}=0 \quad |$ Bruch ist Null, wenn Zähler

$0{,}75x-4=0 \quad | \quad +4$

$0{,}75x=4 \quad | \quad :\frac{3}{4}$

$x=5\frac{1}{3}$

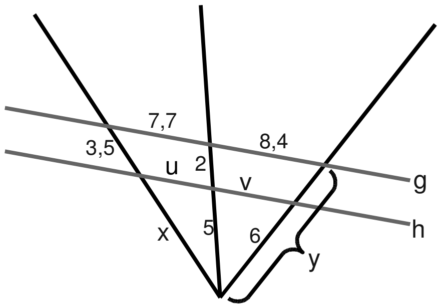
10. Strahlensatz in V- und X-Figur (Mathehelfer 3: S.52)

- Berechnung fehlender Strecken mit Hilfe von Verhältnisgleichungen

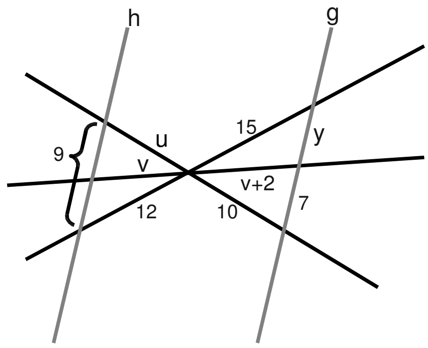
Aufgaben:

In den folgenden Figuren gilt jeweils g $\parallel$ h. Berechne die fehlenden Streckenlängen!

a)



b)



Lösung:

a) Mit dem mittleren Strahl und dem rechten Teil der Parallelen gilt: $\frac{v}{8{,}4}=\frac{5}{7} \quad \rightarrow \quad v=\frac{5}{7}\cdot 8{,}4=6$

Die zwei rechten Strahle liefern: $\frac{y}{6}=\frac{7}{5} \quad \rightarrow \quad y=\frac{7}{5}\cdot 6=8{,}4$

Analog v gilt für u: $\frac{u}{7{,}7}=\frac{5}{7} \quad \rightarrow \quad u=\frac{5}{7}\cdot 7{,}7=5{,}5$

Für x gilt: $\frac{3{,}5+x}{x}=\frac{7}{5} \quad \rightarrow \quad (3{,}5+x)\cdot 5=7\cdot x \quad \rightarrow \quad 17{,}5+5x=7\cdot x \quad \rightarrow \quad 2x=17{,}5 \quad \rightarrow \quad x=8{,}75$

b) Für u gilt: $\frac{u}{10}=\frac{12}{15} \quad \rightarrow$ u = 8

y ist Teil der rechten Parallele: $\frac{y+7}{9}=\frac{15}{12} \quad \rightarrow \quad y+7=\frac{15}{12}\cdot 9=\frac{45}{4} \quad \rightarrow \quad y=\frac{45}{4}-7=\frac{17}{4}=4{,}25$

v und v+2 sind die Teile eines Strahls einer X-Figur: $\frac{v}{v+2}=\frac{12}{15} \quad \rightarrow \quad 15v=12\cdot(v+2)$

$\rightarrow$ 3v = 24 $\rightarrow$ v = 8