

Lambacher Schweizer

Mathematik Qualifikationsphase

Leistungskurs/
Grundkurs

Teildruck

Die Verkaufsaufgabe erscheint
unter der ISBN 978-3-12-735481-2

© Fenster: Getty Images (Brand X Pictures/PhotoAlto),
Blatt: iStockphoto (primimages)

mit Medien

Nordrhein-Westfalen



Klett

So lernen Sie mit Lambacher Schweizer

Grundlagen wiederholen

Check-in

Schätzen Sie sich ein:

- Ich kann die Nullstellen einer gegebenen Funktion bestimmen.
- Ich kann zum Graphen einer Funktion den Graphen der Ableitungskurve ableiten.
- Ich kann mithilfe der Ableitungsregeln die Ableitung einer gegebenen Funktion bestimmen.
- Ich kann die Gleichung einer Tangente an einen Graphen mithilfe der Ableitung bestimmen.
- Ich kann die Ableitung einer Funktion im Sachzusammenhang interpretieren.

Test

1. **Ableitungen bestimmen**
Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen.

a) $f(x) = x + 2x^2 - 4$ b) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 4x$ c) $f(x) = x^4 - 4x$
 d) $f(x) = x^3 - 4x^2$ e) $f(x) = x^4 + 4x + 5$ f) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 4x$
 g) $f(x) = x^3 - 4x^2$ h) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ i) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7x$

2. **Den Graphen der Ableitungsfunktion skizzieren**
Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' aus dem Graphen von f .

3. **Ableitungsfunktion bestimmen**
Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f mithilfe der Ableitungsregeln.

a) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5$ b) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x$ c) $f(x) = x^4 + 4x^2 - 3x + c$

4. **Tangentengleichung bestimmen**
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0 .

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x, x_0 = 3$ b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x, x_0 = -3$ c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x, x_0 = -1$

5. **Ableitung im Sachzusammenhang**
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0,25x^3 - 3x^2 + 8,75x + 8$. f gibt das Wasservolumen in einem Bach in m^3 an und die vergangene Zeit seit dem Messbeginn in Tagen ($0 \leq t \leq 7$).
 a) Bestimmen Sie die Ableitung von f an der Stelle $x = 1$. Zeigen Sie, dass $f'(1) = 0$.
 b) Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Bedeutung der Ableitung $f'(1)$ im Sachzusammenhang.
 c) Für $2 \leq t \leq 6$ ist $f'(t) < 0$. Erklären Sie die Bedeutung im Sachzusammenhang.

Lösungen

zu 1. Grundwissen, Seite 214 und Beispiel, Seite 27
 zu 2. Beispiel 2, Seite 81
 zu 3. Beispiel 5, Seite 72
 zu 4. Beispiel, Seite 76
 zu 5. Beispiel, Seite 76

Übungen, Seite 249

Dokument
Übersicht

Neue Inhalte verstehen und üben

3 Die Ableitungsfunktion

Die Grafik zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 4x$. Zu sehen ist die Tangente an den Berührungspunkt $B(1|f(1))$. Der Punkt P mit der Abszisse x_0 gibt den Wert $f'(x_0)$ an. Überlegen Sie zunächst, welche Werte der Punkt P für verschiedene Berührungspunkte annehmen wird. Skizzieren Sie danach die Kurve der Funktion f' . Notieren Sie Ihre Beobachtung.

Erläutern Sie die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0 . Um bei einer Funktion f an der Stelle x_0 die Ableitung mithilfe der Differenzquotienten berechnen zu können, ist es notwendig, die Ableitung $f'(x_0)$ für jede beliebige Stelle x_0 der Definitionsmenge zu ermitteln.

Ergebnis: Man erhält mit der Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^3$ an einer beliebigen Stelle x_0 auf folgende Weise, wie man sie an einer beliebigen Stelle x_0 $f'(x_0) = 3x_0^2$ bestimmt.

Ableitung von $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 2$
 Skizze: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(2) = 12$. Man erhält $f'(2) = 12$.
 Für die Ableitung an der Stelle $x_0 = 2$ gilt $f'(2) = 12$.

Ableitung von $f(x) = x^3$ an einer allgemeinen Stelle x_0
 $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$.
 Man erhält $f'(x_0) = 3x_0^2$.
 Für die Ableitung an der Stelle x_0 gilt $f'(x_0) = 3x_0^2$.
 Mit $f(x_0) = 2x_0$ erhält man z.B. $f'(2) = 12$, $f'(3) = 27$ und $f'(4) = 48$.

Die Funktion f an jeder Stelle x_0 der Ableitung f' zugeordnet, heißt **Ableitungsfunktion** von f und wird mit f' bezeichnet. Das Erstellen der Ableitungsfunktion f' nennt man **Ableiten** oder **Differenzieren**.
 Für die Funktion f mit $f(x) = x^3$ ist die Ableitungsfunktion $f'(x) = 3x^2$.

Die Ableitungsfunktion
 Die Funktion f an jeder Stelle x_0 der Ableitung f' zugeordnet, heißt **Ableitungsfunktion** von f und wird mit f' bezeichnet. Das Erstellen der Ableitungsfunktion f' nennt man **Ableiten** oder **Differenzieren**.
 Für die Funktion f mit $f(x) = x^3$ ist die Ableitungsfunktion $f'(x) = 3x^2$.

So auch die Ableitungsfunktion f' ableiten: Man erhält mit der Ableitung f' an einer Stelle x_0 auf folgende Weise, wie man sie an einer beliebigen Stelle x_0 $f''(x_0) = 6x_0$ bestimmt.

Informieren Sie sich

Test 2

Bei einer Bakterienkultur messen Sie das Wachstum der Bakterien. Das Wachstum der Bakterien ist die Zeit t in Stunden.

a) Bestimmen Sie die Ableitung $f'(t)$ der Funktion $f(t) = 12000 \cdot 2^t$ mit dem Zeitstrahl $t = 0$ bis $t = 10$.
 (1) $1 \cdot 10^4$ (2) $1 \cdot 10^5$ (3) $1 \cdot 10^6$

b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$. Zeigen Sie, dass für jedes reelle x die Differenzquotient von f im Intervall $[x, x+1]$ mit $f'(x)$ übereinstimmt.

c) Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x$ und g mit $g(x) = 2x^3 + x$. Prüfen Sie, ob der Differenzquotient von f im Intervall $[1, 2]$ mit dem Differenzquotient von g im Intervall $[2, 3]$ übereinstimmt.

d) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3$. Zeigen Sie, dass der Differenzquotient von f in den Intervallen $[a, b]$ und $[b, c]$ übereinstimmt.

Grundwissen Test

In einigen Straßen ist die Stahlseile von Haus zu Haus zu ziehen. Berechnen Sie die Länge der Stahlseile, die von Haus zu Haus zu ziehen sind.

Lösungen, Seite 249

Dokument
Übersicht

Überprüfen Sie mit dem **Check-in** das Wissen, das Sie für den Einstieg in das neue Kapitel benötigen. **Lösungen** finden Sie am Ende des Buches.

Zu Beginn des **Lehrtexes** wird erklärt, wie der neue Stoff mit bereits Gelerntem zusammenhängt. Im blauen **Merkkasten** ist das Wichtigste zusammengefasst. Im Anschluss finden Sie ausführliche **Beispielaufgaben** mit Lösungen.

Mit den zahlreichen Aufgaben auf drei Niveaustufen $\circ$ $\bullet$ $\bullet$ können Sie das Gelernte üben. Mit den **Test-Aufgaben** prüfen Sie, ob Sie den neuen Stoff verstanden haben. **Lösungen** finden Sie am Ende des Buches. Prüfen Sie mit **Grundwissen Test**, ob der Stoff aus früheren Kapiteln oder Klassen noch sitzt. **Lösungen** finden Sie am Ende des Buches.

Symbole

$\circ$ $\bullet$ $\bullet$	einfache, mittlere, schwierige Aufgabe
	Arbeit zu zweit
	Gruppenarbeit
	Verweise
	Diese Aufgabe soll ohne Hilfsmittel bearbeitet werden.
	Für diese Aufgabe benötigt man Funktionen eines modularen Mathematiksystems (MMS).
MK	kennzeichnet Aufgaben zum Thema Medienkompetenz.
SP	kennzeichnet Aufgaben, die den Fokus verstärkt auf (fachintegrierte) Sprachbildung richten.

- A1** Audio
- D1** Dokument
- I1** interaktive Anwendung

Die Medien (Audios, interaktive Anwendungen und Dokumente) zum Schulbuch sind online und offline verfügbar.

- QR-Code scannen oder Link in einen Browser eingeben
- Mit den persönlichen Klett-Zugangsdaten anmelden
- Digitale Medien online nutzen oder in die **Klett Lernen App** herunterladen

Zu zahlreichen Aufgaben finden Sie **Lösungen** im Buch, sodass Sie die Inhalte eigenständig üben und sich selbst überprüfen können.

Zusatzmaterialien zu diesem Band für Schülerinnen und Schüler:

- Arbeitsheft Lambacher Schweizer Qualifikationsphase (ISBN 978-3-12-735482-9)
- Klausurentrainer Lambacher Schweizer Qualifikationsphase (ISBN 978-3-12-735484-3)
- Lösungen Lambacher Schweizer Qualifikationsphase (ISBN 978-3-12-735483-6)

Dr. Theophil Lambacher (13.04.1899 – 14.12.1981) und **Wilhelm Schweizer** (11.11.1901 – 23.07.1990) lehrten beide Mathematik an der Schule. Theophil Lambacher wurde danach Oberschulamtspräsident und Ministerialrat am Kultusministerium, Wilhelm Schweizer arbeitete als Schulleiter, Fachleiter am Seminar und Dozent an der Universität. Der erste Band des Lambacher Schweizer erschien 1946: Lambacher Schweizer Mathematik für höhere Schulen, Mittelstufe 1. Teil enthielt auf 91 Seiten Algebra und Geometrie für die Klasse 7.

1. Auflage

1 5 4 3 2 1 | 2028 27 26 25 24

Alle Drucke dieser Auflage sind unverändert und können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Druckes.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Das Gleiche gilt für die Software und das Begleitmaterial. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen oder in den Lizenzbestimmungen genannten Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages.

Hinweis § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und/oder in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Fotomechanische, digitale oder andere Wiedergabeverfahren nur mit Genehmigung des Verlages.

Jede öffentliche Vorführung, Sendung oder sonstige gewerbliche Nutzung oder deren Duldung sowie Vervielfältigung (z. B. Kopieren, Herunterladen oder Streamen) und Verleih und Vermietung ist nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Ernst Klett Verlages erlaubt.

Nutzungsvorbehalt: Alle Rechte, auch für Text- und Data-Mining (TDM), Training für künstliche Intelligenz (KI) und ähnliche Technologien, sind vorbehalten.

An verschiedenen Stellen dieses Werkes befinden sich Verweise (Links) auf Internet-Adressen. Haftungshinweis: Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle wird die Haftung für die Inhalte der externen Seiten ausgeschlossen. Für den Inhalt dieser externen Seiten sind ausschließlich die Betreiber verantwortlich. Sollten Sie daher auf kostenpflichtige, illegale oder anstößige Inhalte treffen, so bedauern wir dies ausdrücklich und bitten Sie, uns umgehend per E-Mail an info@klett.support davon in Kenntnis zu setzen, damit bei der Nachproduktion der Verweis gelöscht wird.

Lehrmedien/Lehrprogramm nach § 14 JuSchG

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2024. Alle Rechte vorbehalten. www.klett.de

Das vorliegende Material dient ausschließlich gemäß § 60b UrhG dem Einsatz im Unterricht an Schulen.

Autorinnen und Autoren: Jürgen Appel, Manfred Baum, Martin Bellstedt, Boris Boor, Dr. Dieter Brandt, Gerhard Brüstle, Wiebke Bucholzki, Heidi Buck (†), Jürgen Denker, Günther Dopfer, Prof. Rolf Dürr, Prof. Hans Freudigmann, Inga Giersemehl, Herbert Götz, Eva Graßkemper, Dieter Greulich, Dr. Frieder Haug, Manfred Herbst, Edmund Herd, Carolin Herrmann, Maren Herrmann, Dr. Jörg Heuß, Prof. Detlef Hoche (†), Thomas Jörgens, Thorsten Jürgensen-Engl, Christine Kestler, Dr. Michael Kölle, Ingrid Kolupa, Andreas König, Hans-Georg Kosuch, Carsten Kreutz, Prof. Dr. Detlef Lind, Judith Lohmann, Dr. Johannes Novotný, Marion Rauscher, Prof. Rolf Reimer, Dr. Ute Reinhardt, Dr. Wolfgang Riemer, Dr. Rebecca Roy, Rüdiger Sandmann, Prof. Dr. Torsten Schatz, Hartmut Schermuly (†), Prof. Reinhard Schmitt-Hartmann, Ulrich Schönbach, Siegfried Schwehr, Manfred Schwier, Dr. Maximilian Selinka, Raphaela Sonntag, Heike Spielmans, Michael Stanzel, Prof. Jörg Stark, Andrea Stühler, Anna Stump, Barbara Sy, Thomas Thiessen, Dr. Heike Tomaschek, Prof. Dr. Ingo Weidig, Alexander Wollmann, Antje Zang, Dr. Peter Zimmermann, Prof. Manfred Zinser, Arnold Zitterbart

Entstanden in Zusammenarbeit mit dem Projektteam des Verlages.

Gestaltung: Petra Michel, Essen

Umschlaggestaltung: normaldesign GbR, Schwäbisch Gmünd

Titelbild: U1.1: Getty Images RF, München (Brand X Pictures/PhotoAlto), U1.2: iStockphoto, Calgary, Alberta (primeimages)

Satz: tiff.any GmbH & Co. KG, Berlin

W700806

Lambacher Schweizer

Mathematik **Qualifikationsphase**

**Leistungskurs/
Grundkurs**

Nordrhein-Westfalen

erarbeitet von

Dr. Dieter Brandt
Wiebke Bucholzki
Inga Giersemehl
Thomas Jörgens
Thorsten Jürgensen-Engl
Judith Lohmann
Dr. Wolfgang Riemer
Heike Spielmans
Raphaela Sonntag
Anna Stump

Ernst Klett Verlag
Stuttgart • Leipzig • Dortmund

I Fortsetzung der Differenzialrechnung

Check-in

6

Erkundungen	8
1 Wiederholung: Funktionen untersuchen	10
2 Substitution	14
3 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen	16
4 Ganzrationale Funktionen bestimmen	20
5 Funktionen mit Parametern untersuchen	24
6 Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion	29
7 Potenzfunktionen ableiten	33
Klausurtraining	38
Rückblick	42
Probeklausur	43
Exkursion: Ortskurven	46

II Integralrechnung

Check-in

48

Erkundungen	50
1 Rekonstruktion einer Größe	52
2 Das Integral	56
3 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	62
4 Regeln zur Bestimmung von Stammfunktionen	68
5 Integral und Flächeneinheit	73
6 Unbegrenzte Flächen – Uneigentliche Integrale	78
7 Volumen von Rotationskörpern	81
Klausurtraining	85
Rückblick	90
Probeklausur	91
Exkursion: Mittelwerte von Funktionen	94

III Exponentialfunktionen

Check-in

96

Erkundungen	98
1 Wiederholung: Exponentialfunktionen	100
2 Die natürliche Exponentialfunktion	104
3 Transformierte Exponentialfunktionen untersuchen	108
4 Ableitung beliebiger Exponentialfunktionen	112
5 Begrenzttes Wachstum	116
6 Die Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion	120
Klausurtraining	124
Rückblick	128
Probeklausur	129
Exkursion: Differenzialgleichungen	132

IV Weitere Funktionen

Check-in 134

Erkundungen	136
1 Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion	138
2 Verkettung von Funktionen	143
3 Produktregel	147
4 Kettenregel	151
5 Zusammengesetzte Funktionen untersuchen	155
6 Zusammengesetzte Funktionen im Kontext	160
Klausurtraining	165
Rückblick	170
Probeklausur	171
Exkursion: Trigonometrie trifft Differenzialrechnung	174

V Vektoren, Geraden und Winkel

Check-in 176

Erkundungen	178
1 Wiederholung: Geraden und Lagebeziehungen	180
2 Zueinander orthogonale Vektoren – Skalarprodukt	186
3 Winkel und Schnittwinkel	191
Klausurtraining	196
Rückblick	200
Probeklausur	201
Exkursion: Das Vektorprodukt	204

VI Ebenen

Check-in 206

Erkundungen	208
1 Der Gauß-Algorithmus	210
2 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme	214
3 Ebenen im Raum – die Parameterform	219
4 Koordinatenform und Normalenvektor	223
5 Schnittwinkel und Schnittpunkte	227
6 Geometrische Objekte im Raum	231
Klausurtraining	236
Rückblick	240
Probeklausur	241
Exkursion: Schattenwurf	244

VII Lagebeziehungen und Abstände

Check-in 246

Erkundungen	248
1 Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen	250
2 Abstand eines Punktes von einer Ebene	256
3 Abstand eines Punktes von einer Geraden	261
4 Abstand zwischen Geraden	265
5 Abstandsberechnungen bei Anwendungsaufgaben	269
Klausurtraining	274
Rückblick	278
Probeklausur	279
Exkursion: Geometrie in Gleichungssystemen	282

VIII Daten und Wahrscheinlichkeit

Check-in 284

Erkundungen	286
1 Wiederholung: Wahrscheinlichkeit	288
2 Verknüpfung von Ereignissen	293
3 Bedingte Wahrscheinlichkeit – stochastische Unabhängigkeit	297
4 Simulationen	301
5 Daten erheben und mit Kenngrößen beschreiben	305
6 Zufallsgrößen – Erwartungswert und Standardabweichung	310
Klausurtraining	314
Rückblick	318
Probeklausur	319
Exkursion: Stochastische Prozesse	322

IX Binomialverteilung

Check-in 324

Erkundungen	326
1 Bernoulli-Experimente – Binomialverteilung	328
2 Binomialkoeffizienten	332
3 Erwartungswert und Histogramm	335
4 Kumulierte Wahrscheinlichkeiten	339
5 Standardabweichung	343
6 Probleme lösen mit der Binomialverteilung	346
Klausurtraining	350
Rückblick	354
Probeklausur	355
Exkursion: Optimal entscheiden	358

X Prognose- und Konfidenzintervalle

Check-in 360

Erkundungen	362
1 Prognoseintervalle für absolute Häufigkeiten	364
2 Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten	368
3 Konfidenzintervalle	372
4 Stichprobenumfang schätzen	377
5 Die Normalverteilung	380
Klausurtraining	386
Rückblick	390
Probeklausur	391
Exkursion: Der rotierende Penny und die Konfidenzintervalle	394
Exkursion: Die Normalverteilung und Normal-Quantil (NQ) Plots	395

ANHANG Nachschlagen und Überprüfen

Abiturvorbereitung	396
Grundwissen	xxx
Lösungen zu den Kapiteln	xxx
Lösungen zum Grundwissen	xxx
Register	xxx
Text- und Bildquellenverzeichnis	xxx
Mathematische Begriffe und Bezeichnungen	

■ ausschließlich Leistungskursinhalte

6 Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

Ilja möchte den Graphen der Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = \sqrt{x}$ und dem Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R}^{\geq 0}$ zeichnen. Er behauptet: „Dafür kann ich die Schablone der Normalparabel benutzen.“
Hat Ilja recht? Begründen Sie.



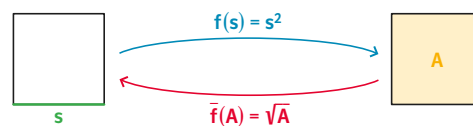
© Blühdorn GmbH, Fellbach

Eine Funktion ordnet jedem Wert einer 1. Größe den passenden Wert einer 2. Größe zu. Wenn man sich dafür interessiert, wie die 1. Größe von der 2. Größe abhängt, kann es hilfreich sein, eine Funktion umzukehren. Im Folgenden wird dies an einem Beispiel erklärt.

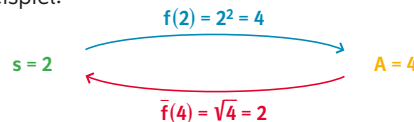
Die Funktion f mit $f(s) = s^2$ ordnet jeder Seitenlänge $s \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ eines Quadrats dessen Flächeninhalt A zu.

Umgekehrt ordnet die Funktion $\bar{f}$ mit $\bar{f}(A) = \sqrt{A}$ jedem Flächeninhalt $A \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ eines Quadrats dessen Seitenlänge s zu.

Die Funktion $\bar{f}$ wird daher als die **Umkehrfunktion** der Funktion f bezeichnet.



Beispiel:



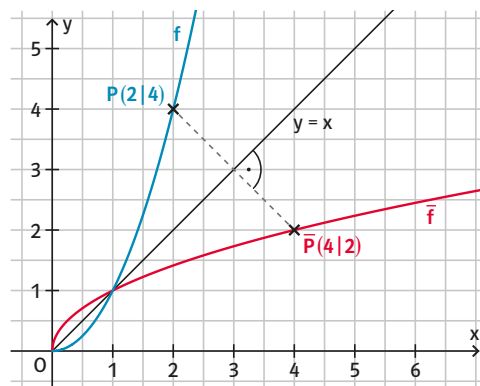
Graph der Umkehrfunktion zeichnen

Wenn man bei den Funktionen f und $\bar{f}$ eine einheitliche Variable verwendet, beispielsweise x , kann man ihre Graphen in dasselbe Koordinatensystem zeichnen.

Der Graph der Umkehrfunktion $\bar{f}$ entsteht aus dem Graphen von f , indem man die Koordinaten der Punkte vertauscht:

Der Graph von f verläuft beispielsweise durch den Punkt $P(2|4)$, der Graph von $\bar{f}$ durch den Punkt $\bar{P}(4|2)$.

Man erkennt: Das Vertauschen der Koordinaten entspricht einer Spiegelung an der Winkelhalbierenden mit der Gleichung $y = x$.



Umkehrbarkeit von Funktionen, Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion

Eine Funktion f ist nur dann umkehrbar, wenn man jedem $y \in W_f$ ein eindeutiges $x \in D_f$ mit $f(x) = y$ zuordnen kann.

Dies ist bei der quadratischen Funktion f mit $f(x) = x^2$ der Fall, wenn man den Definitionsbereich D_f z.B. auf $D_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$ einschränkt (Fig. 1). Die Umkehrfunktion $\bar{f}$ hat dann den Definitionsbereich $D_{\bar{f}} = W_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$, den Wertebereich $W_{\bar{f}} = D_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$ und die Funktionsgleichung $\bar{f}(x) = \sqrt{x}$.

Lässt man bei der Funktion f mit $f(x) = x^2$ jedoch den maximalen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$ zu, ist f nicht umkehrbar: Beispielsweise gilt $f(2) = 4$ und $f(-2) = 4$, also kann man dem y -Wert 4 keinen eindeutigen x -Wert zuordnen (Fig. 2).

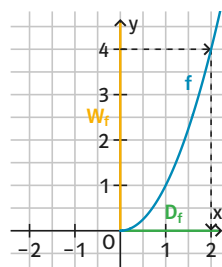


Fig. 1

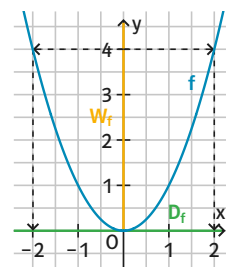


Fig. 2

Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

Eine Funktion f mit der Definitionsmenge D_f und der Wertemenge W_f heißt **umkehrbar**, wenn es zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ mit $f(x) = y$ gibt.

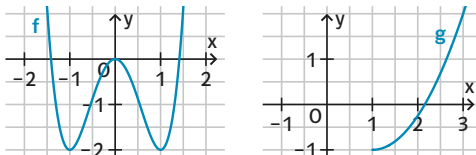
Bei einer umkehrbaren Funktion f bezeichnet man die **Umkehrfunktion** mit $\bar{f}$.

Die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2$ mit dem eingeschränkten Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$ ist die **Wurzelfunktion** $\bar{f}$ mit $\bar{f}(x) = \sqrt{x}$. Sie hat den Definitionsbereich $D_{\bar{f}} = \mathbb{R}^{\geq 0}$ und den Wertebereich $W_{\bar{f}} = \mathbb{R}^{\geq 0}$.

Beispiel 1 Die Umkehrbarkeit einer Funktion anhand ihres Graphen prüfen

Gegeben sind die Graphen der Funktionen f und g .

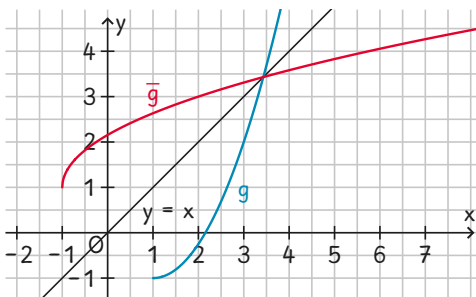
- Prüfen Sie, ob die Funktionen f und g im abgebildeten Bereich umkehrbar sind.
- Skizzieren Sie den Graphen der umkehrbaren Funktion aus Teilaufgabe a) sowie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion.



Lösung

- Die Funktion f ist nicht umkehrbar, weil beispielsweise der Funktionswert -2 an mehreren Stellen angenommen wird. Es gilt $f(-1) = f(1) = -2$. Da die Funktion g streng monoton zunehmend ist, lässt sich jedem $y \in W_g$ genau eine Stelle $x \in D_g$ mit $y = g(x)$ zuordnen. Also ist g umkehrbar.

- Man spiegelt den Graphen von g an der Geraden mit der Gleichung $y = x$.



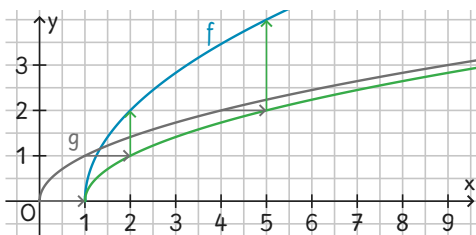
Beispiel 2 Wurzelfunktionen transformieren

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sqrt{x-1}$.

- Erläutern Sie, wie der Graph von f aus dem Graphen von g mit $g(x) = \sqrt{x}$ entsteht.
- Skizzieren Sie die Graphen von f und g in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Lösung

- Der Graph von f entsteht aus dem Graphen von g , indem man ihn um 1 Einheit nach rechts verschiebt und in y -Richtung mit dem Faktor 2 streckt.
- Der Graph von f lässt sich durch schrittweises Transformieren skizzieren.

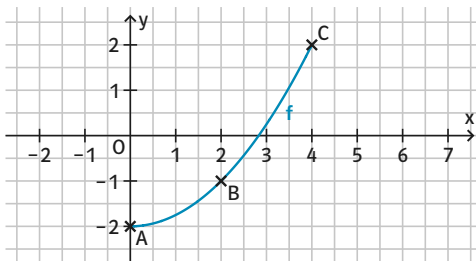


Aufgaben

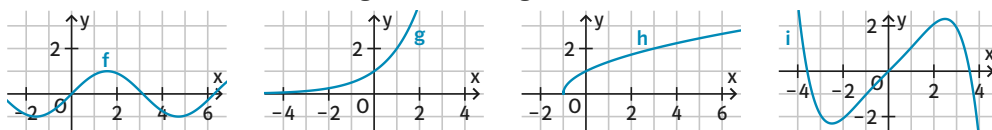
- 1 Die Abbildung zeigt den Graphen der umkehrbaren Funktion f .

- Lesen Sie die Koordinaten der Punkte A, B und C des Graphen von f ab. Notieren Sie die Punkte $\bar{A}$, $\bar{B}$ und $\bar{C}$ des Graphen der Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f .
- Tragen Sie die Punkte A, B, C, $\bar{A}$, $\bar{B}$ und $\bar{C}$ in ein Koordinatensystem ein und skizzieren Sie die Graphen von f und $\bar{f}$.

- Geben Sie jeweils den Definitions- und den Wertebereich der Funktionen f und $\bar{f}$ an.



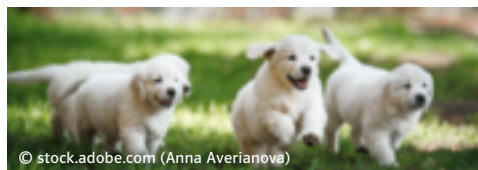
- 2 a) Prüfen Sie, ob die Funktionen f , g , h und i im abgebildeten Bereich umkehrbar sind.



○ **Lerntipp**
Seite 30, Beispiel 1

- b) Skizzieren Sie die Graphen der umkehrbaren Funktionen aus Teilaufgabe a) jeweils in ein eigenes Koordinatensystem. Ergänzen Sie die Winkelhalbierende mit der Gleichung $y = x$ und den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion in dem Koordinatensystem.

- 3 Ein Welpenforum beschreibt das Gewicht eines Golden Retrievers im ersten Lebensjahr mithilfe der Modellfunktion g . Dabei gibt $g(t)$ das Gewicht (in kg) zum Zeitpunkt t (in Monaten nach der Geburt) an. g ist umkehrbar mit der Umkehrfunktion $\bar{g}$.



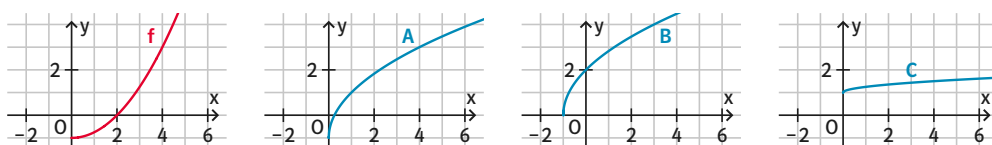
- a) Beschreiben Sie die Bedeutung der Umkehrfunktion $\bar{g}$ im Sachkontext.
b) Beschreiben Sie die Bedeutung der Gleichungen im Sachkontext.

A $g(3) = 11$

B $\bar{g}(20) = 5,5$

C $\bar{g}(18) - \bar{g}(15) = 1$

- 4 Gegeben sind der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$ und $D_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$ sowie die Graphen der Funktionen f_1 , f_2 und f_3 mit $f_1(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x} + 1$, $f_2(x) = 2\sqrt{x} - 1$ und $f_3(x) = 2\sqrt{x} + 1$.

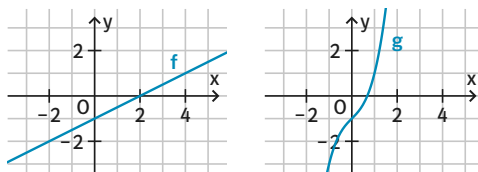


- a) Ordnen Sie f_1 , f_2 und f_3 jeweils den passenden Graphen A bis C zu. Begründen Sie.
b) Geben Sie jeweils den Definitions- und Wertebereich der Funktionen f_1 , f_2 und f_3 an.
c) Begründen Sie, dass f umkehrbar ist. Entscheiden Sie, welche der Funktionen f_1 , f_2 oder f_3 die Umkehrfunktion von f ist. Begründen Sie.

Test 1

○ **Lösungen**, Seite xxx

- 5 a) Begründen Sie anhand der Graphen, dass die Funktionen f und g im abgebildeten Bereich umkehrbar sind.
b) Skizzieren die Graphen von f und g und ergänzen Sie den Graphen der jeweiligen Umkehrfunktion.



- 6 Die Funktion f beschreibt den Abkühlungsvorgang eines Heißgetränks (t in min nach der Zubereitung, $f(t)$ in $^{\circ}\text{C}$). f ist umkehrbar mit der Umkehrfunktion $\bar{f}$.

- a) Beschreiben Sie die Bedeutung der Umkehrfunktion $\bar{f}$ im Sachkontext.
b) Beschreiben Sie die Bedeutung der Gleichungen im Sachkontext.

A $f(5) = 78,5$

B $\bar{f}(60) = 14,5$

C $\bar{f}(30) - \bar{f}(40) = 1,5$

- 7 Gegeben sind die Funktionen g mit $g(x) = 2\sqrt{x}$ und h mit $h(x) = \sqrt{x} - 1$.

- a) Beschreiben Sie, wie die Graphen der Funktionen g und h aus dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ hervorgehen.
b) Skizzieren Sie die Graphen von f , g und h in ein gemeinsames Koordinatensystem.

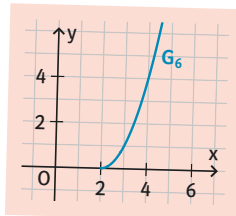
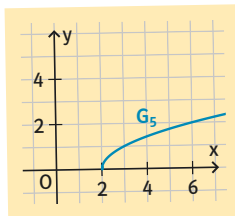
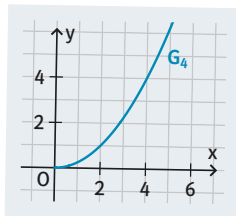
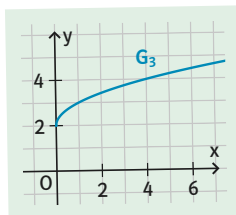
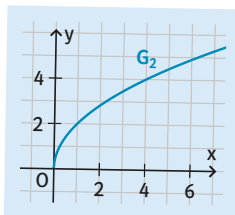
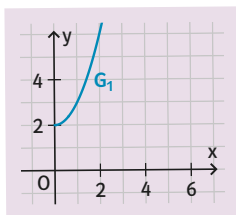
○ **Lerntipp**
Seite 30, Beispiel 2

- 8 a) Ordnen Sie den Funktionen f , g und h mit $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = 2\sqrt{x}$ und $h(x) = \sqrt{x} + 2$ ihre Funktionsgraphen, die Graphen ihrer Umkehrfunktionen $\bar{f}$, $\bar{g}$ und $\bar{h}$ sowie die Gleichungen ihrer Umkehrfunktionen von den Kärtchen zu.
- b) Geben Sie die Definitions- und die Wertebereiche der sechs Funktionen an.

A $y = 0,25x^2$

B $y = (x-2)^2$

C $y = x^2 + 2$

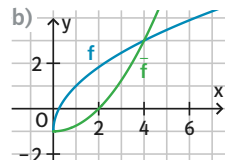
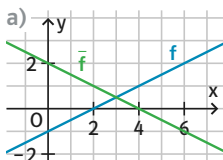


- 9 Man erhält den Graphen der umkehrbaren Funktion g , indem man den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ um 2 Einheiten nach links und um 1 Einheit nach unten verschiebt.
- a) Geben Sie die Funktionsgleichung von g an.
- b) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich von g und ihrer Umkehrfunktion $\bar{g}$ an.
- c) Skizzieren Sie die Graphen von g und $\bar{g}$ in dasselbe Koordinatensystem.
- d) Stellen Sie eine begründete Vermutung auf, welche Funktionsgleichung $\bar{g}$ hat.

Die Lösungen zu Aufgabe 9 können mit einem MMS überprüft werden.

10 Finden Sie den Fehler!

Gegeben ist der Graph von f . Der Graph der Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f soll im selben Koordinatensystem gezeichnet werden. Erklären Sie, was falsch gemacht wurde, und skizzieren Sie die richtige Lösung.



Test 2

Lösungen, Seite xxx

- 11 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sqrt{x-3}$ und ihre Umkehrfunktion $\bar{f}$.
- a) Bestimmen Sie den Definitions- und den Wertebereich von f und $\bar{f}$.
- b) Beschreiben Sie, wie der Graph von f aus dem Graphen von h mit $h(x) = \sqrt{x}$ entsteht.
- c) Skizzieren Sie die Graphen von f und $\bar{f}$ in dasselbe Koordinatensystem.
- 12 Michelle vermutet: „Die Funktion f mit $f(x) = x^2$ müsste auch umkehrbar sein, wenn man den Definitionsbereich auf $\mathbb{R}^{\leq 0}$ einschränkt. Dann kann allerdings nicht $\bar{f}(x) = \sqrt{x}$ sein.“ Begründen Sie, dass Michelle recht hat und ermitteln Sie die Gleichung der Umkehrfunktion.
- 13 Malik behauptet: „Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ hat sich selbst als Umkehrfunktion.“
- a) Begründen Sie, dass Malik recht hat.
- b) Finden Sie eine weitere Funktion, die sich selbst als Umkehrfunktion hat.

Grundwissen Test

Volumenänderung eines Kegels untersuchen

Grundwissen, Seite 419
Lösungen, Seite XXX

- 14 Untersuchen Sie, wie sich das Volumen eines Kegels verändert, wenn man seine Höhe halbiert und den Radius der Grundfläche verdoppelt.

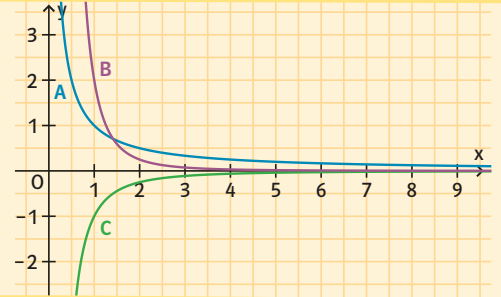
7 Potenzfunktionen ableiten

1 $\frac{2}{x^3}$

2 $-\frac{1}{x^2}$

3 $\frac{1}{x}$

Die Graphen A, B und C und die Terme 1, 2 und 3 gehören zu einer Funktion f , ihrer ersten Ableitung f' und ihrer zweiten Ableitung f'' . Ordnen Sie zu und begründen Sie.

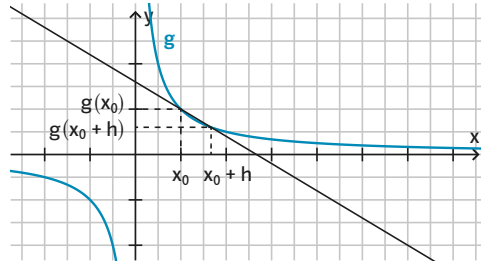


Die Ableitungsregeln für Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten sind bekannt. Im Folgenden werden sie auch auf Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten übertragen.

Eine Potenzfunktion f mit $f(x) = x^n$ und natürlichem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ hat nach der Potenzregel die Ableitung $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Auch die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ mit $D_g = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$ ist eine Potenzfunktion, ihr Exponent ist jedoch negativ.

Mithilfe des Differenzenquotienten wird gezeigt, dass die Potenzregel auch für die Funktion g gültig ist.



Für alle $x_0 \in D_g$ ist auch $x_0 + h \in D_g$, wenn h nahe genug an null ist (genauer: wenn $|h| < |x_0|$ ist).

$$\begin{aligned} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} &= \frac{\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \left(\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} \right) \cdot \frac{1}{h} \\ &= \left(\frac{x_0}{x_0(x_0 + h)} - \frac{x_0 + h}{x_0(x_0 + h)} \right) \cdot \frac{1}{h} \\ &= \frac{x_0 - (x_0 + h)}{x_0(x_0 + h)} \cdot \frac{1}{h} \\ &= \frac{-h}{x_0(x_0 + h)} \cdot \frac{1}{h} \\ &= -\frac{1}{x_0(x_0 + h)} \end{aligned}$$

| Brüche in der Klammer gleichnamig machen

| Zähler auf einen Bruchstrich schreiben,

| Zähler vereinfachen

| mit h kürzen, Zähler berechnen

Daher folgt für alle $x_0 \in D_g$: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x_0(x_0 + h)} = -\frac{1}{x_0^2}$

Also ist g für alle $x \in D_g$ differenzierbar und es gilt: $g'(x) = -\frac{1}{x^2} = -1 \cdot x^{-2}$

Damit ist die Potenzregel für den negativen Exponenten $n = -1$ bewiesen.

Man kann zeigen, dass die Potenzregel für beliebige reelle Exponenten $r \neq 0$ gültig ist. Üblicherweise werden Potenzfunktionen f mit $f(x) = x^r$ und $r \notin \mathbb{Z}$ nur auf dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^{>0}$ betrachtet.

Auch die Wurzelfunktion h mit $h(x) = \sqrt{x}$ mit $D_h = \mathbb{R}^{\geq 0}$ ist eine Potenzfunktion, denn es gilt $h(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Mit der Potenzregel erhält man $h'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Die Ableitung der Funktion h mit $h(x) = \sqrt{x}$ wird in Aufgabe 14 graphisch und in Aufgabe 15 rechnerisch ermittelt.

Potenzfunktionen ableiten

Eine Potenzfunktion f mit $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$, hat die Ableitung $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$.

Insbesondere gilt:

Die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ und dem Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$ hat die Ableitung

$$g'(x) = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Die Funktion h mit $h(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ und dem Definitionsbereich $D_h = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$ hat die Ableitung

$$h'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Beispiel 1 Potenzregel anwenden und Steigungswinkel berechnen

Die Abbildungen zeigen den Graphen der

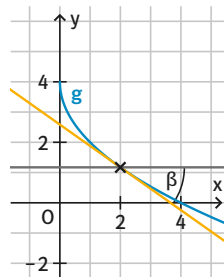
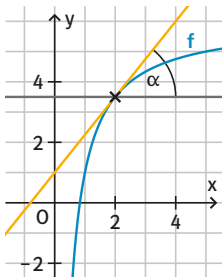
Funktion f mit $f(x) = 6 - \frac{5}{x}$ und $D_f = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$

sowie den Graphen der Funktion g mit

$g(x) = 4 - 2\sqrt{x}$ und $D_g = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$.

a) ☒ Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen von f' und g' .

b) Berechnen Sie die Steigungswinkel α bzw. β der Tangenten an den Graphen von f bzw. g an der Stelle $x = 2$.



Lösung

a) Es gilt $f'(x) = -5 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{5}{x^2}$ und $g'(x) = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$.

b) Tangentensteigungen: $f'(2) = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}$ und $g'(2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0,71$

Für den Steigungswinkel α einer Geraden mit der Steigung m gilt:

$\tan(\alpha) = m$ und damit $\alpha = \tan^{-1}(m)$

Daraus ergibt sich $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) \approx 51,3^\circ$ und $\beta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -35,3^\circ$.

Beispiel 2 Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten ableiten

☒ Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = \sqrt[3]{x^2}$ und $D_h = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung h' . Notieren Sie den Ableitungsterm in der Wurzelschreibweise und ohne negativen Exponenten.

Lösung

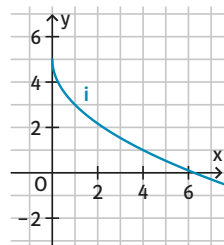
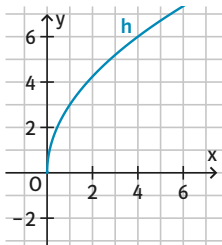
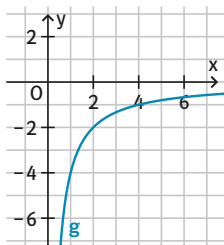
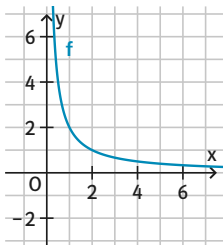
Es gilt $h(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Mit der Potenzregel erhält man $h'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Aufgaben

- 1 ☒ Gegeben sind die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = \frac{2}{x}$, g mit $g(x) = -\frac{4}{x}$, h mit $h(x) = 3\sqrt{x}$ und i mit $i(x) = 5 - 2\sqrt{x}$ für $x \in \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$.

a) Schätzen Sie anhand der Abbildung die Steigung des Graphen an der Stelle $x_0 = 1$.

b) Berechnen Sie $f'(1)$, $g'(1)$, $h'(1)$ und $i'(1)$. Vergleichen Sie die Werte mit Ihren Schätzwerten aus Teilaufgabe a).



➔ **Lerntipp**
Seite 34, Beispiel 1a)

- 2 Gegeben sind die Gleichung und der Definitionsbereich der Funktion f . Ermitteln Sie die Gleichung der Ableitung von f mithilfe der Ableitungsregeln. Berechnen Sie den Steigungswinkel der Tangente an den Graphen von f an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

a) $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^+ \cup 0$ b) $f(x) = \frac{2}{x} - 7$; $D_f = \mathbb{R}^+ \cup 0$ c) $f(x) = 4 - \sqrt{x}$; $D_f = \mathbb{R}^+ \cup 0$

○ → **Lerntipp**
Seite 34, Beispiel 1b)

- 3 Gegeben sind die Funktionen f , g und h jeweils mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^+ \cup 0$.

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

$$g(x) = \frac{2}{x}$$

$$h(x) = \frac{1}{2x}$$

- a) Skizzieren Sie die Graphen von f , g und h mithilfe von Wertetabellen für $x \in [-2; 2]$ in Schritten von $\frac{1}{2}$. Zeichnen Sie an den Stellen $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = 1$ Tangenten an die Graphen und lesen Sie näherungsweise die jeweilige Steigung ab.
b) Ermitteln Sie die Funktionsgleichungen von f' , g' und h' . Vergleichen Sie die in Teilaufgabe a) bestimmten Tangentensteigungen mit den Werten der entsprechenden Ableitungen.

- 4 Schreiben Sie die Gleichung der Funktion f in der Form $f(x) = a \cdot x^r$. Geben Sie den Definitionsbereich von f und die Gleichung der Ableitung an. Notieren Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion ohne negativen Exponenten und falls möglich in der Wurzelschreibweise.

a) $f(x) = \frac{2}{x^3}$ b) $f(x) = -\sqrt{x^3}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{5\sqrt{x}}$ d) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

○ → **Lerntipp**
Seite 34, Beispiel 2

Test 1

○ → **Lösungen**, Seite xxx

- 5 Gegeben sind die Gleichung und der Definitionsbereich der Funktion f . Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitung von f mithilfe der Ableitungsregeln und berechnen Sie den Steigungswinkel der Tangente an den Graphen von f an den Stellen $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$.

a) $f(x) = 2 - \frac{3}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^+ \cup 0$ b) $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$; $D_f = \mathbb{R}^+ \cup 0$ c) $f(x) = 5 - \frac{2}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^+ \cup 0$ d) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{2}$; $D_f = \mathbb{R}^+ \cup 0$

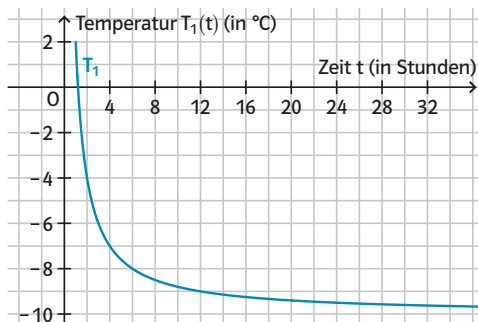
- 6 Gegeben ist die Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}^+ \cup 0$. Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Graph von f Extremstellen hat. Verwenden Sie falls nötig das Vorzeichenwechselkriterium als hinreichendes Kriterium.

a) $f(x) = 3 - 4\sqrt{x}$ b) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ c) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$ d) $f(x) = 2x + \frac{8}{x^2}$

- 7 Bei einem Kälteeinbruch wird die Temperatur modellhaft durch die Funktion T_1 mit $T_1(t) = \frac{12}{t} - 10$ beschrieben ($t \geq 1$ in Stunden seit Beobachtungsbeginn, $T_1(t)$ in $^{\circ}\text{C}$).

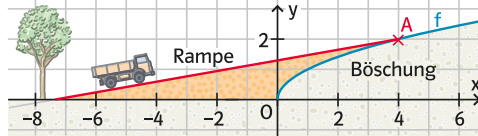
- a) Berechnen Sie, wann die Temperatur dem Modell zufolge unter 0°C sinkt.
b) Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Temperatur zum Zeitpunkt $t = 20$.
c) Begründen Sie, dass die Temperatur laut Modell ständig sinkt.
d) Die Temperatur soll nach einem Tag durch eine lineare Modellfunktion T_2 so beschrieben werden, dass im Graphen kein Knick entsteht. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von T_2 . Ermitteln Sie, wann diesem Modell zufolge eine Temperatur von -10°C erreicht wird.

© Getty Images (The Image Bank/Andrew Bret Wallis)



Tipp zu Aufgabe 7d):
Der Übergang der beiden Graphen hat keinen Knick, wenn $T_1'(24) = T_2'(24)$ gilt.

- 8 Die Abbildung zeigt das Modell einer geplanten Rampe. Die Böschung wird dabei mit der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ beschrieben. Die geplante Rampe soll einen Steigungswinkel von 10° haben.



- Berechnen Sie die Steigung der Rampe in Prozent.
- Zeigen Sie rechnerisch, dass diese Rampe nicht knickfrei in die Böschung übergehen würde, wenn sie im Modell im Punkt $A(4|2)$ enden würde.

- 9 Gegeben ist die Gleichung der Funktionsschar f_a . Notieren Sie den Definitionsbereich und bestimmen Sie den Wert des Parameters a jeweils so, dass die angegebene Bedingung erfüllt ist.

a) $f_a(x) = a\sqrt{x} - 5$ mit $a > 0$

b) $f_a(x) = 3 - a\sqrt{x^3}$ mit $a \neq 0$

A Der Graph von f_a verläuft durch den Punkt $P(9|1)$.

B Der Graph von f_a hat an der Stelle $x_0 = 4$ die Steigung $m = 3$.

C Der Graph der Umkehrfunktion $\bar{f}_a$ von f_a verläuft durch den Punkt $P(10|25)$.

D Die Tangente an den Graphen von f_a an der Stelle $x = 1$ verläuft parallel zur Geraden mit $y = \frac{1}{2}x$.

E Die Normale an den Graphen von f_a an der Stelle $x = 4$ hat die Steigung $m = \frac{1}{6}$.

10 Lineare Approximation

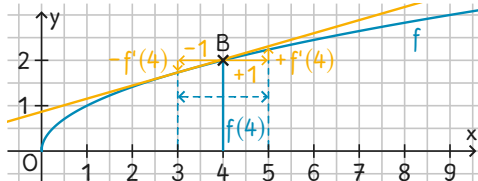
„ $\sqrt{4}$ ist 2, $\sqrt{3}$ muss also etwas kleiner als 2 und $\sqrt{5}$ etwas größer als 2 sein,“ überschlägt Ida. Filip versucht, mithilfe der Wurzelfunktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ genauere Näherungswerte für $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ zu ermitteln: „An der Stelle $x_0 = 4$ kenne ich den Funktionswert von f : Es gilt $f(4) = \sqrt{4} = 2$. In der Nähe von $x_0 = 4$ verläuft die Tangente an den Graphen von f fast genauso wie der Graph von f . Das kann man für eine Überschlagsrechnung benutzen.“

Anhand der abgebildeten Skizze kommt er auf folgende Überschlagsrechnungen:

$$m = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{5} = f(5) \approx f(4) + f'(4) = 2 + \frac{1}{4} = 2,25$$

$$\sqrt{3} = f(3) \approx f(4) - f'(4) = 2 - \frac{1}{4} = 1,75$$



- Erläutern Sie Filips Vorgehen anhand seiner Notizen und seiner Skizze.
- Vergleichen Sie Filips Näherungswerte mit den Näherungswerten Ihres Taschenrechners.
- Ida ist überzeugt: „Die Methode lässt sich auch für weitere Wurzeln benutzen.“ Sie überschlägt: $\sqrt{6} = f(6) \approx f(4) + 2 \cdot f'(4) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} = 2,5$ und $\sqrt{7} = f(7) \approx f(4) + 3 \cdot f'(4) = 2 + 3 \cdot \frac{1}{4} = 2,75$
- Erklären Sie Idas Rechnungen mithilfe geeigneter Steigungsdreiecke.
- Filip hat Bedenken: „Wenn der Abstand zur Stelle $x = 4$ größer wird, ist die Methode nicht so genau.“ Er behauptet: „Für $\sqrt{7}$ bekommt man einen besseren Näherungswert mit der Tangente an der Stelle $x = 9$.“ Erläutern Sie Filips Bedenken und überprüfen Sie seine Behauptung.

11 Die Ableitungsfunktion transformierter Wurzelfunktionen ermitteln

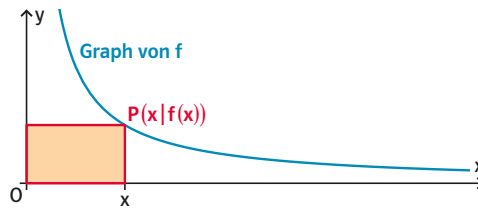
- Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x - 3} + 2$ aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \sqrt{x}$ hervorgeht. Geben Sie den Definitionsbereich von f und g an. Skizzieren Sie die Graphen von f und g in dasselbe Koordinatensystem.
- Stellen Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse aus Teilaufgabe a) eine Vermutung auf, wie die Gleichung der Ableitung von g lauten könnte. Erläutern Sie Ihre Vermutung.
- Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe b) mit einem MMS.

Hinweis:

Da die Tangente der Graph einer linearen Funktion ist, wird dieses Näherungsverfahren als **lineare Approximation** bezeichnet. (lat. approximare = annähern)

- 12 Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, g mit $g(x) = \frac{1}{x}$ und h mit $h(x) = \frac{1}{x^2}$. Sie haben alle den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^{>0}$ und den Wertebereich $W = \mathbb{R}^{>0}$. Für jede Stelle x mit $x > 0$ kann ein Rechteck festgelegt werden, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

- a) Geben Sie für f , g und h jeweils die Gleichung einer Funktion an, die den Flächeninhalt des Rechtecks in Abhängigkeit von x beschreibt.
- b) Begründen Sie, dass es für keine der Funktionen einen Wert $x_0 > 0$ gibt, für den der Flächeninhalt des Rechtecks maximal ist.



Test 2

→ Lösungen, Seite xxx

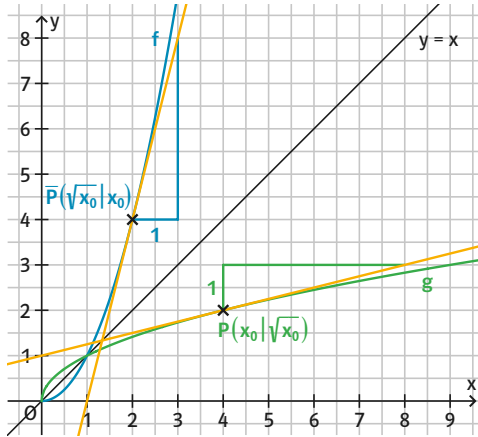
- 13 Die Rampe einer Wasserbahn wird für $x \in [-30; 1]$ durch die Funktion f mit $f(x) = -x + 5$ beschrieben (x und $f(x)$ in m). Sie geht ohne Knick in ein Teilstück über, dass sich für $x \in [1; 5]$ mit einer Funktion $g(x) = \frac{a}{x} + b$ beschreiben lässt. Bestimmen Sie a und b .

• 14 Die Ableitungsfunktion der Umkehrfunktion grafisch ermitteln

Gegeben sind der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ und $D_f = \mathbb{R}^{>0}$ und der Graph ihrer Umkehrfunktion g mit $g(x) = \sqrt{x}$.

Zeichnet man im Punkt $\bar{P}(\sqrt{x_0} | x_0)$ die Tangente an den Graphen von f , so erhält man durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden die Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(x_0 | \sqrt{x_0})$. Die Streckenlängen im Steigungsdreieck bleiben beim Spiegeln gleich.

- a) Zeigen Sie anhand der Abbildung, dass für alle $x_0 > 0$ $g'(x_0) = \frac{1}{f'(\sqrt{x_0})}$ gilt.
- b) Bestätigen Sie mithilfe der Formel aus Teilaufgabe a) die Ableitungsregel für die Wurzelfunktion g .



• 15 Die Ableitung der Wurzelfunktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ rechnerisch ermitteln

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$.

Abdul möchte die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ rechnerisch nachweisen. Nach dem Aufstellen des Differenzenquotienten kommt er jedoch nicht weiter.

Seine Lehrerin gibt ihm den Tipp, den Differenzenquotienten mit $(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})$ zu erweitern und dann im Zähler des Bruches die dritte binomische Formel anzuwenden. Notieren Sie Abduls Ansatz und setzen Sie ihn fort. Geben Sie zu jedem Schritt eine kurze Erläuterung.

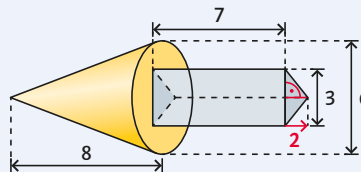
Für alle $x_0 > 0$ und h mit $0 < |h| < |x_0|$

$$\text{gilt: } \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h}$$

Grundwissen Test

Größen in zusammengesetzten Körpern berechnen

- 16 Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt des abgebildeten Körpers (alle Angaben in cm).



→ Grundwissen, Seite 419
Lösungen, Seite XXX

Quellennachweis

Alamy stock photo, Abingdon (MARK HICKEN), **6.2**; Blühdorn GmbH, Fellbach, **29.1**; Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart (Adrienn Vasicsek), **41.3**; Getty Images Plus, München (iStock/Aleksandr Shulichenko), **24.2**; Getty Images Plus, München (iStock/molchanovdmitry), **6.1**; Getty Images Plus, München (The Image Bank/Andrew Bret Wallis), **35.1**; Jörgens, Thomas, Hemer, **8.1**; **8.2**; Mauritius Images, Mittenwald (Perry Mastrovito/Alamy), **16.1**; Oehler, Sandra, Remseck, **9.1**; **10.1**; **10.2**; **23.1**; **23.2**; **45.1**; stock.adobe.com, Dublin (Anna Averianova), **31.5**; tiff.any GmbH & Co. KG, Berlin, **10.3**; **12.1**; **13.1**; **13.2**; **13.3**; **14.1**; **16.2**; **16.3**; **18.1**; **19.2**; **19.3**; **19.6**; **20.1**; **21.2**; **21.3**; **21.4**; **22.1**; **22.2**; **22.3**; **23.3**; **24.1**; **24.3**; **25.1**; **26.2**; **28.2**; **28.3**; **29.2**; **29.3**; **29.4**; **29.5**; **29.6**; **30.1**; **30.2**; **30.3**; **30.4**; **30.5**; **31.1**; **31.2**; **31.3**; **31.4**; **31.6**; **31.7**; **31.8**; **31.9**; **31.10**; **31.11**; **32.1**; **32.2**; **32.3**; **32.4**; **32.5**; **32.6**; **32.7**; **32.8**; **33.1**; **33.2**; **34.1**; **34.2**; **34.3**; **34.4**; **34.5**; **34.6**; **35.2**; **36.2**; **37.1**; **37.2**; **37.3**; **38.1**; **38.2**; **39.1**; **40.1**; **40.2**; **41.1**; **42.1**; **42.2**; **43.1**; **43.2**; **43.3**; **43.4**; **44.1**; **44.2**; **44.3**; **45.2**; **45.3**; **47.1**; Uwe Alfer, Kråksmåla, Alsterbro, **11.1**; **17.1**; **17.2**; **18.2**; **19.1**; **19.4**; **19.5**; **20.2**; **21.1**; **26.1**; **27.1**; **28.1**; **36.1**; **38.3**; **40.3**; **40.4**; **41.2**; **44.4**; **46.1**; **46.2**; **46.3**

Die Reihenfolge und Nummerierung der Bild- und Textquellen im Quellennachweis erfolgt automatisch und entspricht u. U. nicht der Nummerierung der Bild- und Textquellen im Werk. Die automatische Vergabe der Positionsnummern erfolgt in der Regel von links oben nach rechts unten, ausgehend von der linken oberen Ecke der Abbildung.

Lambacher Schweizer

Ein klares Konzept für differenziertes Lernen

Nach individuellen Bedürfnissen fördern und fordern

mit vielen Aufgaben und dem dreistufigen, klaren Differenzierungskonzept von Lambacher Schweizer

Grundwissen wiederholen und sichern

mit dem Check-in zu den Grundlagen vor jedem Kapitel, den regelmäßigen Grundwissen-Aufgaben zu wichtigen Inhalten vergangener Schuljahre sowie dem dazu passenden Nachschlageteil im Buch.

Digitale Hilfsmittel kompetent einsetzen

mit anschaulichen Beispielen, Anleitungen und klar gekennzeichneten Aufgaben, die den Einsatz eines modularen Mathematiksystems fordern.

Sicher zur Klausur und zum Abitur

mit dem Check-out zum Lernfortschritt, den Trainingsaufgaben mit Lösungen, zwei Test-Klausuren mit Lösungen am Ende jedes Kapitels und extra Seiten zur Vorbereitung auf das Abitur.