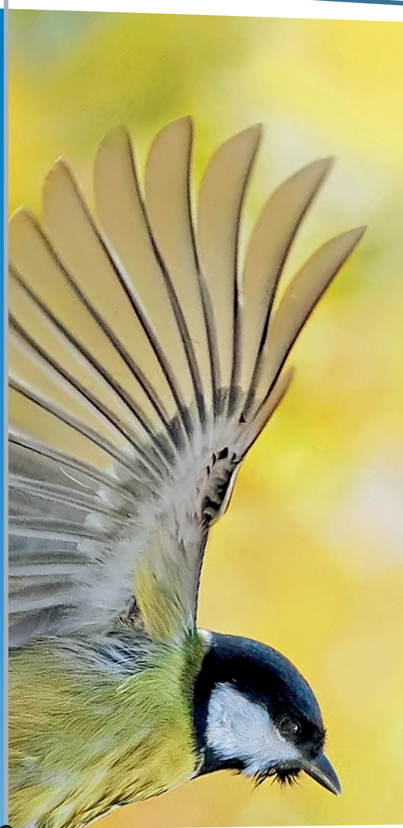
Teildruck
Die Verkaufsauflage erscheint
unter der ISBN 978-3-12-735383-9.

Lambacher Schweizer

Mathematik für Gymnasien

Kursstufe
Leistungsfach



Lösungen

Baden-Württemberg

Klett

Quellennachweis

Alamy stock photo, Abingdon (Images & Stories), **00.1**; imprint, Zusmarshausen, **1.1; 1.2; 2.2; 2.3; 4.1; 6.1; 9.1; 13.1; 16.2; 27.2; 27.3; 27.4; 29.2; 30.2**; ShutterStock.com RF, New York (Bachkova Natalia), **00.2**; Uwe Alfer, Kråksmåla, Alsterbro, **2.1; 6.2; 11.1; 13.2**;

Die Reihenfolge und Nummerierung der Bild- und Textquellen im Quellennachweis erfolgt automatisch und entspricht u. U. nicht der Nummerierung der Bild- und Textquellen im Werk. Die automatische Vergabe der Positionsnummern erfolgt in der Regel von links oben nach rechts unten, ausgehend von der linken oberen Ecke der Abbildung.

1. Auflage 1 5 4 3 2 1 | 26 25 24 23 22

Alle Drucke dieser Auflage sind unverändert und können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Druckes.

Autorinnen und Autoren: Manfred Baum, Martin Bellstedt, Dr. Dieter Brandt, Heidi Buck (†), Prof. Rolf Dürr, Prof. Hans Freudigmann, Inga Giersemehl, Dieter Greulich, Dr. Frieder Haug, Edmund Herd, Maren Herrmann, Prof. Detlef Hoche, Thomas Jörgens, Thorsten Jürgensen-Engl, Dr. Michael Kölle, Andreas König, Marion Rauscher, Rolf Reimer, Dr. Wolfgang Riemer, Dr. Rebecca Roy, Rüdiger Sandmann, Prof. Dr. Torsten Schatz, Prof. Reinhard Schmitt-Hartmann, Raphaela Sonntag, Heike Spielmans, Michael Stanzel, Andrea Stühler, Alexander Wollmann, Dr. Peter Zimmermann, Prof. Manfred Zinser

Entstanden in Zusammenarbeit mit dem Projektteam des Verlages.

Gestaltung: Petra Michel, Bamberg
Umschlaggestaltung: Petra Michel, Bamberg
Titelbilder: Gebäude: Alamy stock photo, Abingdon (Images & Stories); Vogel: ShutterStock.com RF, New York (Bachkova Natalia)
Satz: imprint, Zusmarshausen

Printed in Germany
ISBN 978-3-12-735383-9

9 783127 353839

I Grundlagen der Differenzialrechnung

1 Ableitung und Ableitungsregeln

Seite 10

Einstiegsaufgabe

a) Mittlere Vertikalgeschwindigkeit

$[5;15]$: $\approx 50\frac{m}{s}$, $[5;10]$: $\approx 40\frac{m}{s}$, $[5;7{,}5]$: $\approx 32\frac{m}{s}$.

b) Die momentane Vertikalgeschwindigkeit der Rakete zu einem vorgegebenen Zeitpunkt t entspricht der Steigung der Tangente an den Graphen von h im Punkt $P(t\,|\,h(t))$.

Die Tangente im Punkt $P(10\,|\,250)$ verläuft näherungsweise durch den Punkt $Q(15\,|\,480)$ und hat die Steigung $\frac{480-250}{15-10} = 46$.

Ergebnis: Die momentane Vertikalgeschwindigkeit 10 s nach dem Start beträgt ca. $46\frac{m}{s}$.

c) Die mittlere Geschwindigkeit entspricht der durchschnittlichen Geschwindigkeit in einem Zeitraum $[a;b]$. Man erhält sie, indem man die in diesem Zeitraum zurückgelegte Strecke durch die dafür benötigte Zeit teilt. Geometrisch entspricht dies der Steigung der Sekante durch die Punkte $A(a\,|\,h(a))$ und $B(b\,|\,h(b))$, also dem Term $\frac{h(b)-h(a)}{b-a}$. Die Momentangeschwindigkeit entspricht der Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt a. Geometrisch entspricht sie der Tangentensteigung an den Graphen von h im Punkt $A(a\,|\,h(a))$, also dem Term $h'(a)$.

Seite 12

1 a) $f'(x) = 2\cos(x) - 3x^{-4}$

$f''(x) = -2\sin(x) + 12x^{-5}$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $D_{f''} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

b) $f(t) = -4t^{\frac{1}{2}} - 3t$

$f'(t) = -2t^{-\frac{1}{2}} - 3$

$f''(t) = t^{-\frac{3}{2}}$

$D_f = \mathbb{R}_0^+$; $D_{f'} = \mathbb{R}^+$; $D_{f''} = \mathbb{R}^+$

c) $f(t) = t^4 - t^{\frac{1}{4}}$

$f'(t) = 4t^3 - \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}$

$f''(t) = 12t^2 + \frac{3}{16}t^{-\frac{7}{4}}$

$D_f = \mathbb{R}_0^+$; $D_{f'} = \mathbb{R}^+$; $D_{f''} = \mathbb{R}^+$

d) $f(s) = 2s^{-\frac{1}{2}} - 3s^5$

$f'(t) = -s^{-\frac{3}{2}} - 15s^4$

$f''(t) = \frac{3}{2}s^{-\frac{5}{2}} - 60s^3$

$D_f = \mathbb{R}^+$; $D_{f'} = \mathbb{R}^+$; $D_{f''} = \mathbb{R}^+$

e) $f(x) = -\cos(x) + x^{-2}$

$f'(x) = \sin(x) - 2x^{-3}$

$f''(x) = \cos(x) + 6x^{-4}$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $D_{f''} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

f) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 3\cos(x)$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 3\sin(x)$

$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} - 3\cos(x)$

$D_f = \mathbb{R}_0^+$; $D_{f'} = \mathbb{R}^+$; $D_{f''} = \mathbb{R}^+$

2 a) $f(x) = x^2 + 8x + 16$

$f'(x) = 2x + 8$

$D_f = \mathbb{R}$; $D_{f'} = \mathbb{R}$

b) $f(t) = 3t^2 - 0{,}5t$

$f'(t) = 6t - 0{,}5$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

c) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} = x^2 + x^{-1}$

$f'(x) = 2x - x^{-2}$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

d) $f(s) = 4s^2 - 12s + 9$

$f'(s) = 8s - 12$

$D_f = \mathbb{R}$; $D_{f'} = \mathbb{R}$

e) $f(s) = -2s^2 + 12s - 16$

$f'(s) = -4s + 12$

$D_f = \mathbb{R}$; $D_{f'} = \mathbb{R}$

f) $f(t) = 2t + \frac{4}{t} = 2t + 4t^{-1}$

$f'(t) = 2 - 4t^{-2}$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

3 (1) $f(5) \approx 2{,}2$; $f(3) \approx 1{,}7$

(2) $f(5) - f(3) \approx 2{,}2 - 1{,}7 = 0{,}5$

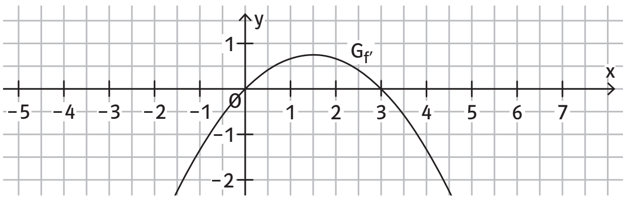
(3) $\frac{f(5)-f(3)}{5-3} \approx 0{,}25$

Dies entspricht der Steigung der Geraden durch die Punkte $P_1(3\,|\,1{,}7)$ und $P_2(5\,|\,2{,}2)$.

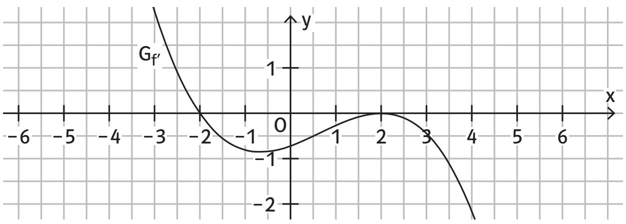
(4) $f'(5) \approx 0{,}2$

Dies entspricht der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_2(5\,|\,2{,}2)$.

4 a)



b)



5 Ableitung: $f'(x) = 4x$.

a) Ansatz: $4x = 4$, also $x = 1$ mit $f(1) = 4$.

Ergebnis: $P(1\,|\,4)$.

b) $g'(x) = 3x^2 - 4$

Ansatz: $3x^2 - 4 = 4x$, also $x_1 = 2$ und $x_2 = -\frac{2}{3}$ mit $f(2) = 10$ und $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{26}{9}$.

Ergebnis: $Q_1(2\,|\,10)$ und $Q_2\left(-\frac{2}{3}\,\middle|\,\frac{26}{9}\right)$.

6 a) $f_a'(x) = \frac{2}{a}\cdot x + a$

b) $f_a'(x) = -a\cdot\sin(x)$

c) $f_a'(x) = -a\cdot\cos(x) + 2ax$

Seite 13

9 **a)** $f_a(x) = a^2 - a \cdot x^{\frac{1}{2}}$

$f_a'(x) = -\frac{a}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{a}{2\sqrt{x}}$

$f_2'(1) = -1$

b) $f_a'(x) = 5ax^4 - \frac{1}{a^5}$

$f_2'(1) = \frac{319}{32}$

c) $f_a(x) = a \cdot x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{a}x^{-1}$

$f_a'(x) = \frac{a}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{a}x^{-2}$

$f_2'(1) = \frac{1}{6}$

d) $f_a(x) = ax^{-1} + a^2x^{-2}$

$f_a'(x) = -ax^{-2} - 2a^2x^{-3}$

$f_2'(1) = -10$

e) $f_a(x) = ax^{-1} + \frac{x^2}{a^2}$

$f_a'(x) = -ax^{-2} + \frac{2x}{a^2}$

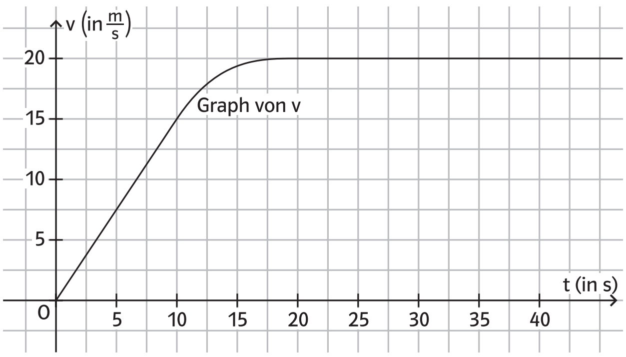
$f_2'(1) = -\frac{3}{2}$

f) $f_a(x) = a^2x^2 - 2ax + 1$

$f_a'(x) = 2a^2x - 2a$

$f_2'(1) = 4$

10 **a)** Individuelle Lösung, z. B.:



b) Für $0 \le t < 20$ gilt $v'(t) > 0$, da die Geschwindigkeit zunimmt.
Für $t \ge 20$ gilt $v'(t) = 0$, da sich die Geschwindigkeit nicht ändert.

c) $v(2) = 3$: Zwei Sekunden nach dem Beginn der Fahrt hat der Pkw die Geschwindigkeit $3\,\frac{m}{s}$.

$\frac{v(15) - v(12)}{15 - 12} = 1{,}2$: Im Zeitintervall zwischen zwölf und fünfzehn Sekunden nach dem Beginn der Fahrt beträgt die mittlere Geschwindigkeit $1{,}2\,\frac{m}{s}$.

$v'(15) = 1$: Fünfzehn Sekunden nach Beginn der Fahrt beträgt die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit (die Beschleunigung) $1\,\frac{m}{s^2}$.

11 **a)** Tangente: $y = x$.
Steigungswinkel: $\alpha = 45°$.

b) Tangente: $y = 2x - 4$.
Steigungswinkel: $\alpha \approx 63{,}4°$.

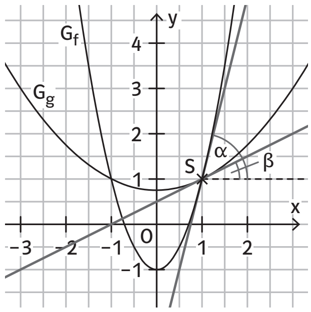
c) Tangente: $y = -3x + \pi$.
Steigungswinkel: $\alpha \approx -71{,}6°$.

12 **a)** Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 3$; $g'(x) = 2x - 2$.
Untersuchung der Stelle $x_1 = 1$:
Es ist $f(1) = g(1) = -2$ sowie $f'(1) = g'(1) = 0$.
Die Graphen berühren sich an der Stelle $x_1 = 1$.
Untersuchung der Stelle $x_2 = -1$:
Es ist $f(-1) = g(-1) = 2$, aber $f'(-1) = 0$ und $g'(-1) = -4$.
Die Graphen berühren sich nicht an der Stelle $x_2 = -1$.

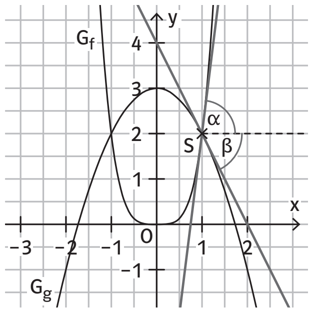
b) Ableitungen: $f'(x) = 2x^3$; $g'(x) = 4x^3 - 4x$.
Untersuchung der Stelle $x_1 = -2$:
Es ist $f(-2) = g(-2) = 8$, aber $f'(-2) = -16$ und $g'(-2) = -24$.
Die Graphen berühren sich nicht an der Stelle $x_1 = -2$.
Untersuchung der Stelle $x_2 = 0$:
Es ist $f(0) = g(0) = 0$ sowie $f'(0) = g'(0) = 0$.
Die Graphen berühren sich an der Stelle $x_2 = 0$.
Untersuchung der Stelle $x_3 = 2$:
Es ist $f(2) = g(2) = 8$, aber $f'(2) = 16$ und $g'(2) = 24$.
Die Graphen berühren sich nicht an der Stelle $x_3 = 2$.

13 Aus $f(5) = 0$ folgt $25a + 5ab = 0 \Leftrightarrow 5a(5 + b) = 0$, d. h. $b = -5$.
Also ist $f(x) = ax^2 - 5ax$ und $f'(x) = 2ax - 5a$.
Aus $f'(5) = \tan(30°)$ folgt $5a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, d. h. $a = \frac{\sqrt{3}}{15}$.
Ergebnis: $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{15}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

15 **a)** Tangente an G_f in S:
$y = 4x - 3$ mit Steigungswinkel $\alpha \approx 76{,}0°$.
Tangente an G_g in S:
$y = 0{,}5x + 0{,}5$ mit Steigungswinkel $\beta \approx 26{,}6°$.
Schnittwinkel:
$\alpha - \beta \approx 49{,}4°$.



b) Tangente an G_f in S:
$y = 8x - 6$ mit Steigungswinkel $\alpha \approx 82{,}9°$.
Tangente an G_g in S:
$y = -2x + 4$ mit Steigungswinkel $\beta \approx -63{,}4°$.
Schnittwinkel:
$180° - (\alpha - \beta) \approx 33{,}7°$.



16 In den Teilaufgaben a) und b) wird jeweils gezeigt, dass die Differenzenquotienten auf den Intervallen $[a - h; a]$ und $[a; a + h]$ für $h > 0$ unterschiedlich und konstant sind. Daraus folgt, dass der Grenzwert der Differenzenquotienten für $h \to 0$ nicht existiert.

a) Untersuchung an der Stelle $a = 1$:

Intervall $[1 - h; 1]$: $\frac{f(1-h) - f(1)}{(1-h) - 1} = \frac{-(1-h) + 1 - 0}{-h} = \frac{h}{-h} = -1$

Intervall $[1; 1 + h]$: $\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{1 + h - 1 - 0}{h} = \frac{h}{h} = 1$

b) Untersuchung an der Stelle $a = 0$:

Intervall $[-h; 0]$: $\frac{f(-h) - f(0)}{-h - 0} = \frac{0 - 0}{-h} = 0$

Intervall $[0; h]$: $\frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \frac{0{,}5h - 0}{h} = 0{,}5$

c) Untersuchung an der Stelle $a = 0$:

Intervall $[-h; 0]$: $\frac{f(-h) - f(0)}{-h - 0} = \frac{0 - 0}{-h} = 0$

Intervall $[0; h]$: $\frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \frac{1 - 0}{h} = \frac{1}{h}$. Der Grenzwert dieses Differenzenquotienten existiert nicht für $h \to 0$.

2 Verkettung von Funktionen

Seite 14

Einstiegsaufgabe
Ja, das ist in einem Schritt möglich. Dies kann man z.B. mithilfe der Funktion g mit $g(k) = 1{,}8\,(k - 273) + 32 = 1{,}8k - 459{,}4$ (k: Temperatur in Kelvin, g(k): Temperatur in °F) in einem Schritt umrechnen.

Seite 15

1 **a)** $f(x) = 3x - 3$; $D_f = \mathbb{R}$
$g(x) = 3x - 1$; $D_g = \mathbb{R}$
b) $f(x) = \frac{2}{x+5}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-5\}$
$g(x) = \frac{2}{x} + 5$; $D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
c) $f(x) = \cos(4 - x)$; $D_f = \mathbb{R}$
$g(x) = 4 - \cos(x)$; $D_g = \mathbb{R}$
d) $f(x) = \sqrt{2(x-2)} = \sqrt{2x - 4}$; $D_f = [2; +\infty[$
$g(x) = \sqrt{2x} - 2$; $D_g = [0; +\infty[$
e) $f(x) = 49x^2$; $D_f = \mathbb{R}$
$g(x) = -7x^2$; $D_g = \mathbb{R}$
f) $f(x) = \frac{1}{\cos(x) + 2}$; $D_f = \mathbb{R}$
$g(x) = \cos\left(\frac{1}{x+1}\right) + 1$; $D_g = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

2 $(u + v)(x) = x^2 + x + 2$; $(u \cdot v)(x) = x^2(x + 2)$;
$(u \circ v)(x) = (x + 2)^2$; $(w \cdot v)(x) = \sqrt{x} \cdot (x + 2)$;
$(w \circ v)(x) = \sqrt{x + 2}$

3

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4	2	1	3	1	2	3	4
g(x)	−1	1	−1	0	1	0	1	−2

4 **a)** $v(x) = x^2 - 1$; $u(x) = \frac{1}{x}$
b) $v(x) = \frac{1}{x^2}$; $u(x) = x - 1$
c) $v(x) = \sin(x)$; $u(x) = x^2$
d) $v(x) = x^2$; $u(x) = \sin(x)$
e) $v(x) = x + 3$; $u(x) = \sqrt{x}$
f) $v(x) = 3x$; $u(x) = \sqrt{x}$
g) $v(x) = x - 3$; $u(x) = 2^x$
h) $v(x) = 2^x$; $u(x) = x - 3$

Seite 16

6 **a)** $f(0) = u(v(0)) = u(1{,}5) = -0{,}75$
$f(1) = u(v(1)) = u(1) = -1$
$g(0) = v(u(0)) = v(0) = 1{,}5$
$g(1) = v(u(1)) = v(-1) = 1$
b) $f(x) = u(v(x)) = 0 \Leftrightarrow v(x) = 0$ oder $v(x) = 2$
$\Leftrightarrow x_1 = 3$ oder $x_2 = -1$
$g(x) = v(u(x)) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 3 \Leftrightarrow x_1 = 3$ oder $x_2 = -1$
Somit haben die Funktionen f und g die gleichen Nullstellen.
c) Es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} u(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} v(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = -\infty$. Daraus folgt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = -\infty$

7 $A(t) = 30 + 6t$ (t: Zeit in Minuten; A(t): Flächeninhalt des mit Öl bedeckten Kreises in cm²)
Mit $A(t) = \pi \cdot (r(t))^2$ folgt $r(t) = \sqrt{\frac{A(t)}{\pi}} = \sqrt{\frac{30 + 6t}{\pi}}$ (t: Zeit in Minuten; r(t): Radius des mit Öl bedeckten Kreises in cm).

8 Es ist $(u_a \circ v_a)(5) = u_a(v_a(5))$
$= u_a(5 + a) = a \cdot (5 + a)^2 + 1.$
Ansatz: $(u_a \circ v_a)(5) = 1 \Leftrightarrow a \cdot (5 + a)^2 + 1 = 1$
$\Leftrightarrow a \cdot (5 + a)^2 = 0.$
Lösungen: $a_1 = 0$ und $a_2 = -5$

9 **a)** Die Aussage ist falsch.
Gegenbeispiel: Man wählt u mit $u(x) = x$ und v mit $v(x) = \cos(x)$. Dann hat u genau eine Nullstelle, aber f mit $f(x) = u(v(x)) = \cos(x)$ hat unendlich viele Nullstellen.
b) Die Aussage ist falsch.
Gegenbeispiel: Man wählt u mit $u(x) = \cos(x)$ und v mit $v(x) = x$. Dann hat v genau eine Nullstelle, aber f mit $f(x) = u(v(x)) = \cos(x)$ hat unendlich viele Nullstellen.
c) Die Aussage ist wahr.
Es gilt $f(x) = 0 \Leftrightarrow u(v(x)) = 0$. Wenn f eine Nullstelle x_1 haben soll, so muss $v(x_1)$ eine Nullstelle von u sein. Wenn u keine Nullstelle hat, so kann auch f keine haben.

11 **a)** Es ist
$f(-x) = \cos((-x)^3) = \cos(-x^3) \underbrace{=}_{(*)} \cos(x^3) = f(x).$
Somit ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse.
(An der mit (*) gekennzeichneten Stelle geht die Achsensymmetrie des Graphen der Kosinusfunktion zur y-Achse ein).
b) Nach Voraussetzung gilt $u(-x) = u(x)$ und $v(-x) = -v(x)$. Daraus folgt
$f(-x) = u(v(-x)) = u(-v(x)) = u(v(x)) = f(x)$.
Somit ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse.
c) Individuelle Lösung, z.B.:
1. Sind G_u und G_v punktsymmetrisch zum Ursprung, so ist auch G_f punktsymmetrisch zum Ursprung.
Nach Voraussetzung gilt $u(-x) = -u(x)$ und $v(-x) = -v(x)$. Daraus folgt
$f(-x) = u(v(-x)) = u(-v(x)) = -u(v(x)) = -f(x)$.
Somit ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung.
2. Ist G_v achsensymmetrisch zur y-Achse, so ist auch G_f achsensymmetrisch zur y-Achse.
Nach Voraussetzung gilt $v(-x) = v(x)$. Daraus folgt $f(-x) = u(v(-x)) = u(v(x)) = f(x)$. Somit ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse.

12 **a)** Mit $v(w(x)) = \cos(3x)$ folgt
$f(x) = u(\cos(3x)) = (\cos(3x))^2$.
Mit $u(v(x)) = (\cos(x))^2$ folgt
$g(x) = (\cos(w(x)))^2 = (\cos(3x))^2$.
Die Funktionsterme von f und g sind identisch.
b) Es ist $(u \circ (v \circ w))(x) = u((v \circ w)(x)) = u(v(w(x)))$ und
$((u \circ v) \circ w)(x) = (u \circ v)(w(x)) = u(v(w(x)))$.

3 Kettenregel

Seite 17

Einstiegsaufgabe

- Lucia hat den Term $f(x)$ richtig umgeformt und richtig abgeleitet. Da die Ableitung einer Funktion immer eindeutig ist, die Terme $96x^5 + 24x^2$ und $24x^2$ aber nicht äquivalent sind, kann nur Lucias Ergebnis richtig sein.
- Lucia hat zunächst den Term $f(x)$ mithilfe der ersten binomischen Formel umgeformt. Anschließend hat sie den umgeformten Term mit der Summen-, Faktor- und Potenzregel abgeleitet.
  Alex hat die äußere Funktion u mit $u(x) = x^2$ und die innere Funktion v mit $v(x) = 4x^3 + 1$ einzeln abgeleitet, also $u'(x) = 2x$ und $v'(x) = 12x^2$. Anschließend hat er die Ableitung von f wie folgt gebildet:
  $f'(x) = u'(v'(x)) = 24x^2$. Er erhält dabei ein falsches Ergebnis für die Ableitung von f und deshalb kann sein Vorgehen nicht stimmen.

Seite 18

1 a) $f'(x) = 96x^3(8x^4 + 2)^2$
b) $f'(x) = -15\left(\frac{1}{2} - 5x\right)^2$
c) $f'(x) = 4(x + 2)^3$
d) $f'(x) = x(x^2 - 5)$
e) $f'(x) = -8(8x - 7)^{-2}$
f) $f'(x) = 4(5 - x)^{-5}$
g) $f'(x) = -90x^2(15x^3 - 3)^{-3}$
h) $f'(x) = -2(15 - 6x)(15x - 3x^2)^{-3}$

2 a) $f'(x) = 8\cos(4x)$, also $\square = 8$.
b) $g'(x) = -6(1 - 3x)^3$, also $\square = -6$ und $\triangle = 3$.
c) $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 - x}} \cdot (6x - 1)$, also $\square = 6$ und $\triangle = 3x^2 - x$.
d) $f'(t) = \cos(\sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}$, also $\square = \sqrt{t}$ und $\triangle = 2\sqrt{t}$.

3 a) $f(x) = (x - 1)^{-3}$; $f'(x) = -3(x - 1)^{-4} = -\frac{3}{(x - 1)^4}$
b) $f(x) = (1 - x)^{-3}$; $f'(x) = 3(1 - x)^{-4} = \frac{3}{(1 - x)^4}$
c) $f(x) = (3x + 2)^{-2}$; $f'(x) = -6(3x + 2)^{-3} = -\frac{6}{(3x + 2)^3}$
d) $f(x) = \frac{1}{3}(x + 2)^{-2}$; $f'(x) = -\frac{2}{3}(x + 2)^{-3} = -\frac{2}{(3x + 2)^3}$
e) $f(x) = (x + 3)^{\frac{1}{2}}$; $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$
f) $f(t) = (3t + 1)^{\frac{1}{2}}$; $f'(t) = \frac{3}{2}(3t + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3t + 1}}$
g) $f(x) = (5x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$; $f'(x) = 5x(5x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 1}}$
h) $f(t) = \sqrt{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}}$; $f'(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t^3}}$
i) $f'(x) = -6\sin(3x)$
j) $f'(t) = 15t^2 \cdot \cos(5t^3 + 1)$
k) $f(x) = (\cos(x))^{\frac{1}{2}}$; $f'(x) = \frac{1}{2}(\cos(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin(x)) = -\frac{\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}$
l) $f(t) = (\sin(t))^{-1}$; $f'(t) = -(\sin(t))^{-2} \cdot \cos(t) = -\frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}$

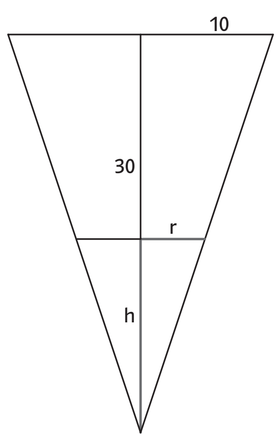
4 Fehler bei A: Die innere Ableitung ist falsch und die Hochzahl bei f ist nicht als Faktor bei f′ berücksichtigt.
Richtig: $f'(x) = 12x^3(x^4 + 2)^2$.
Fehler bei B: Die innere Ableitung wurde vergessen.
Richtig: $f'(x) = 10(2x - 5)^4$.
Fehler bei D: Das Argument von cos in $f'(x)$ ist falsch.
Richtig: $f'(x) = 12\cos(3x)$.
Fehler bei E: Das Argument von cos in $f'(x)$ ist die innere Ableitung von $f(x)$ und muss somit der Vorfaktor von $f'(x)$ sein. Dieser Vorfaktor wurde vergessen. Das Argument von cos ist demzufolge auch falsch.
Richtig: $f'(x) = 2x\cos(x^2)$.

6 Ableitung: $f'(x) = (3x + 2)^2$.
a) $f'(2) = 64$. Der Graph von f hat im Punkt P die Steigung 64.
b) Ansatz: $f'(x) = 0$; Lösung: $x_1 = -\frac{2}{3}$. Der Graph hat genau einen Punkt mit waagerechter Tangente, und zwar den Punkt $Q\left(-\frac{2}{3}\middle|f\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.
c) Ansatz: $f'(x) = \tan(45°) \Leftrightarrow f'(x) = 1$; Lösungen: $x_2 = -1$ und $x_3 = -\frac{1}{3}$. Ergebnis: $R\left(-1\middle|-\frac{1}{9}\right)$ und $S\left(-\frac{1}{3}\middle|\frac{1}{9}\right)$.

Seite 19

7 a) $f(2) = u(v(2)) = u(-1{,}5) = -1{,}5$
Mit $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ folgt
$f'(2) = u'(v(2)) \cdot v'(2) = u'(-1{,}5) \cdot v'(2) \approx 3 \cdot 1 = 3$.
b) Es ist $f'(x) = 0$ genau dann, wenn (1) $u'(v(x)) = 0$ oder (2) $v'(x) = 0$ ist.
(1): u′ hat als einzige Nullstelle 0. Es ist $v(x) = 0$ für $x_1 = -1$ und für $x_2 = 3$. Also gilt $u'(v(x_1)) = 0$ und $u'(v(x_2)) = 0$.
(2): $v'(x) = 0$ für $x_3 = 1$.
Ergebnis: Nullstellen von f′ sind $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 1$.
c) Tangentengleichung:
Ansatz: $y = f'(2) \cdot x + c$. Punktprobe mit $P(2|-1{,}5)$:
$-1{,}5 = 3 \cdot 2 + c \Leftrightarrow c = -7{,}5$. Tangentengleichung:
$y = 3x - 7{,}5$.
Schnittpunkte mit den Achsen: $N(2{,}5|0)$ und $Y(0|-7{,}5)$.
Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 7{,}5 = 9{,}375$. Das Dreieck hat einen Flächeninhalt von ca. 9,38 FE.

8 a) Strahlensatz: $\frac{r}{h} = \frac{10}{30}$
$\Leftrightarrow 30r = 10h \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}h$
Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$= \frac{1}{3}\pi \frac{1}{9}h^2 h$
$= \frac{1}{27}\pi h^3$
$V(t) = 20t = \frac{1}{27}\pi(h(t))^3$
$\Leftrightarrow h(t) = \sqrt[3]{\frac{540t}{\pi}}$
$h(60) = \sqrt[3]{\frac{540 \cdot 60}{\pi}} \approx 21{,}8$
Nach einer Minute steht das Wasser fast 22 cm hoch im Behälter.



b) $h'(t) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{540\,t}{\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{540}{\pi} = \frac{180}{\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{540\,t}{\pi}\right)^2}}$

$h'(60) \approx 0{,}12$

Nach einer Minute steigt der Wasserspiegel um ca. 1,2 mm pro Sekunde.

9 a) Ansatz: $3 - ax \geq 0 \iff x \leq \frac{3}{a}$.

Maximale Definitionsmenge: $D_{f_a} = \left]-\infty; \frac{3}{a}\right]$.

b) $f_a(x) = (3 - ax)^{\frac{1}{2}}$; $f'_a(x) = -\frac{a}{2}(3 - ax)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-a}{2\sqrt{3 - ax}}$

c) Ansatz: $f'_a(2) = -0{,}5 \iff \frac{-a}{2\sqrt{3 - 2a}} = -0{,}5$

$\iff a = \sqrt{3 - 2a} \iff a^2 + 2a - 3 = 0$. Lösung: $a_1 = 1$.

(Die Lösung $a_2 = -3$ der quadratischen Gleichung ist weder Lösung von $\frac{-a}{2\sqrt{3 - 2a}} = -0{,}5$ noch laut Aufgabenstellung relevant.)

10 a) $f'_a(x) = -a \cdot \sin(ax)$; $f_a^{(21)}(x) = -a^{21} \cdot \sin(ax)$

b) $f'_a(x) = 21a \cdot (ax + 5)^{20}$;

$f_a^{(21)}(x) = 21 \cdot 20 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a^{21} = 21! \cdot a^{21}$

c) $f'_a(x) = -a^2 \cdot \cos(-a^2 x)$; $f_a^{(21)}(x) = -a^{42} \cdot \cos(-a^2 x)$

(Richtig ist auch $f'_a(x) = -a^2 \cdot \cos(a^2 x)$;

$f_a^{(21)}(x) = -a^{42} \cdot \cos(a^2 x)$ aufgrund der Achsensymmetrie des Graphen der Kosinusfunktion zur y-Achse.)

11 a) Begründung: Man leitet f mit der Kettenregel ab. Dabei ist g die äußere Funktion und v mit $v(x) = x^2$ die innere Funktion mit $v'(x) = 2x$. Laut Kettenregel gilt $f'(x) = g'(v(x)) \cdot v'(x) = g'(x^2) \cdot 2x = 2x \cdot g'(x^2)$.

b) $f'_1(x) = 3 \cdot g'(3x)$; $f'_2(x) = -g'(1 - x)$; $f'_3(x) = -\frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right)$

13 a) Begründung:
Es ist $v(-x) = -v(x)$. Also stimmen auch (1) die Ableitung von $v(-x)$ und (2) die Ableitung von $-v(x)$ überein.
(1): Die Funktion f mit $g(x) = v(-x)$ kann man als Verkettung mit der äußeren Funktion v und der inneren Funktion w mit $w(x) = -x$ auffassen. Ableiten mit der Kettenregel liefert $g'(x) = v'(-x) \cdot (-1) = -v'(-x)$
(2): Es ist $(-v(x))' = -v'(x)$.
Zusammen folgt: $-v'(-x) = -v'(x) \iff v'(-x) = v'(x)$.
Also ist der Graph von v′ achsensymmetrisch zur y-Achse.
b) Nach Voraussetzung gilt $v(-x) = -v(x)$ und $f'(-x) = -f'(x)$. Mit Teilaufgabe a) folgt $v'(-x) = v'(x)$.
Aus der Kettenregel $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ folgt
(1) $f'(-x) = u'(v(-x)) \cdot v'(-x) = u'(-v(x)) \cdot v'(x)$ und
(2) $-f'(x) = -u'(v(x)) \cdot v'(x)$.
Gleichsetzten von (1) und (2) liefert $u'(-v(x)) = -u'(v(x))$.
Also ist der Graph von u′ punktsymmetrisch zum Ursprung.

14 a) Individuelle Lösung, z. B.: $u(x) = \sqrt{x}$; $v(x) = \sin(x)$; $w(x) = x^2$.

b) $g'(x) = v'(w(x)) \cdot w'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$;

$f'(x) = u'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^2)}} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x = \frac{x \cdot \cos(x^2)}{\sqrt{\sin(x^2)}}$

c) Ist $f(x) = u(v(w(x)))$, so gilt
$f'(x) = u'(v(w(x))) \cdot v'(w(x)) \cdot w'(x)$.

4 Produktregel

Seite 20

Einstiegsaufgabe
Es gilt $f(x) = g(x) = h(x) = x^6$ und somit nach der Potenzregel $f'(x) = g'(x) = h'(x) = 6x^5$.
Da Matteo diesen Term nicht erhält, muss seine Regel falsch sein.

Seite 21

1 a) $f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$

b) $f'(x) = 3 \cdot \cos(x) - 3x \cdot \sin(x)$

c) $f'(x) = 3 \cdot \sqrt{x} + (3x + 2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2x - 3) + \sqrt{x} \cdot 2$

e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos(x) - \sqrt{x} \cdot \sin(x)$

f) $f'(x) = (-3) \cdot \sin(x) + (5 - 3x) \cdot \cos(x)$

g) $f(x) = 2 \cdot x^{-1} \cdot \cos(x)$

$f'(x) = -2x^{-2} \cdot \cos(x) - 2 \cdot x^{-1} \cdot \sin(x)$

$= -\frac{2}{x^2} \cdot \cos(x) - \frac{2}{x} \cdot \sin(x)$

h) $f'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \sin(x)$

$= (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2$

i) $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

j) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos(x)$

$f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \cdot \cos(x) - x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin(x)$

$= -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot \cos(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin(x)$

k) $f'(x) = (2x + 3) \cdot \sin(x) + (x^2 + 3x) \cdot \cos(x)$

l) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x^5 - 2x^3) + \sqrt{x} \cdot (5x^4 - 6x^2)$

2 a) $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$, also $\square = 2x$ und $\triangle = \cos(x)$.

b) $f'(x) = 2 \cdot \cos(4x^3) - (2x - 3) \cdot \sin(4x^3) \cdot 12x^2$, also $\square = 2$ und $\triangle = 12x^2$.

c) $f'(x) = -\cos(2 - x) \cdot \sqrt{3x - 1} + \sin(2 - x) \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x - 1}}$, also $\square = \cos(2 - x)$ und $\triangle = 3$.

d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (4x + 1) + \sqrt{x} \cdot 4$, also $\square = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und $\triangle = \sqrt{x}$.

e) $f'(x) = 6x(x^2 + 2)^2 \cdot \cos(-3x)$
$+ (x^2 + 2)^3 \cdot (-\sin(-3x)) \cdot (-3)$,
also $\square = 6x$, $\triangle = 3$ und $\bigcirc = -3$.

3 a) $f(x) = x \cdot \sin(3x)$;
$u(x) = x$; $u'(x) = 1$;
$v(x) = \sin(3x)$; $v'(x) = 3\cos(3x)$;
$f'(x) = \sin(3x) + 3x\cos(3x)$

b) $f(x) = (3x + 4)^2 \cdot \sin(x)$;
$u(x) = (3x + 4)^2$; $u'(x) = 6(3x + 4)$;
$v(x) = \sin(x)$; $v'(x) = \cos(x)$;
$f'(x) = 6(3x + 4) \cdot \sin(x) + (3x + 4)^2 \cdot \cos(x)$

c) $f(x) = x^{-1} \cdot (2x + 3)^2$
$u(x) = x^{-1}$; $u'(x) = -x^{-2}$
$v(x) = (2x + 3)^2$; $v'(x) = 4(2x + 3)$;
$f'(x) = -x^{-2} \cdot (2x + 3)^2 + 4x^{-1}(2x + 3)$
$= x^{-2}(2x - 3) \cdot (2x + 3) = 4 - \frac{9}{x^2}$

d) $f(x) = (5 - x^4)^3 \cdot (1 - 4x)$;
$u(x) = (5 - x^4)^3$; $u'(x) = -12x^3(5 - x^4)^2$;
$v(x) = 1 - 4x$; $v'(x) = -4$;
$f'(x) = -12x^3(5 - x^4)^2 \cdot (1 - 4x) + (5 - x^4)^3 \cdot (-4)$
$= (5 - x^4)^2 \cdot (52x^4 - 12x^3 - 20)$

e) $f(x) = (5 - 4x)^3 \cdot x^{-2}$; $u(x) = (5 - 4x)^3$;
$u'(x) = -12(5 - 4x)^2$; $v(x) = x^{-2}$; $v'(x) = -2 \cdot x^{-3}$;
$f'(x) = -12(5 - 4x)^2 \cdot x^{-2} - 2 \cdot x^{-3}(5 - 4x)^3$
$= -\frac{2}{x^3}(5 - 4x)^3 - \frac{12}{x^2}(5 - 4x)^2$
$= -2 \cdot x^{-3}(2x + 5)(5 - 4x)^2$

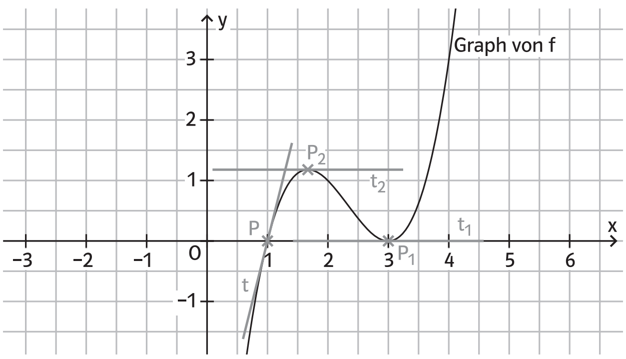
f) $f(x) = 3x \cdot \cos(2x^2)$;
$u(x) = 3x$; $u'(x) = 3$; $v(x) = \cos(2x^2)$;
$v'(x) = -4x \cdot \sin(2x^2)$;
$f'(x) = 3 \cdot \cos(2x^2) + 3x \cdot (-4x \cdot \sin(2x^2))$
$= 3 \cdot \cos(2x^2) - 12x^2 \cdot \sin(2x^2)$

g) $f(x) = 3x \cdot (\sin(x))^2$; $u(x) = 3x$; $u'(x) = 3$;
$v(x) = (\sin(x))^2$; $v'(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$;
$f'(x) = 3(\sin(x))^2 + 6x\sin(x) \cdot \cos(x)$

h) $f(x) = (2x - 1) \cdot \sqrt{x^3 - 1}$; $u(x) = 2x - 1$; $u'(x) = 2$;
$v(x) = \sqrt{x^3 - 1}$; $v'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}$;
$f'(x) = 2 \cdot \sqrt{x^3 - 1} + (2x - 1) \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}$

i) $f(x) = 0{,}5x^2\sqrt{4 - x}$; $u(x) = 0{,}5x^2$; $u'(x) = x$;
$v(x) = \sqrt{4 - x}$; $v'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{4 - x}}$; $f'(x) = x \cdot \sqrt{4 - x} - \frac{x^2}{4\sqrt{4 - x}}$

4 a) Nullstellen: $x_1 = 1$ (einfache Nullstelle) und $x_2 = 3$ (doppelte Nullstelle).
b) Ableitung:
$f'(x) = (x - 3)^2 + (x - 1) \cdot 2 \cdot (x - 3)$
$= (x - 3) \cdot ((x - 3) + (2x - 1))$
$= (x - 3) \cdot (3x - 5)$.
Mit $f(1) = 0$ und $f'(1) = 4$ folgt für die Tangente
$y = 4 \cdot (x - 1) = 4x - 4$.
Aus $\tan(\alpha) = f'(1) = 4$ folgt für die Größe des Steigungswinkels $\alpha \approx 76{,}0°$.
c) Ansatz: $f'(x) = 0$, also $(x - 3) \cdot (3x - 5) = 0$.
Lösungen (Satz vom Nullprodukt): $x_1 = 3$ mit $f(3) = 0$ und $x_2 = \frac{5}{3}$ mit $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{32}{27}$.
In den Punkten $P_1(3|0)$ und $P_2\left(\frac{5}{3}\middle|\frac{32}{27}\right)$ besitzt der Graph von f waagerechte Tangenten.
d) Skizze:



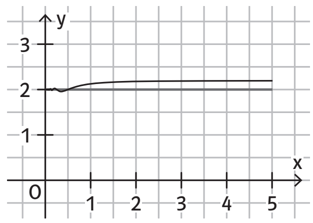
5 A: Beim Ableiten des Produkts wurden die Ableitungen beider Faktoren direkt miteinander multipliziert. Die Produktregel wurde nicht korrekt angewendet.
Korrekt: $f'(x) = 3 \cdot \sin(x) + (3x + 8) \cdot \cos(x)$.
B: Beim Ableiten der Kosinusfunktion wurde ein Vorzeichenfehler gemacht.
Korrekt: $f'(x) = 3 \cdot \cos(x) - (3x + 8) \cdot \sin(x)$.
C: Die Produktregel wurde richtig verwendet, aber beim Anwenden der linearen Kettenregel wurde der Faktor $m = 2$ nicht berücksichtigt.
Korrekt: $f'(x) = 2 \cdot \sin(2x) + (2x - 1) \cdot 2\cos(2x)$.

Seite 22

8 a) $f(x) = x^3 + 3x$; $f'(x) = 3x^2 + 3$
b) $f(t) = t^{\frac{1}{3}} \cdot (t^3 + t^{-1}) = t^{\frac{10}{3}} + t^{-\frac{2}{3}}$; $f'(t) = \frac{10}{3}t^{\frac{7}{3}} - \frac{2}{3}t^{-\frac{5}{3}}$
c) $f(s) = s^2 \cdot \left(s^{\frac{1}{2}} + s^{-4}\right) = s^{\frac{5}{2}} + s^{-2}$; $f'(s) = \frac{5}{2}s^{\frac{3}{2}} - 2s^{-3}$

9 a) $f(x) = 3x \cdot (2x^4 - 5)^{-1}$; $f'(x) = 3 \cdot (2x^4 - 5)^{-1}$
$+ 3x \cdot (-1) \cdot (2x^4 - 5)^{-2} \cdot 8x^3 = 3 \cdot (2x^4 - 5)^{-1}$
$- 24x^4 \cdot (2x^4 - 5)^{-2}$
b) $f(x) = 2x \cdot (x^2 - 1)^{-1}$; $f'(x) = 2 \cdot (x^2 - 1)^{-1}$
$+ 2x \cdot (-1) \cdot (x^2 - 1)^{-2} \cdot 2x = 2 \cdot (x^2 - 1)^{-1}$
$- 4x^2 \cdot (x^2 - 1)^{-2}$
c) $f(x) = 8x \cdot (2 - x^3)^{-1}$; $f'(x) = 8 \cdot (2 - x^3)^{-1}$
$+ 8x \cdot (-1) \cdot (2 - x^3)^{-2} \cdot (-3x^2) = 8 \cdot (2 - x^3)^{-1}$
$+ 24x^3 \cdot (2 - x^3)^{-2}$

10 a) Ansatz: $f(x) = 2$
$\Leftrightarrow \frac{1}{8}x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2 = 2$.
Lösungen: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 4$.
Koordinaten der Orte, die 2 km über NHN liegen:
$P(0|2)$, $Q(2|2)$ und $R(4|2)$.



Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{8} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{\pi}{16}x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.
Steigung an diesen Orten: $f'(0) = 0$, $f'(2) \approx -0{,}39$ und $f'(4) \approx 0{,}79$.
b) Mittlere Steigung in $[1{,}5; 2{,}5]$: $\frac{f(2{,}5) - f(1{,}5)}{2{,}5 - 1{,}5} \approx -0{,}35$.
Die betrachtete mittlere Steigung ist etwas größer als die Steigung an der Stelle $x = 2$. Das bedeutet, dass das Gelände im Mittel im Bereich $[1{,}5; 2{,}5]$ weniger stark fällt als an dieser Stelle.

11 a) $f'_a(x) = a \cdot \cos(ax) \cdot a \cdot x^2 + \sin(ax) \cdot 2ax$
$= a^2x^2 \cdot \cos(ax) + 2ax \cdot \sin(ax)$
b) $f'_a(x) = 4a(ax)^3 \cdot \sqrt{ax} + (ax)^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{ax}}$
$= 4a^4x^3 \cdot \sqrt{ax} + a^4x^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{ax}}$
c) $f'_a(x) = 2x \cdot \sqrt{x} + (x^2 + a) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

12 Nach Voraussetzung gilt $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$.
Untersuchung von g:
Es ist $g'(x) = f'(x) \cdot \cos(x) - f(x) \cdot \sin(x)$.
Damit gilt $g(0) = f(0) \cdot \cos(0) = 1 \cdot 1 = 1$ und
$g'(0) = f'(0) \cdot \cos(0) - f(0) \cdot \sin(0) = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0$.
Der Graph von g hat im Punkt $P(0|1)$ ebenfalls eine waagerechte Tangente.
Untersuchung von h:
Es ist $h'(x) = f(x) + (x + 1) \cdot f'(x)$.
Damit gilt $h(0) = (0 + 1) \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1$ und
$h'(0) = f(0) + (0 + 1) \cdot f'(0) = 1 + (0 + 1) \cdot 0 = 1$.
Der Graph von h hat im Punkt $P(0|1)$ keine waagerechte Tangente.

13 Nach Voraussetzung gilt $f(2) = 0$ und $f'(2) = 0$.
Es ist $g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$.
Damit gilt $g(2) = 2 \cdot f(2) = 2 \cdot 0 = 0$ und
$g'(2) = f(2) + 2 \cdot f'(2) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$.
Der Graph von g berührt die x-Achse im Punkt P.

14 a) $f'(x) = 2x \cdot g(x) + x^2 \cdot g'(x)$;
$f''(x) = 2 \cdot g(x) + 2x \cdot g'(x) + 2x \cdot g'(x) + x^2 \cdot g''(x)$
$= 2 \cdot g(x) + 4x \cdot g'(x) + x^2 \cdot g''(x)$
b) $f'(x) = g'(x) + x \cdot g''(x)$; $f''(x) = g''(x) + g''(x) + x \cdot g'''(x)$
$= 2 \cdot g''(x) + x \cdot g'''(x)$
c) $f'(x) = (g(x))^2 + 2x \cdot g(x) \cdot g'(x)$;
$f''(x) = 2 \cdot g(x) \cdot g'(x) + 2 \cdot g(x) \cdot g'(x) + 2x \cdot (g'(x))^2$
$+ 2x \cdot g(x) \cdot g''(x)$
$= 4 \cdot g(x) \cdot g'(x) + 2x \cdot (g'(x))^2 + 2x \cdot g(x) \cdot g''(x)$
d) $f'(x) = (g'(x))^2 + g(x) \cdot g''(x)$;
$f''(x) = 2 \cdot g'(x) \cdot g''(x) + g'(x) \cdot g''(x) + g(x) \cdot g'''(x)$
$= 3 \cdot g'(x) \cdot g''(x) + g(x) \cdot g'''(x)$

16 a) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x)$;
$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \sin(x) + \frac{1}{x} \cdot \cos(x) = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$
$g(x) = (x + 1)(x - 1)^{-1}$;
$g'(x) = (x - 1)^{-1} - (x + 1)(x - 1)^{-2} = \frac{x - 1 - (x + 1)}{(x - 1)^2} = -\frac{2}{(x - 1)^2}$
b) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot v^{-1}(x)$
$f'(x) = u'(x) \cdot v^{-1}(x) + u(x) \cdot (-1) \cdot v^{-2}(x) \cdot v'(x)$
$= \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
c) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$; $u(x) = \sin(x)$; $u'(x) = \cos(x)$; $v(x) = x$;
$v'(x) = 1$
$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$
$g(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$; $u(x) = x + 1$; $u'(x) = 1$; $v(x) = x - 1$; $v'(x) = 1$
$g'(x) = \frac{1 \cdot (x - 1) - (x + 1) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{x - 1 - x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}$
Die Ergebnisse stimmen mit denen aus Teilaufgabe a) überein.
d) $f(x) = \frac{1 - x^2}{3x + 1}$; $u(x) = 1 - x^2$; $u'(x) = -2x$; $v(x) = 3x + 1$;
$v'(x) = 3$;
$f'(x) = \frac{-2x \cdot (3x + 1) - (1 - x^2) \cdot 3}{(3x + 1)^2} = \frac{-3x^2 - 2x - 3}{(3x + 1)^2}$
$g(x) = \frac{\cos(x)}{x}$; $u(x) = \cos(x)$; $u'(x) = -\sin(x)$; $v(x) = x$;
$v'(x) = 1$;
$g'(x) = \frac{-\sin(x) \cdot x - \cos(x) \cdot 1}{x^2} = -\frac{x \cdot \sin(x) + \cos(x)}{x^2}$
$h(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; $u(x) = \sin(x)$; $u'(x) = \cos(x)$; $v(x) = \cos(x)$;
$v'(x) = -\sin(x)$;
$h'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{(\cos(x))^2}$
$= \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$
Alternativ kann man $h'(x)$ auch umformen zu
$h'(x) = 1 + \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$.

17 a) $g'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$
$h'(x) = -\sin(x)$
$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
$= (\sin(x) + x \cdot \cos(x)) \cdot \cos(x) + (x \cdot \sin(x)) \cdot (-\sin(x))$
$= \sin(x) \cdot \cos(x) + x \cdot (\cos(x))^2 - x \cdot (\sin(x))^2$
b) $f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x) = (u(x) \cdot v(x)) \cdot w(x)$.
Mit $g(x) = u(x) \cdot v(x)$ folgt
$g'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ und damit
$f'(x) = g'(x) \cdot w(x) + g(x) \cdot w'(x)$
$= (u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)$
$= u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x)$
$+ u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)$.

5 Monotonie und Krümmung

Seite 23

Einstiegsaufgabe
a) Die Temperatur steigt im Zeitraum von 6 Uhr bis 14 Uhr. Sie sinkt in den Zeiträumen von 0 Uhr bis 6 Uhr und von 14 Uhr bis 24 Uhr.
b) Die stärkste Temperaturabnahme ist um 4 Uhr morgens.
c) Die Temperatur ist um 14 Uhr am größten.

Seite 24

1 a) Ja, die Zuordnung ist streng monoton fallend. Die Temperatur wird sich zwar immer mehr der Zimmertemperatur annähern, aber diese nicht erreichen.
b) Nein, die Zuordnung ist nicht streng monoton, da der Wasserstand schwanken kann.
c) Nein, die Zuordnung ist nicht streng monoton, da die Temperatur schwanken kann.
d) Ja, die Zuordnung ist streng monoton wachsend. Eine größere Kantenlänge hat immer ein größeres Volumen zur Folge.

2 a) f ist monoton wachsend in $[0; 1{,}3]$.
g ist monoton wachsend in $[-1; 1{,}6]$.
b) f ist monoton fallend in $[-1; 0]$ und in $[1{,}3; 2{,}5]$.
g ist monoton fallend in $[1{,}5; 2{,}5]$.
c) Der Graph von f ist linksgekrümmt in $[-1; 0{,}5]$.
Der Graph von g ist linksgekrümmt in $[0; 1]$.

Seite 25

3 a) Ableitungen: $f'(x) = 2x - 1$; $f''(x) = 2$.
Monotonie:
Ansatz: $f'(x) = 0$, d.h. $2x - 1 = 0$. Lösung: $x_1 = 0{,}5$.
Teststellen: $f'(0) = -1$ und $f'(1) = 1$.
In $]-\infty; 0{,}5[$ ist f streng monoton fallend und in $]0{,}5; \infty[$ streng monoton wachsend.
Krümmungsverhalten:
Da $f''(x) > 0$ für alle $x \in D_f$ gilt, ist der Graph von f überall linksgekrümmt.
b) Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 + 1$; $f''(x) = 6x$.
Monotonie:
Ansatz: $f'(x) = 0$, d.h. $3x^2 + 1 = 0$. Diese Gleichung hat keine Lösung.

Teststelle: $f'(0) = 1$. Also ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in D_f$.
f ist streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$.
Krümmungsverhalten:
Ansatz: $f''(x) = 0$, also $6x = 0$. Lösung: $x_1 = 0$.
Teststellen: $f''(-1) = -6$ und $f''(1) = 6$.
Der Graph von f ist in $]-\infty; 0[$ rechtsgekrümmt und in $]0; \infty[$ linksgekrümmt.
c) Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$; $f''(x) = \frac{2}{3}x$.
Monotonie:
Ansatz: $f'(x) = 0$, d.h. $\frac{1}{3}x^2 - 1 = 0$. Lösungen: $x_1 = \sqrt{3}$ und $x_2 = -\sqrt{3}$.
Teststellen: $f'(-2) = \frac{1}{3}$, $f'(0) = -1$ und $f'(2) = \frac{1}{3}$.
f ist streng monoton wachsend in $]-\infty; -\sqrt{3}[$ sowie in $]\sqrt{3}; \infty[$ und streng monoton fallend in $]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$.
Krümmungsverhalten:
Ansatz: $f''(x) = 0$, also $\frac{2}{3}x = 0$. Lösung: $x_3 = 0$.
Teststellen: $f''(-1) = -\frac{2}{3}$ und $f''(1) = \frac{2}{3}$.
Der Graph von f ist in $]-\infty; 0[$ rechtsgekrümmt und in $]0; \infty[$ linksgekrümmt.

5 a) Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x - 9) + \sqrt{x}$.
Ansatz: $f'(x) = 0$, d.h. $\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x - 9) + \sqrt{x} = 0$ bzw.
$x - 9 = -2x$. Lösung: $x_1 = 3$.
Teststellen: $f'(1) = -3$ und $f'(4) = 0{,}75$.
In $]0; 3[$ ist f streng monoton fallend, in $]3; \infty[$ streng monoton wachsend.
b) Ableitung:
$f'(x) = 2(x + 1)(x - 2) + (x + 1)^2 = (x + 1)(3x - 3)$.
Ansatz: $f'(x) = 0$, d.h. $(x + 1)(3x - 3) = 0$.
Lösungen: $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.
Teststellen: $f'(-2) = 9$, $f'(0) = -3$ und $f'(2) = 9$.
In $]-\infty; -1[$ und $]1; \infty[$ ist f streng monoton wachsend, in $]-1; 1[$ streng monoton fallend.
c) Ableitung: $f'(x) = 8x \cdot (1 - x)^2 + 4x^2 \cdot (-1) \cdot 2(1 - x)$
$= 8x \cdot (1 - x) \cdot (1 - 2x)$.
Ansatz: $f'(x) = 0$, d.h. $8x \cdot (1 - x) \cdot (1 - 2x) = 0$.
Lösungen: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 0{,}5$.
Teststellen: $f'(-1) = -48$, $f'(0{,}25) = 0{,}75$, $f'(0{,}75) = -0{,}75$ und $f'(2) = 48$.
In $]-\infty; 0[$ und $]0{,}5; 1[$ ist f streng monoton fallend, in $]0; 0{,}5[$ und in $]1; \infty[$ streng monoton wachsend.

6 a) Die Aussage ist falsch, denn für $x < 0$ ist $f'(x) < 0$ und f somit streng monoton fallend.
b) Die Aussage ist wahr, denn es gilt $f''(x) = 1$ für alle $x \in D_f$.
c) Die Aussage ist wahr, denn im Intervall $[0; 1]$ ist f streng monoton wachsend, weil $f'(x) > 0$ für alle $x \in [0; 1]$ ist.
d) Die Aussage ist falsch. Über die Funktionswerte von f kann man allein aus der Kenntnis von f′ keine Aussage treffen.

7 a) $f_a'(x) = 8a \cdot (2x - 3)^3$, $f_a''(x) = 48a \cdot (2x - 3)^2$
Da $48 \cdot (2x - 3)^2 \geq 0$ ist, gilt $f_a''(x) < 0$ $\left(\text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \neq \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow a < 0$. Da $f_a''(x)$ nur an der Stelle $x = \frac{3}{2}$ den Wert 0 annimmt, gilt: Der Graph von f_a ist für jedes $a \in \mathbb{R}^-$ eine Rechtskurve.
b) $f_a'(x) = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 x}} = \frac{a^2}{2}(a^2 x)^{-\frac{1}{2}}$, $f_a''(x) = -\frac{a^4}{4}(a^2 x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{a^4}{4\sqrt{(a^2 x)^3}}$
Für $a \neq 0$ ist $f_a''(x) < 0$ für jedes $x > 0$. Also gilt: Der Graph von f_a ist für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Rechtskurve. (Für $a = 0$ ist $f_a(x) = 0$ für jedes $x \geq 0$ und der Graph von f_a ist die x-Achse.)
c) $f_a'(x) = -2ax^{-3}$; $f_a''(x) = 6ax^{-4} = \frac{6a}{x^4}$
Da $\frac{6}{x^4} > 0$ für jedes $x \neq 0$ ist, gilt $f_a''(x) < 0 \Leftrightarrow a < 0$.
Der Graph von f_a ist für jedes $a \in \mathbb{R}^-$ eine Rechtskurve.

8 a) Gegenbeispiel: f mit $f(x) = x^2$ und $f'(x) = 2x$.
f′ ist für alle x streng monoton wachsend, f ist für $x < 0$ aber streng monoton fallend.
b) Gegenbeispiel: f mit $f(x) = -x^4$. Der Graph von f ist überall eine Rechtskurve. Für die zweite Ableitung $f''(x) = -12x^2$ gilt aber $f''(0) = 0$.
c) Gegenbeispiel: f mit $f(x) = x^3$. Es ist $f'(x) = 3x^2$ und $f''(x) = 6x$. Also gilt $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$.

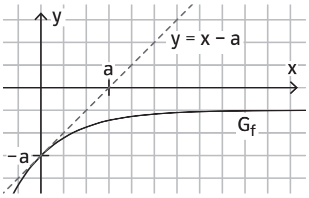
9 a) $f(x) > 0$: Der Graph von f verläuft für $x > 0$ oberhalb der x-Achse.
$f'(x) > 0$: Die Funktion f ist für $x > 0$ streng monoton wachsend.
$f''(x) > 0$: Der Graph von f ist für $x > 0$ linksgekrümmt.
b) A: $g(x) = x + f(x)$; $g'(x) = 1 + f'(x)$; $g''(x) = f''(x)$;
g besitzt also die drei Eigenschaften.
B: $g(x) = x \cdot f(x)$; $g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$;
$g''(x) = 2f'(x) + x \cdot f''(x)$;
g besitzt also die drei Eigenschaften.
C: $g(x) = (f(x))^2$; $g'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$;
$g''(x) = 2 \cdot ((f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x))$;
g besitzt also die drei Eigenschaften.
D: $g(x) = \sqrt{f(x)} = (f(x))^{\frac{1}{2}}$; $g'(x) = \frac{1}{2}(f(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$;

$$g''(x) = -\frac{1}{4}(f(x))^{-\frac{3}{2}} \cdot (f'(x))^2 + \frac{1}{2}(f(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot f''(x)$$
$$= -\frac{(f'(x))^2}{4\sqrt{(f(x))^3}} + \frac{f''(x)}{2\sqrt{f(x)}};$$

g besitzt die ersten beiden Eigenschaften. Ob sie die dritte Eigenschaft besitzt, hängt von der Funktion f ab.

11 a) Umkehraussage: „Wenn f streng monoton fallend in I ist, dann gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$."
Gegenbeispiel: f mit $f(x) = -x^3$. Die Funktion ist streng monoton fallend auf $\mathbb{R}$, denn für zwei beliebige reelle Zahlen x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) > f(x_2)$. Allerdings gilt $f'(x) = -3x^2$ und somit $f'(0) = 0$. Dies bedeutet, dass $f'(x) < 0$ nicht für $x \in \mathbb{R}$ gilt und die Umkehrung des Satzes falsch ist.
b) Es ist $f'(x) = 10 \cdot (2x - 4)^4$. Für $x \neq \frac{1}{2}$ gilt $f'(x) > 0$.
Also ist f auf $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ streng monoton wachsend.
Untersuchung der Stelle $x_1 = \frac{1}{2}$: Es ist $f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
Für $x_2 > \frac{1}{2}$ gilt $f(x_2) = \underbrace{(2x - 4)}_{>0}{}^5 > 0 = f(x_1)$.
Für $x_3 < \frac{1}{2}$ gilt $f(x_3) = \underbrace{(2x - 4)}_{<0}{}^5 < 0 = f(x_1)$.
Die Funktion f ist also auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

12 Die folgende Grafik veranschaulicht die Situation beispielhaft.



Da der Graph G_f von f rechtsgekrümmt ist, ist die Ableitungsfunktion f′ streng monoton fallend. Für $x > 0$ gilt also $f'(x) < f'(0) = 1$, d.h., der Graph G_f verläuft unterhalb der Tangente an G_f im Punkt $P(0\,|\,-a)$ mit der Steigung 1. Diese Tangente schneidet die x-Achse im Punkt $Q(a\,|\,0)$. Der Graph G_f schneidet die x-Achse im Intervall $[0; a[$ also nicht. Somit hat f dort keine Nullstelle.

6 Extrem- und Wendepunkte

Seite 26

Einstiegsaufgabe

Ende April wechselt der Graph sein Krümmungsverhalten. Er geht von einer Links- in eine Rechtskurve über. Ende Juni ändert die Funktion ihr Monotonieverhalten.
In einem gewissen Zeitraum vor Ende Juni war sie streng monoton wachsend, danach ist sie monoton fallend.
Ende September ändert der Graph wieder sein Krümmungsverhalten. Diesmal geht er von einer Rechts- in eine Linkskurve über.

Seite 27

1 **a)** Ableitungen: $f'(x) = 6x^2 - 3x - 9$; $f''(x) = 12x - 3$.
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 6x^2 - 3x - 9 = 0$.
Lösungen: $x_1 = 1{,}5$ und $x_2 = -1$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_1 = 1{,}5$:
$f''(1{,}5) = 15 > 0$, also Minimumstelle.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_2 = -1$:
$f''(-1) = -15 < 0$, also Maximumstelle.
b) Ableitungen: $g'(x) = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}$; $g''(x) = 2 + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.
Mögliche Extremstellen: $g'(x) = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$.
Lösung: $x_1 = 1$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_1 = 1$:
$f''(1) = 3 > 0$, also Minimumstelle.
c) Ableitungen: $h'(x) = x^3 - 4x$; $h''(x) = 3x^2 - 4$.
Mögliche Extremstellen: $h'(x) = x^3 - 4x = 0$.
Lösungen: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_1 = 0$:
$h''(0) = -4 < 0$, also Maximumstelle.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_2 = 2$:
$h''(2) = 8 > 0$, also Minimumstelle.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_3 = -2$:
$h''(-2) = 8 > 0$, also Minimumstelle.
d) Ableitungen: $k'(x) = 4x^3 + \frac{4}{x^2}$; $k''(x) = 12x^2 - \frac{8}{x^3}$.
Mögliche Extremstellen: $k'(x) = 4x^3 + \frac{4}{x^2} = 0$.
Lösung: $x_1 = -1$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_1 = -1$:
$k''(-1) = 20 > 0$, also Minimumstelle.
e) Ableitungen: $l'(x) = -4x^3 + 16x$; $l''(x) = -12x^2 + 16$.
Mögliche Extremstellen: $l'(x) = -4x^3 + 16x = 0$.
Lösungen: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_1 = 0$:
$l''(0) = 16 > 0$, also Minimumstelle.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_2 = 2$:
$l''(2) = -32 < 0$, also Maximumstelle.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_3 = -2$:
$l''(-2) = -32 < 0$, also Maximumstelle.
f) Ableitungen: $m'(x) = 2 + \frac{2}{x^3}$; $m''(x) = -\frac{6}{x^4}$.
Mögliche Extremstellen: $m'(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = 0$.
Lösung: $x_1 = -1$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_1 = -1$:
$f''(-1) = -6 < 0$, also Maximumstelle.

2 **a)** Ableitungen: $f'(x) = 6x^2 - 4x$; $f''(x) = 12x - 4$;
$f'''(x) = 12$.
Mögliche Wendestellen: $f''(x) = 12x - 4 = 0$.
Lösung: $x_1 = \frac{1}{3}$.
Untersuchung der möglichen Wendestelle $x_1 = \frac{1}{3}$:
$f'''\left(\frac{1}{3}\right) = 12 \neq 0$, also Wendestelle von f.
Wegen $f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \neq 0$ ist x_1 keine Sattelstelle.
b) Ableitungen: $f'(x) = 12x^3 + 24x^2$; $f''(x) = 36x^2 + 48x$;
$f'''(x) = 72x + 48$.
Mögliche Wendestellen: $f''(x) = 36x^2 + 48x = 0$.
Lösungen: $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{4}{3}$.
Untersuchung der möglichen Wendestelle $x_1 = 0$:
$f'''(0) = 48 \neq 0$, also Wendestelle.
Wegen $f'(0) = 0$ ist x_1 eine Sattelstelle.
Untersuchung der möglichen Wendestelle $x_2 = -\frac{4}{3}$:
$f'''\left(-\frac{4}{3}\right) = -48 \neq 0$, also Wendestelle.
Wegen $f'\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{128}{9} \neq 0$ ist x_2 keine Sattelstelle.
c) Ableitungen: $f'(x) = -x^3 + 10x^2 - 32x + 32$;
$f''(x) = -3x^2 + 20x - 32$; $f'''(x) = -6x + 20$.
Mögliche Wendestellen: $f''(x) = -3x^2 + 20x - 32 = 0$.
Lösungen: $x_1 = 4$ und $x_2 = \frac{8}{3}$.
Untersuchung der möglichen Wendestelle $x_1 = 4$:
$f'''(4) = -4 \neq 0$, also Wendestelle.
Wegen $f'(4) = 0$ ist x_1 eine Sattelstelle.
Untersuchung der möglichen Wendestelle $x_2 = \frac{8}{3}$:
$f'''\left(\frac{8}{3}\right) = 4 \neq 0$, also Wendestelle.
Wegen $f'\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{32}{27} \neq 0$ ist x_2 keine Sattelstelle.

3 Hinweis: Die Aufgabe kann auch grafisch durch Skizzieren des Graphen gelöst werden.
a) Ableitungen: $f'(x) = 2\pi\cos(2\pi x)$;
$f''(x) = -4\pi^2\sin(2\pi x)$.
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 2\pi\cos(2\pi x) = 0$.
Lösungen im Intervall $[0; 1]$: $x_1 = \frac{1}{4}$ und $x_2 = \frac{3}{4}$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_1 = \frac{1}{4}$:
$f''\left(\frac{1}{4}\right) = -4\pi^2 < 0$, also Maximumstelle.
Es ist $f\left(\frac{1}{4}\right) = 1$, also $H\left(\frac{1}{4}\middle|1\right)$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_2 = \frac{3}{4}$:
$f''\left(\frac{3}{4}\right) = 4\pi^2 > 0$, also Minimumstelle.
Es ist $f\left(\frac{1}{4}\right) = -1$, also $T\left(\frac{3}{4}\middle|-1\right)$.

b) Ableitungen: $f'(x) = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;
$f''(x) = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.
Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$: $x_1 = \frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \frac{3\pi}{2}$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_1 = \frac{\pi}{2}$:
$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0$, also Minimumstelle.
Es ist $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$, also $T\left(\frac{\pi}{2}\middle|-2\right)$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_2 = \frac{3\pi}{2}$:
$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2 < 0$, also Maximumstelle.
Es ist $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$, also $H\left(\frac{3\pi}{2}\middle|2\right)$.

c) $f(x) = -\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$; Ableitungen:
$f'(x) = -\pi\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$; $f''(x) = \pi^2\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$.
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = -\pi\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.
Lösungen im Intervall $[0; 2]$: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_1 = 0$:
$f''(0) = -\pi^2 < 0$, also Maximumstelle.
Es ist $f(0) = 3$, also $H_1(0|3)$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_2 = 1$:
$f''(1) = \pi^2 > 0$, also Minimumstelle.
Es ist $f(1) = 1$, also $T(1|1)$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_3 = 2$:
$f''(2) = -\pi^2 < 0$, also Maximumstelle.
Es ist $f(2) = 3$, also $H_2(2|3)$.

4 An der Stelle $x_1 = -2{,}5$ gilt $f'(x_1) = 0$ und f' hat einen Vorzeichenwechsel von + nach −. Also hat f dort eine Maximumstelle.
An der Stelle $x_2 = 2{,}5$ gilt $f'(x_2) = 0$ und f' hat einen Vorzeichenwechsel von − nach +. Also hat f dort eine Minimumstelle.
Da an keiner anderen Stelle $f'(x) = 0$ gilt, gibt es keine weiteren Extremstellen von f.
Wendestellen:
An den Stellen $x_3 = -1{,}5$, $x_4 = 0$ und $x_5 = 1{,}5$ hat f' Extremstellen. Dies sind die Wendestellen von f.
Zusatz (in der Aufgabenstellung nicht gefragt): Keine der Wendestellen ist eine Sattelstelle.

Seite 28

5 a) Ableitungen:
$f'(x) = 2\cdot 3(2x-5)^2 - 150 = 6(2x-5)^2 - 150$;
$f''(x) = 12\cdot 2(2x-5) = 24(2x-5) = 48x - 120$; $f'''(x) = 48$.
Extrempunkte: $H(0|-125)$ und $T(5|-625)$.
Wendepunkt: $W(2{,}5|-375)$.
b) Ableitungen:
$g'(x) = -9(1-3x)^2 - 54x + 18 = -81x^2 + 9$;
$g''(x) = -162x$.
Extrempunkte: $T\left(-\frac{1}{3}\middle|-1\right)$ und $H\left(\frac{1}{3}\middle|3\right)$.
Wendepunkt: $W(0|1)$.
c) Ableitungen: $h'(x) = (x-4)^2 - 16 = x^2 - 8x$;
$h''(x) = 2x - 8$.
Extrempunkte: $H\left(0\middle|-\frac{64}{3}\right)$ und $T\left(8\middle|-\frac{320}{3}\right)$.
Wendepunkt: $W(4|-64)$.

8 a) Ableitungen: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$; $f''(x) = 12x^2 - 24x$;
$f'''(x) = 24x - 24$.
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0$.
Lösung: $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_1 = 0$:
$f''(0) = 0$, also keine Entscheidung möglich. Es muss das VZW-Kriterium angewendet werden. f' wechselt an der Stelle $x_1 = 0$ nicht das Vorzeichen (es ist z. B. $f'(-1) = -16$ und $f'(1) = -8$), sodass bei $x_1 = 0$ keine Extremstelle vorliegt.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_2 = 3$:
$f''(3) = 36 > 0$, also Minimumstelle. Es ist $f(3) = -27$, also $T(3|-27)$.
Mögliche Wendestellen: $f''(x) = 12x^2 - 24x = 0$.
Lösungen: $x_1 = 0$ und $x_3 = 2$.
Untersuchung der möglichen Wendestelle $x_1 = 0$:
$f'''(0) = -24 \neq 0$, also Wendestelle. Es ist $f(0) = 0$, also $W_1(0|0)$ (zudem Sattelpunkt, da $f'(0) = 0$).
Untersuchung der möglichen Wendestelle $x_3 = 2$:
$f'''(2) = 24 \neq 0$, also Wendestelle. Es ist $f(2) = -16$, also $W_2(2|-16)$.
Vorgehen bei b) und c) analog wie bei a).
b) Ableitungen: $g'(x) = x^3 - 4{,}5x^2 + 6x$;
$g''(x) = 3x^2 - 9x + 6$; $g'''(x) = 6x - 9$.
Extrempunkt: $T(0|0)$.
Wendepunkte: $W_1(1|1{,}75)$ und $W_2(2|4)$.
c) Ableitungen: $h'(x) = 6x^5 - 6x^3$; $h''(x) = 30x^4 - 18x^2$;
$h'''(x) = 120x^3 - 36x$.
Extrempunkte: $T_1(-1|-0{,}5)$, $H(0|0)$ und $T_2(1|-0{,}5)$.
Wendepunkte: $W_1\left(\sqrt{0{,}6}\middle|f\left(\sqrt{0{,}6}\right)\right)$ und $W_2\left(-\sqrt{0{,}6}\middle|f\left(-\sqrt{0{,}6}\right)\right)$ bzw. gerundet $W_1(0{,}77|-0{,}32)$ und $W_2(-0{,}77|-0{,}32)$.

9 Ableitungen:
$f'(t) = 0{,}08(t-1)^3(t-6) + 0{,}02(t-1)^4 = 0{,}1(t-1)^3(t-5)$;
$f''(t) = 0{,}3(t-1)^2(t-5) + 0{,}1(t-1)^3 = 0{,}1(t-1)^2(4t-16)$;
$f'''(t) = 0{,}2(t-1)(4t-16) + 0{,}4(t-1)^2 = 0{,}2(t-1)(6t-16)$.
a) Mögliche Extremstellen: $f'(t) = 0{,}1(t-1)^3(t-5) = 0$.
Lösungen im Intervall $[0; 5{,}5]$: $t_1 = 1$ und $t_2 = 5$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $t_1 = 1$:
$f''(1) = 0$, also keine Entscheidung möglich. Es muss das VZW-Kriterium angewendet werden. f' wechselt an der Stelle $t_1 = 1$ das Vorzeichen von + nach − (es ist z. B. $f'(0) = 0{,}5$ und $f'(2) = -0{,}3$), also Maximumstelle. Mit $f(1) = 6$ folgt, dass der maximale Wasserstand im Beobachtungszeitraum 6 Meter beträgt.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $t_2 = 5$:
$f''(5) = 6{,}4 > 0$, also Minimumstelle. Mit $f(5) = 0{,}88$ folgt, dass der minimale Wasserstand im Beobachtungszeitraum 0,88 Meter beträgt.
Ergebnis: Der maximale Unterschied des Wasserstands im Beobachtungszeitraum beträgt 5,12 Meter.
(Bemerkung: Auf eine Betrachtung der Randwerte $f(0) = 5{,}88$ und $f(5{,}5) \approx 1{,}90$ wird hier verzichtet, da diese Problematik im Schulbuch erst in der Lerneinheit 8 „Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen" thematisiert wird.)
b) Gesucht ist eine Wendestelle t_W mit $f'(t_W) < 0$.
Mögliche Wendestellen: $f''(t) = 0{,}1(t-1)^2(4t-16) = 0$.
Lösungen im Intervall $[0; 5{,}5]$: $t_1 = 1$ und $t_3 = 4$.
Untersuchung der möglichen Wendestelle $t_1 = 1$:
t_1 ist als Extremstelle keine Wendestelle.
Untersuchung der möglichen Wendestelle $t_3 = 4$:
$f'''(4) = 3{,}6 \neq 0$, also Wendestelle mit $f'(4) = -2{,}7 < 0$.
Ergebnis: Zum Zeitpunkt $t_3 = 4$ nimmt der Wasserstand

am stärksten ab. Die Abnahme beträgt dann 2,7 Meter pro Stunde.

10 a) $f_a(x) = x^3 - ax^2$; $f_a'(x) = 3x^2 - 2ax$;
$f_a''(x) = 6x - 2a$; $f_a'''(x) = 6$.
$f_a''(x) = 0$ liefert $6x - 2a = 0$ und $x_1 = \frac{1}{3}a$.
Es ist $f_a'''\left(\frac{1}{3}a\right) = 6 \neq 0$.
Wendepunkt $W\left(\frac{1}{3}a \,\middle|\, -\frac{2}{27}a^3\right)$.
Steigung der Wendetangente: $m = -\frac{1}{3}a^2$.
b) $f_a(x) = a^3x^{-1} - x^2$; $f_a'(x) = -a^3x^{-2} - 2x$;
$f_a''(x) = 2a^3x^{-3} - 2$; $f_a'''(x) = -6a^3x^{-4}$.
$f_a''(x) = 0$ liefert $2a^3x^{-3} - 2 = 0$ und $x_1 = a$.
Es ist $f_a'''(a) = -\frac{6}{a} \neq 0$.
Wendepunkt $W(a\,|\,0)$.
Steigung der Wendetangente: $m = -3a$.
c) $f_a(x) = x^4 - 2ax^2 + 1$; $f_a'(x) = 4x^3 - 4ax$;
$f_a''(x) = 12x^2 - 4a$; $f_a'''(x) = 24x$.
$f_a''(x) = 0$ liefert $12x^2 - 4a = 0$ und $x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}a}$ und
$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}a}$.
Es ist $f_a'''\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}a}\right) \neq 0$ für $a \neq 0$.
Wendepunkte $W_1\left(\sqrt{\frac{1}{3}a} \,\middle|\, -\frac{5}{9}a^2 + 1\right)$ und
$W_2\left(-\sqrt{\frac{1}{3}a} \,\middle|\, -\frac{5}{9}a^2 + 1\right)$.
Steigung der Wendetangente: $m_1 = -\frac{8}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}a}$ und
$m_2 = \frac{8}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}a}$.

11 a) Ist x_1 eine beliebige Stelle der Definitionsmenge von f, so gilt $f(x_1) = c = f(x)$ für alle x in einer Umgebung von x_1. Es gilt daher auch $f(x_1) \geq f(x)$ für alle x in einer Umgebung von x_1. Also ist x_1 eine Maximumstelle von f und der Punkt $P(x_1\,|\,c)$ ist ein Hochpunkt von G_f.
Ebenso gilt $f(x_1) \leq f(x)$ für alle x in einer Umgebung von x_1. Also ist x_1 auch eine Minimumstelle von f und der Punkt $P(x_1\,|\,c)$ ist ein Tiefpunkt von G_f.
Da x_1 eine beliebige Stelle ist, gilt diese Aussage für jeden Punkt auf G_f.
b) Ableitungen: $f'(x) = 0$; $f''(x) = 0$.
Die Bedingung $f'(x) = 0$ ist für jedes x erfüllt. Will man eine Stelle x_1 mit dem VZW-Kriterium untersuchen, so gilt für jede Stelle x_2 mit $x_2 < x_1$: $f'(x_2) = 0$ und für jede Stelle x_3 mit $x_3 > x_1$ gilt $f'(x_3) = 0$. Es liegt kein VZW von f' vor.
Wegen $f''(x_1) = 0$ liefert auch das f''-Kriterium keine Aussage über das Vorliegen einer Extremstelle.

12 Es gilt $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$.
Wenn $g(x_0) = 0$, $g'(x_0) = 0$ und $g''(x_0) > 0$ ist, dann ist die Aussage wahr.
Ableitungen: $g'(x) = -2x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x)$;
$g''(x) = -2f(x) - 2x \cdot f'(x) - 2x \cdot f'(x) - x^2 \cdot f''(x)$
$= -2f(x) - 4x \cdot f'(x) - x^2 \cdot f''(x)$.
Überprüfung:
$g(x_0) = -x_0^2 \cdot f(x_0) = -x_0^2 \cdot 0 = 0$ ✓
$g'(x_0) = -2x_0 \cdot f(x_0) - x_0^2 \cdot f'(x_0) = -2x_0 \cdot 0 - x_0^2 \cdot 0 = 0$ ✓
$g''(x_0) = -2 \cdot f(x_0) - 4x_0 \cdot f'(x_0) - x_0^2 \cdot f''(x_0)$
$= -2 \cdot 0 - 4x_0 \cdot 0 - x_0^2 \cdot f''(x_0) = -\underbrace{x_0^2}_{>0} \cdot \underbrace{f''(x_0)}_{<0} > 0$ ✓

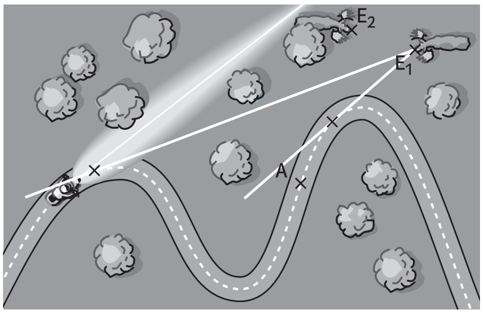
14 Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f'(2) = 0$ und $f''(2) = -1$.
Wenn $g'(2) = 0$ und $g''(2) > 0$ gilt, dann ist die Aussage gezeigt.
Ableitungen: $g(x) = (f(x))^{-\frac{1}{2}}$; $g'(x) = -\frac{1}{2}(f(x))^{-\frac{3}{2}} \cdot f'(x)$;
$g''(x) = \frac{3}{4}(f(x))^{-\frac{5}{2}} \cdot (f'(x))^2 - \frac{1}{2}(f(x))^{-\frac{3}{2}} \cdot f''(x)$.
Überprüfung:
$g'(2) = -\frac{1}{2}(f(2))^{-\frac{3}{2}} \cdot f'(2) = -\frac{1}{2}(f(2))^{-\frac{3}{2}} \cdot 0 = 0$ ✓
$g''(2) = \frac{3}{4}(f(2))^{-\frac{5}{2}} \cdot (f'(2))^2 - \frac{1}{2}(f(2))^{-\frac{3}{2}} \cdot f''(2)$
$= \frac{3}{4}(f(2))^{-\frac{5}{2}} \cdot 0^2 - \frac{1}{2}(f(2))^{-\frac{3}{2}} \cdot (-1) = \frac{1}{2}(f(2))^{-\frac{3}{2}} > 0$. ✓

15 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$;
$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6x + 2b$;
$f'''(x) = 6$
$f''(x) = 6x + 2b = 0$ ergibt $x_1 = -\frac{b}{3}$;
in die Gleichung $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c = 0$
eingesetzt: $\frac{b^2}{3} - 2\frac{b^2}{3} + c = 0$ oder $c = \frac{b^2}{3}$.
Extremstellen: $f'(x) = 0$ ergibt mit $c = \frac{b^2}{3}$ die Gleichung $3x^2 + 2bx + \frac{b^2}{3} = 0$ mit der einzigen Lösung $x_2 = -\frac{b}{3}$.
Dies ist aber keine Extremstelle, sondern eine Wendestelle mit waagerechter Tangente.

7 Tangente und Normale

Seite 29

Einstiegsaufgabe
Die Situation kann modellhaft in einem geeigneten Koordinatensystem dargestellt werden, die Straße durch den Graphen G_f einer Funktion f.
a) Im Modell kann der Weg des Lichts durch eine Tangente an G_f im Punkt, an dem sich das Motorrad gerade befindet, dargestellt werden. Ist das Motorrad im Punkt A, so verläuft diese Tangente durch E_2. Der Elch, der sich im Modell im Punkt E_2 befindet, wird vom Scheinwerfer erfasst.
b) Es werden Punkte auf G_f gesucht, sodass die Tangenten an G_f in diesen Punkten durch E_1 verlaufen. Diese Punkte sind in der Skizze näherungsweise dargestellt.



Anmerkung: Es gibt noch weitere Punkte auf G_f, für die die Tangente an G_f durch E_1 verläuft. Diese sind im Sachkontext allerdings irrelevant, weil der Elch sich dann hinter dem Motorrad befindet und nicht vom Lichtstrahl erfasst wird.

Seite 30

1 **a)** $P(-1|2)$; Tangentengleichung: $y = -4x - 2$;
Normalengleichung: $y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$; Steigungswinkel: $\alpha \approx -76{,}0°$.
b) $P(-1|0)$; Tangentengleichung: $y = -\pi x - \pi$; Normalengleichung: $y = \frac{1}{\pi}x + \frac{1}{\pi}$; Steigungswinkel: $\alpha \approx -72{,}3°$.
c) $P(-1|\sqrt{2})$; Tangentengleichung: $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$;
Normalengleichung: $y = -\sqrt{2}\,x$; Steigungswinkel: $\alpha \approx 35{,}3°$.
d) $P(-1|1)$; Tangentengleichung: $y = 2x + 3$; Normalengleichung: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; Steigungswinkel: $\alpha \approx 63{,}4°$.

Seite 31

2 **a)** Tangentengleichungen: t_1: $y = -2x - 2$ und t_2: $y = 2x - 2$.
Berührpunkte: $B_1(-2|2)$ und $B_2(2|2)$.
b) Tangentengleichungen: t_1: $y = -3x - 4{,}5$ und t_2: $y = 3x - 4{,}5$.
Berührpunkte: $B_1(-3|4{,}5)$ und $B_2(3|4{,}5)$.
c) Tangentengleichungen: t_1: $y = 5x - 12{,}5$ und t_2: $y = x - 0{,}5$.
Berührpunkte: $B_1(5|12{,}5)$ und $B_2(1|0{,}5)$.
d) Tangentengleichungen: t_1: $y = 0$ und t_2: $y = -2x - 2$.
Berührpunkte: $B_1(0|0)$ und $B_2(-2|2)$.

3 Allgemeine Tangentengleichung: $y = 4ux - 2u^2 - 3$.
a) $-21 = -2u^2 - 3 \Leftrightarrow 2u^2 = 18$. Lösungen: $u_1 = 3$ und $u_2 = -3$.
Berührpunkte: $B_1(3|15)$ und $B_2(-3|15)$.
Tangentengleichungen: t_1: $y = 12x - 21$ und t_2: $y = -12x - 21$.
b) $0 = -2u^2 - 3 \Leftrightarrow 2u^2 = -3$. Keine Lösungen.
Es gibt keine Tangenten an den Graphen, die durch Q verlaufen.
c) $15 = -12u - 2u^2 - 3 \Leftrightarrow 2u^2 + 12u + 18 = 0$.
Lösung: $u = -3$.
Berührpunkt: $B(-3|15)$.
Tangentengleichung: t: $y = -12x - 21$.
d) $2 = 4u - 2u^2 - 3 \Leftrightarrow 2u^2 - 4u + 5 = 0$.
Keine Lösungen.
Es gibt keine Tangenten an den Graphen, die durch Q verlaufen.

4 **a)** Normalengleichung: $y = -x - 1{,}5$.
b) Ansatz: $0{,}5x^4 - 2x^2 - x = -x - 1{,}5$.
Substitution $u = x^2$ führt auf $u^2 - 4u + 3 = 0$.
Lösungen: $u_1 = 3$ und $u_2 = 1$.
Rücksubstitution: $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = 1$ und $x_4 = -1$.
Ergebnis: Die weiteren Schnittpunkte der Normalen und des Graphen von f haben die x-Koordinaten $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ und 1.

5 Allgemeine Tangentengleichung: $y = -ux + \frac{1}{2}u^2 + 4$.
Punktprobe mit $Q(0|6)$: $6 = \frac{1}{2}u^2 + 4$. Lösungen: $u_1 = -2$ und $u_2 = 2$.
Berührpunkte: $B_1(-2|2)$ und $B_2(2|2)$.
Da das Fahrzeug gemäß der Abbildung von links nach rechts fährt, ist der gesuchte Punkt $B_1(-2|2)$.

6 **a)** Normalengleichung: $y = -\frac{2}{\pi}x + 1$.
b) Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0|1)$.
Schnittpunkt mit der x-Achse: $\left(\frac{\pi}{2}\middle|0\right)$.
Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.
Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt $\frac{\pi}{4}$ FE.

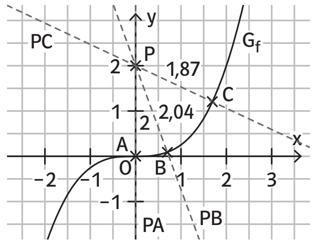
8 Allgemeine Tangentengleichung:
$y = (-4u + 3)x + 2u^2 + 10$.
Punktprobe mit $Q(3|5{,}5)$: $2u^2 - 12u + 13{,}5 = 0$.
Lösungen: $u_1 = 4{,}5$ und $u_2 = 1{,}5$.
Berührpunkte: $B_1(4{,}5|-17)$ und $B_2(1{,}5|10)$.
Ergebnis: Vom Boot aus kann man diejenigen Orte am Ufer einsehen, die im Modell durch Punkte zwischen B_1 und B_2 dargestellt werden.

9 Es muss die Tangente vom Tiefpunkt des Graphen an den Graphen gelegt werden.
Bestimmung der Koordinaten des Tiefpunktes des Graphen von f:
$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$, $f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$.
Mögliche Extremstellen:
$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x = 0$. Lösungen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_1 = 0$:
$f''(0) = \frac{3}{2} > 0$, also Minimumstelle. Mit $f(0) = -4$ erhält man den Tiefpunkt $T(0|-4)$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_2 = 4$:
$f''(4) = -\frac{3}{2} < 0$, also Maximumstelle.
Tangente vom Tiefpunkt an den Graphen von f:
Allgemeine Tangentengleichung:
$y = \left(-\frac{3}{8}u^2 + \frac{3}{2}u\right)x + \frac{1}{4}u^3 - \frac{3}{4}u^2 - 4$.
Punktprobe mit $T(0|-4)$: $-4 = \frac{1}{4}u^3 - \frac{3}{4}u^2 - 4$.
Lösungen: $u_1 = 0$ und $u_2 = 3$.
Bei $u_1 = 0$ befindet sich der Tiefpunkt. Also ist $B(3|f(3)) = B\left(3\middle|-\frac{5}{8}\right)$ der Berührpunkt der Tangente.
Tangentengleichung t: $y = \frac{9}{8}x - 4$.
Schnittpunkt der Tangente mit der Geraden $y = 2$:
$S\left(\frac{16}{3}\middle|2\right)$. Ab dem Punkt $S(5{,}33|2)$ der Bahn des Ballons kann man den tiefsten Punkt des Tals sehen.

Seite 32

10 $f(t) = \frac{300}{0{,}1t + 1}$, $f'(t) = -\frac{30}{(0{,}1t + 1)^2}$
Allgemeine Tangentengleichung:
$y = -\frac{30}{(0{,}1u + 1)^2} \cdot (x - u) + \frac{300}{0{,}1u + 1}$.
a) Tangente für $u = 15$: $y = -4{,}8x + 192$.
Die Tangente schneidet die Gerade $y = 0$ an der Stelle $t_1 = \frac{192}{4{,}8} = 40$.
Nach 40 Tagen sind alle Läuse vernichtet.
b) Punktprobe der allgemeinen Tangentengleichung mit $P(30|0)$:
$$0 = -\frac{30}{(0{,}1u + 1)^2} \cdot (30 - u) + \frac{300}{0{,}1u + 1} \qquad | \cdot (0{,}1t + 1)^2$$
$$\begin{aligned} 0 &= -30 \cdot (30 - u) + 300 \cdot (0{,}1u + 1) \\ &= -900 + 30u + 30u + 300 \\ &= -600 + 60u \end{aligned}$$
Lösung: $u_1 = 10$.
Man muss die Marienkäfer nach zehn Tagen ansetzen, damit die Blattläuse nach 30 Tagen vernichtet sind.

11 a) Für die Punkte A, B und C auf dem Graphen von f sind die Strecken $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ und $\overline{PC}$ orthogonal zum Graphen von f. Der Abstand von P zu G_f entspricht der kürzesten Länge dieser Strecken, also der Streckenlänge



$|\overline{PC}| \approx 1{,}87$, beträgt also ca. 1,87 LE.

b) $f(x) = x^{-2}$; $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

Allgemeine Normalengleichung: $y = \frac{u^3}{2}(x - u) + \frac{1}{u^2}$.

Punktprobe mit $Q(0\,|\,0)$: $0 = -\frac{u^4}{2} + \frac{1}{u^2} \Leftrightarrow u^6 = 2$.

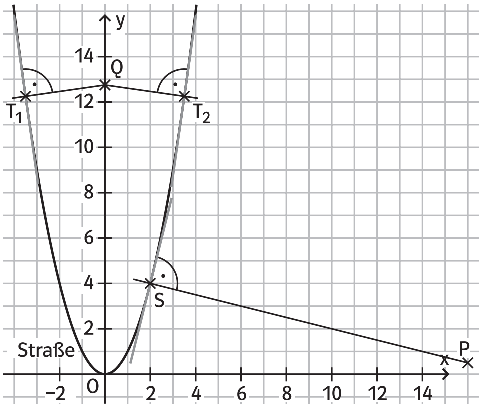
Lösungen: $u_1 = \sqrt[6]{2} \approx 1{,}12$ und $u_2 = -\sqrt[6]{2} \approx -1{,}12$.

Schnittpunkte: $B_1\left(\sqrt[6]{2}\,\middle|\,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ und $B_2\left(-\sqrt[6]{2}\,\middle|\,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

Es ist $|\overline{QB_1}| = |\overline{QB_2}| = \sqrt{\left(\sqrt[6]{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2} \approx 1{,}37$.

Der Punkt Q hat vom Graphen G_f ungefähr den Abstand 1,37 LE.

12 a) Skizze:



b) Die kürzeste Zufahrtstraße verläuft jeweils auf der Normalen vom Punkt P bzw. Q an den Graphen.
Allgemeine Normalengleichung:
$y = -\frac{1}{2u}x + \frac{1}{2} + u^2$.
Punktprobe mit $P(16\,|\,0{,}5)$:
$0{,}5 = -\frac{8}{u} + \frac{1}{2} + u^2$.
Lösung: $u_1 = 2$.
Schnittpunkt der Normalen mit dem Graphen: $S(2\,|\,4)$.
Länge der Zufahrtstraße:
$|\overline{SP}| = \sqrt{208{,}25} \approx 14{,}43$. Die kürzeste Zufahrtstraße von P aus ist ca. 14,43 km lang.
Punktprobe mit $Q(0\,|\,12{,}75)$: $12{,}75 = \frac{1}{2} + u^2$.
Lösungen: $u_{2;\,3} = \pm 3{,}5$.
Schnittpunkte der Normalen mit dem Graphen:
$T_{1,\,2}(\pm 3{,}5\,|\,12{,}25)$.
Länge der Zufahrtstraßen: $|\overline{T_1Q}| = |\overline{T_2Q}| = \sqrt{12{,}5} \approx 3{,}54$.
Es gibt zwei gleich lange kürzeste Zufahrtstraßen von Q. Sie sind jeweils ca. 3,54 km lang.

14 a) $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 11x + 15)$;
$f'(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 14x + 11)$; $f(3) = 1{,}5$; $f'(3) = -\frac{1}{2}$
Normale in $P(3\,|\,1{,}5)$: $y = 2(x - 3) + 1{,}5 = 2x - 4{,}5$.
Ein Punkt $R(r\,|\,t)$ auf der Normalen mit der x-Koordinate r hat die y-Koordinate $t = 2r - 4{,}5$.
Den Abstand $d(R;\,P)$ kann man dann mit dem Satz des Pythagoras mithilfe der angegebenen Formel berechnen.
b) Ansatz: $d(S;\,P) = 1$ mit $S(s\,|\,2s - 4{,}5)$, also nach Quadrieren $(3 - s)^2 + (6 - 2s)^2 = 1 \Leftrightarrow 5s^2 - 30s + 44 = 0$.
Lösungen: $s_1 = 3 + \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $s_2 = 3 - \frac{1}{\sqrt{5}}$. ($s_1 > 3$ ist irrelevant, da die x-Koordinate des südlichsten Punkts kleiner als 3 ist.)
Mit $2s_2 - 4{,}5 = 1{,}5 - \frac{2}{\sqrt{5}}$ folgt: Der südlichste Punkt der Brücke hat im Modell die Koordinaten
$S\left(3 - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\middle|\,1{,}5 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

15 a) Der Punkt P liegt oberhalb des Graphen von f.
b) $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$
Allgemeine Tangentengleichung:
$y = 2u(x - u) + u^2 = 2ux - u^2$.
Punktprobe mit $P(p_1\,|\,p_2)$: $p_2 = 2up_1 - u^2$
$\Leftrightarrow u^2 - 2p_1u + p_2 = 0$.
Lösungsformel: $u_{1;\,2} = \frac{2p_1 \pm \sqrt{4p_1^2 - 4p_2}}{2} = p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - p_2}$.
Wegen $p_2 > p_1^2$ ist der Radikand der Wurzel negativ und die Wurzel existiert nicht.
c) Geht man wie in Teilaufgabe b) vor, erhält man die x-Koordinaten der Berührpunkte mittels
$u_{1;\,2} = q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - q_2}$. Für $q_2 < q_1^2$ ist der Radikand der Wurzel positiv und man erhält zwei unterschiedliche x-Koordinaten u_1 und u_2.

8 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Seite 33

Einstiegsaufgabe
Den größten Flächeninhalt erhält man, wenn alle Seiten aus fünf Streichhölzern bestehen.

Seite 35

1 a) Seitenlängen des Rechtecks: x und y (in cm).
Flächeninhalt: $A = x \cdot y$ (in cm^2) mit $0 \le x \le 25$.
Nebenbedingung: $2x + 2y = 50$.
Zielfunktion: $A(x) = x(25 - x)$.
Globales Maximum für $x = y = 12{,}5$.
Wenn das Rechteck ein Quadrat mit der Seitenlänge 12,5 cm ist, ist der Flächeninhalt maximal.
b) Seitenlängen des Grundstücks: x und y (in m).
Umfang: $U = 2x + 2y$ (in m) mit $x > 0$.
Nebenbedingung: $x \cdot y = 400$.
Zielfunktion: $U(x) = 2x + \frac{800}{x}$.
Globales Minimum für $x = y = 20$.
Wenn das Rechteck ein Quadrat mit der Seitenlänge 20 m ist, ist der Umfang minimal.

2 Seitenlängen des Rechtecks: x und y (in dm).
Flächeninhalt: $A = x \cdot y$ (in dm^2).
Nebenbedingung: $2x + y = 50$.
Zielfunktion: $A(x) = -2x^2 + 50x$ mit $0 \le x \le 10$.
Globales Maximum für $x = 10$ und $y = 30$ (Randmaximum).
Wenn das Rechteck die Seitenlängen 10 dm und 30 dm hat, wird der Flächeninhalt maximal (300 dm^2).

3 Kantenlängen des Quaders: a, b und x (in cm).
Volumen: $V = a \cdot b \cdot x$ (in cm^3).
Nebenbedingungen: $a = 16 - 2x$; $b = 10 - 2x$.
Zielfunktion:
$V(x) = (16 - 2x)(10 - 2x)x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$
mit $0 \le x \le 5$.
Globales Maximum für $x = 2$.
Das Volumen der Schachtel wird für $x = 2$ maximal.

4 Seitenlängen des Rechtecks: x und y.
Flächeninhalt: $A = x \cdot y$.
a) Nebenbedingung: $y = f(x) = 4 - \frac{1}{2}x^3$.
Zielfunktion: $A(x) = 4x - \frac{1}{2}x^4$ mit $x \in [0; 2]$.
Globales Maximum für $x = \sqrt[3]{2}$ und $y = 3$.
Es ist $P\left(\sqrt[3]{2} \,\middle|\, 3\right)$.
b) Nebenbedingung: $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$.
Zielfunktion: $A(x) = \frac{1}{x}$ mit $x \in [1; 3]$.
Globales Maximum für $x = 1$ und $y = 1$.
Es ist $P(1 | 1)$.
c) Nebenbedingung: $y = f(x) = \sqrt{4 - x}$.
Zielfunktion: $A(x) = x \cdot \sqrt{4 - x}$ mit $x \in [0; 4]$.
Globales Maximum für $x = \frac{8}{3}$ und $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
Es ist $P\left(\frac{8}{3} \,\middle|\, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

5 Radius des Wasserspeichers: r (in dm), Höhe des Wasserspeichers: h (in dm).
Oberflächeninhalt: $O = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$ (in dm^2).
Nebenbedingung: $\pi r^2 \cdot h = 1000$.
Zielfunktion: $O(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{2000}{r}$
mit $r \ge 0$.
Globales Minimum für $r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ und $h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$.
Der Blechverbrauch ist minimal, wenn der Radius und die Höhe gleich groß sind, nämlich $r = h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ dm ≈ 6,83 dm.

8 **a)** Kathetenlängen: a, b (in cm).
Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}ab$.
Nebenbedingung (Satz des Pythagoras): $a^2 + b^2 = 100$, also $b = \sqrt{100 - a^2}$.
Zielfunktion: $A(a) = \frac{1}{2}a\sqrt{100 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{100a^2 - a^4}$;
$0 \le a \le 10$.
$A'(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{200a - 4a^3}{\sqrt{100a^2 - a^4}} = 0$ liefert $a_1 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
$A\left(\sqrt{50}\right) = 25$; Randwerte: $A(0) = A(10) = 0$; $a_1 = \sqrt{50}$ ist also die Maximumstelle.
$b_1 = \sqrt{100 - 50} = a_1$. Beide Katheten müssen also ca. 7,07 cm lang sein.

Umfang: $U = a + b + 10$.
Zielfunktion: $U(a) = a + \sqrt{100 - a^2} + 10$; $0 \le a \le 10$.
$U'(a) = 1 - \frac{a}{\sqrt{100 - a^2}} = 0$ liefert $a_1 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
Die Kathetenlängen sind beim maximalen Umfang dieselben wie beim maximalen Flächeninhalt.
b) Seitenlängen: a, b (in cm); b ist die Basis des gleichschenkligen Dreiecks.
Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ (in cm^2).
Nebenbedingung: $2a + b = 60$.
Zielfunktion:
$A(b) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sqrt{\left(30 - \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sqrt{900 - 30b}$
mit $0 \le b \le 30$.
Globales Maximum für $b = 20$ und $a = 20$.
Der Flächeninhalt wird maximal, wenn das Dreieck gleichseitig ist mit der Seitenlänge 20 cm.

9 Grundseite der Pyramide: a (in m); Höhe: h (in m).
Volumen: $V = \frac{1}{3}a^2h$ (in m^3).
Nebenbedingung: $h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 9$ mit $d = \sqrt{2} \cdot a$ (Diagonale der Bodenfläche), also $h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = 9$ bzw. $h^2 + \frac{a^2}{2} = 9$.
Zielfunktion: $V(h) = \frac{1}{3}(18 - 2h^2)h = -\frac{2}{3}h^3 + 6h$
mit $0 \le h \le 3$.
Globales Maximum für $h = \sqrt{3}$ und $a = 2 \cdot \sqrt{3}$.
Der Rauminhalt des Zelts wird maximal wenn die Seitenlänge der Grundfläche ca. 3,46 m beträgt.

Seite 36

10 Radius des Halbkreises: r (in m); Seitenlänge des Rechtecks, die nicht 2r entspricht: y (in m).
Umfang: $U = 2r + 2y + \pi r$ (in m).
Nebenbedingung: $\frac{1}{2}\pi r^2 + 2ry = 45$.

$$\text{Zielfunktion: } U(r) = 2r + 2\left(\frac{45 - \frac{1}{2}\pi r^2}{2r}\right) + \pi r = 2r + \left(\frac{45}{r} - \frac{1}{2}\pi r\right) + \pi r = \frac{45}{r} + \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)r$$

mit $r > 0$.
Globales Minimum für $r = \sqrt{\frac{45}{2 + \frac{\pi}{2}}}$ und $y = \sqrt{\frac{45}{2 + \frac{\pi}{2}}}$.
Der Umfang wird minimal, wenn der Radius ca. 3,55 m und die Seitenlängen des Rechtecks ca. 7,10 m und 3,55 m betragen.

11 Preissenkung pro Ticket: x (in Vielfachen von 2,5 €); Anzahl der Passagiere: y.
Einnahmen: $E = y \cdot p = y \cdot (30 - 2{,}5x)$ (in €), wobei p der Preis pro Ticket ist.
Nebenbedingung: $y = 150 + 20x$.
Zielfunktion:
$E(x) = (150 + 20x) \cdot (30 - 2{,}5x) = -50x^2 + 225x + 4500$
mit $0 \le x \le 12$ und $x \in \mathbb{N}$.
Globales Maximum für $x = 2{,}25$.
Da $x \notin \mathbb{N}$ ist, ist zu prüfen, ob für $x = 2$ oder für $x = 3$ die Einnahmen maximal werden. Es ist $E(2) = 4750$ und $E(3) = 4725$.
Die Bahngesellschaft „Der Zug" sollte die Preise um 5 € senken, um maximale Tageseinnahmen zu erzielen.

14 **a)** Ist $P(u|v)$ ein Punkt der Tunnelwand, so gilt $v = -0{,}5u^2 + 4{,}5$. Der rechte, obere Eckpunkt des Lastwagens kann durch den Punkt $Q(1{,}2|3{,}5)$ dargestellt werden.
Mit dem Satz des Pythagoras folgt für den Abstand
$d(u) = d(P; Q) = \sqrt{(1{,}2 - u)^2 + (3{,}5 - v)^2}$
$= \sqrt{(1{,}2 - u)^2 + (3{,}5 - (-0{,}5u^2 + 4{,}5))^2}$.
b) Zu minimieren ist die Funktion d mit $0 \le u \le 3$ (3 ist Nullstelle von f).
$d(u)$ wird minimal, wenn
$g(u) = (1{,}2 - u)^2 + (3{,}5 - (-0{,}5u^2 + 4{,}5))^2$
$= 0{,}25u^4 - 2{,}4u + 2{,}44$
minimal wird.
Globales Minimum von g ist $u = \sqrt[3]{2{,}4} \approx 1{,}34$ mit
$d\left(\sqrt[3]{2{,}4}\right) \approx 0{,}17$.
Der Lastwagen kommt dem Punkt $P\left(\sqrt[3]{2{,}4}\,\middle|\,f\left(\sqrt[3]{2{,}4}\right)\right)$ am nächsten und hat dort einen Abstand von ca. 17 cm zur Tunnelwand.

15 **a)** Aus der Definition der Geschwindigkeit v bei der gleichförmigen Bewegung $v = \frac{s}{t}$ folgt $t = \frac{s}{v}$.
Im oberen Medium benötigt das Licht für die Strecke s_1 mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit v_1 die Zeit $t_1 = \frac{s_1}{v_1}$, analog im unteren Medium $t_2 = \frac{s_2}{v_2}$. Insgesamt benötigt es also die Zeit $T = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}$.
Mit dem Satz des Pythagoras folgt $s_1 = \sqrt{d_1^2 + x^2}$ und
$s_2 = \sqrt{d_2^2 + (b - x)^2}$, also $T(x) = \frac{\sqrt{d_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{d_2^2 + (b - x)^2}}{v_2}$.
b) Da sich das Licht auf dem schnellstmöglichen Weg ausbreitet, ist ein Minimum der Funktion T gesucht.
Ableitung: $T'(x) = \frac{2x}{2v_1\sqrt{d_1^2 + x^2}} + \frac{-2(b - x)}{2v_2\sqrt{d_2^2 + (b - x)^2}}$
$= \frac{x}{v_1\sqrt{d_1^2 + x^2}} - \frac{b - x}{v_2\sqrt{d_2^2 + (b - x)^2}}$.

Der Ansatz $T'(x) = 0$ führt auf
$\frac{x}{v_1\sqrt{d_1^2 + x^2}} = \frac{b - x}{v_2\sqrt{d_2^2 + (b - x)^2}}$ bzw. $\frac{x}{v_1 s_1} = \frac{b - x}{v_2 s_2}$.
Mit $\sin(\alpha) = \frac{x}{s_1}$ und $\sin(\beta) = \frac{b - x}{s_2}$ folgt schließlich
$\frac{\sin(\alpha)}{v_1} = \frac{\sin(\beta)}{v_2}$ oder $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{v_1}{v_2}$.

II Exponential- und Logarithmusfunktionen

1 Die natürliche Exponentialfunktion und die Euler'sche Zahl e

Seite 50

Einstiegsaufgabe
Da der Graph von f mit $f(x) = 2^x$ streng monoton wachsend ist, kommt für den Graphen von f nur Graph A oder Graph C infrage. Da $f(0) = 2^0 = 1$ gilt, muss es sich um Graph A handeln.
Auch die Steigung des Graphen von f nimmt ständig zu. Für den Graphen von f' kommt also nur Graph C infrage.

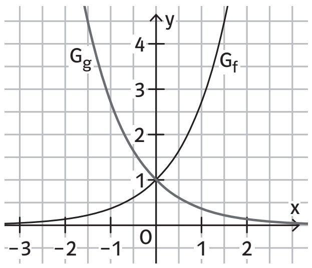
Seite 51

1 a) $f'(x) = e^x$ b) $f'(x) = 3 \cdot e^x$
c) $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot e^x$ d) $f'(x) = e^x - 6x$

2 a) $f'(x) = 7 \cdot e^{7x}$ b) $f'(x) = -0{,}2 \cdot e^{-0{,}2x}$
c) $f'(x) = 6 \cdot e^{2x}$ d) $f'(x) = -2 \cdot e^{-4x}$
e) $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$ f) $f'(x) = 8 \cdot e^{2x-3}$
g) $f'(x) = -e^{-x}$ h) $f'(x) = -2x^2 \cdot e^{-\frac{2}{3}x^3}$
i) $f'(x) = -e^{1-5x}$ j) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-5x-1}$
k) $f'(x) = (-4 + 4x) \cdot e^{-4x+2x^2}$
l) $f'(x) = 5 \cdot (-3 + 3x^2) \cdot e^{-3x+x^3}$

3 a) $f'(x) = (x + 1)e^x$ b) $f'(x) = (x - 2)e^x$
c) $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$ d) $f'(x) = (x + 1)e^x - 2x$
e) $f'(x) = (\cos(x) + \sin(x)) \cdot e^x$ f) $f'(x) = (x^2 + 2x - 5)e^x$
g) $f'(x) = (x^4 + 4x^3) \cdot e^x$ h) $f'(x) = -x e^x$

4 Die beiden Graphen liegen symmetrisch zur y-Achse: Wenn man den Graphen von f an der y-Achse spiegelt, so entsteht der Graph von g und umgekehrt.



Seite 52

6 a) $g'(x) = 3e^{-2x} \cdot (1 - 2x)$
b) $f'(t) = (t^2 + t - 4) \cdot 2 \cdot e^{2t+2}$
c) $h'(u) = e^{-3u} \cdot (5e^{8u} - 6u + 2)$
d) $f_k'(x) = (3 - 4x - 3kx + 2kx^2) \cdot e^{-kx}$
e) $g_a'(t) = (3 + 4at + 6at^2) \cdot e^{at^2}$
f) $h'(x) = 4 \cdot e^{-2x-x^2} \cdot (-2x^2 - x + 2)$

7 a) Der Graph von f gehört zu B, denn es ist der Graph der natürlichen Exponentialfunktion.
Der Graph von g gehört zu E, denn er entsteht aus dem Graphen von f durch eine Verschiebung um −2 in x-Richtung.
Der Graph von h gehört zu D, denn er entsteht aus dem Graphen von f durch eine Verschiebung um 2 in y-Richtung.
b) Zu A gehört $k(x) = e^{x-2}$, zu C gehört $l(x) = e^x + 1$.

8 a) Der Graph von g entsteht aus dem Graphen von f durch eine Spiegelung an der x-Achse und eine Spiegelung an der y-Achse oder kurz: durch eine Punktspiegelung am Ursprung.
b) Der Graph von g entsteht aus dem Graphen von f durch eine Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung und anschließend eine Verschiebung um −3 in y-Richtung (also um 3 nach unten).
c) Der Graph von g entsteht aus dem Graphen von f durch eine Verschiebung um 1 in x-Richtung (also um 1 nach rechts), eine Streckung mit dem Faktor 3 in y-Richtung und schließlich eine Verschiebung um 2 in y-Richtung (also um 2 nach oben).
d) Der Graph von g entsteht aus dem Graphen von f durch eine Spiegelung an der y-Achse, eine Verschiebung um 2 in x-Richtung (also um 2 nach rechts), eine Streckung um 4 in y-Richtung und schließlich eine Spiegelung an der x-Achse.

9 a) Wahr. Es gilt $e^x > 0$ für alle x.
b) Falsch. Die natürliche Exponentialfunktion ist an der Stelle 0 definiert. $S(0|1)$ ist der Schnittpunkt ihres Graphen mit der y-Achse.
c) Wahr. Es gilt $f'(x) = e^x \neq 0$ für alle x.
d) Wahr. Es gilt $e^x \to 0$ für $x \to -\infty$.
e) Falsch. Würde sich der Graph der natürlichen Exponentialfunktion der Geraden $x = a$ annähern, so würde e^x gegen unendlich streben für $x \to a$. Das ist aber nicht der Fall, denn e^x strebt gegen e^a.

10 Tangentengleichung $y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2) = e^2 x - e^2$; Schnittpunkt mit der x-Achse: $N(1|0)$. Schnittpunkt mit der y-Achse: $S(0|-e^2)$.

11

n	1	10	100	1000	10 000
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2	≈ 2,59	≈ 2,7048	≈ 2,716 924	≈ 2,718 146

n	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	≈ 2,718 268	≈ 2,718 280 5	≈2,718 281 7	≈ 2,718 281 8

Auf sieben Dezimalen ist $e \approx 2{,}718\,2818$; es könnten aber auch Rundungsfehler vorliegen.

13 $f(x) = e^{3x}$, 100. Ableitung: $f^{(100)}(x) = 3^{100} \cdot e^{3x}$.
$g(x) = e^{-x}$, 100. Ableitung: $g^{(100)}(x) = (-1)^{100} \cdot e^{-x} = e^{-x}$.
$h(x) = x \cdot e^x$, 100. Ableitung: $h^{(100)}(x) = (x + 100) \cdot e^x$.

14 **a)** Für eine beliebige Exponentialfunktion g mit $g(x) = a^x$ gilt

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^x\cdot(a^h-1)}{h} = a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = g(x)\cdot g'(0)$$

Es ist also $g'(x)$ proportional zu $g(x)$ mit Proportionalitätsfaktor $g'(0)$.
Speziell für die Basis e ist dieser Proportionalitätsfaktor 1.
Für $f(x) = e^x$ gilt also $f'(x) = f(x)$, denn $f'(0) = 1$.
Die Ableitungsfunktion von f stimmt mit f überein.
b) Individuelle Lösung, z. B.: Für $h(x) = e^{2x}$ gilt $h'(x) = 2\cdot e^{2x} = 2\cdot h(x)$.

15 **a)** Tangentengleichung in $A(u\,|\,e^u)$:
$y = f'(u)\cdot(x-u) + f(u) = e^u\cdot(x-u) + e^u = e^u\cdot(x-u+1)$.
Schnittpunkt mit der x-Achse: $N(u-1\,|\,0)$.
Zum Punkt $A(u\,|\,e^u)$ des Graphen der natürlichen Exponentialfunktion f konstruiert man die Tangente an den Graphen von f mit Zirkel und Lineal wie folgt (Koordinatensystem und Längeneinheit 1 LE sind gegeben):
(1) Man zeichnet eine Parallele zur y-Achse durch A. Der Punkt P ist der Schnittpunkt dieser Parallelen mit der x-Achse.
(2) Man stellt am Zirkel die Einheitslänge 1 LE ein und zeichnet einen Kreis mit Radius 1 LE um P.
(3) Der Schnittpunkt dieses Kreises mit der x-Achse, der links von P liegt, ist der Punkt N.
(4) Die Gerade durch N und A ist die gesuchte Tangente.
b) Die Gerade mit Gleichung $y = ax$ ist eine Ursprungerade, die den links gekrümmten Graphen der natürlichen Exponentialfunktion in höchstens zwei Punkten schneiden kann.
- Für $a = e$ ist die Ursprungsgerade mit der Gleichung $y = ex$ eine Tangente an den Graphen der natürlichen Exponentialfunktion. Sie schneidet diesen in genau einem Punkt, nämlich $A(1\,|\,e)$ (vgl. Teilaufgabe a)).
- Für $0 \le a < e$ schneidet die Ursprungsgerade mit der Gleichung $y = ax$ den Graphen der natürlichen Exponentialfunktion in keinem Punkt, da die Gerade unterhalb des Graphen verläuft.
- Für $e < a$ schneidet die Ursprungsgerade mit der Gleichung $y = ax$ den Graphen der natürlichen Exponentialfunktion in genau zwei Punkten $B_1(b_1\,|\,e^{b_1})$ und $B_2(b_2\,|\,e^{b_2})$, wobei $0 < b_1 < e < b_2$ gilt.
- Für $a < 0$ schneidet die Ursprungsgerade mit der Gleichung $y = ax$ den Graphen der natürlichen Exponentialfunktion in genau einem Punkt.

2 Exponentialgleichungen und natürlicher Logarithmus

Seite 53

Einstiegsaufgabe
$e^x = 2 \Rightarrow x \approx 0{,}7$
$e^x = 0{,}5 \Rightarrow x \approx -0{,}7$
$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$
$e^x = 3{,}5 \Rightarrow x \approx 1{,}25$

Seite 54

1 **a)** $\frac{1}{e} = e^{-1}$ **b)** $\frac{1}{e^2} = e^{-2}$ **c)** $1 = e^0$
d) $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = e^{0{,}5}$ **e)** $\frac{e^5}{e^2} = e^3$ **f)** $\sqrt[5]{e} = e^{\frac{1}{5}} = e^{0{,}2}$

2 **a)** $e^x = 15 \Rightarrow x = \ln(15) \approx 2{,}708$
b) $e^{z+1} = 2{,}4 \Rightarrow z = \ln(2{,}4) - 1 \approx -0{,}125$
c) $e^{2x} = 7 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\cdot\ln(7) \approx 0{,}973$
d) $3\cdot e^{4y+1} = 16{,}2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}\cdot(\ln(5{,}4) - 1) \approx 0{,}172$
e) $4\cdot e^{-x} = 10 \Rightarrow x = -\ln(2{,}5) \approx -0{,}916$
f) $e^{4-x} - 2 = 3 \Rightarrow x = 4 - \ln(5) \approx 2{,}391$
g) $2\cdot e^{6-3z} = 10 \Rightarrow z = 2 - \frac{1}{3}\cdot\ln(5) \approx 1{,}464$
h) $3 + 2\cdot e^{3-4a} = 9 \Rightarrow a = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cdot\ln(3) \approx 0{,}475$

3 **a)** $\ln(e) = 1$ **b)** $\ln(e^3) = 3$
c) $\ln(1) = 0$ **d)** $\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$
e) $4\cdot\ln(\sqrt[4]{e}) = 1$ **f)** $c\cdot\ln(e^2) = 2c$
g) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2$ **h)** $\ln\left(e^b\cdot\frac{1}{e}\right) = b - 1$
i) $\ln\left(e\cdot\frac{1}{e^3}\right) = -2$ **j)** $\ln\left(e\cdot\sqrt[3]{e}\right) = \frac{4}{3}$
k) $\ln(e^{3x-1}) = 3x - 1$ **l)** $\ln\left(\frac{1}{e^z}\cdot e\right) = 1 - z$

4 **a)** $e^{\ln(4)} = 4$ **b)** $e^{\ln(0{,}2)} = 0{,}2$ **c)** $e^{\ln(a+1)} = a + 1$
d) $8e^{\ln\left(\frac{x}{4}\right)} = 2x$ **e)** $\frac{1}{x}e^{\ln(9x)} = 9$ **f)** $e^{\ln(2x-1)} = 2x - 1$

5 **a)** $e^x = e \Rightarrow x = 1$
b) $e^{-4x-5} = 1 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}$
c) $e^{2x} = \frac{1}{e} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$
d) $e^{x-1} = \sqrt{e} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
e) $e^{-4z} = \frac{1}{e^2} \Rightarrow z = \frac{1}{2}$
f) $e^{2b-5} = \sqrt[3]{e} \Rightarrow b = \frac{8}{3}$
g) $e^{5a-8} = 1 \Rightarrow a = \frac{8}{5} = 1{,}6$
h) $2\cdot e^{7x-3} = \sqrt{4e} \Leftrightarrow e^{7x-3} = \sqrt{e} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

6 **a)** $f(t) = 3 \Leftrightarrow e^{0{,}5t} = 3 \Rightarrow t = 2\cdot\ln(3) \approx 2{,}2$.
Nach ca. 2,2 Tagen gibt es 3 Millionen Bakterien.
b) Der Zeitpunkt t mit $f(t) - f(0) = 5$ ist der Zeitpunkt, zu dem die Bakterienanzahl seit Beobachtungsbeginn um 5 Millionen zugenommen hat.

9 **a)** $f(x) = e^x\cdot 2 - e^x\cdot e^x = 0 \Leftrightarrow e^x\cdot(2 - e^x) = 0$
$\Rightarrow x = \ln(2) \approx 0{,}693$
b) $f(x) = e^{-x}\cdot 9 - x^2\cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x}\cdot(9 - x^2) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -3$
c) $f(x) = e^{2x} - 2\cdot e^x = 0 \Leftrightarrow e^x\cdot(e^x - 2) = 0$
$\Rightarrow x = \ln(2) \approx 0{,}693$
d) $f(x) = e^{3x} - 9\cdot e^x = 0 \Leftrightarrow e^x\cdot(e^{2x} - 9) = 0$
$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln(9) = \ln(3) \approx 1{,}099$
e) $f(x) = x^2\cdot e^{5x} - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\cdot(e^{5x} - 5) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{5}\ln(5) \approx 0{,}322$
f) $f(x) = 9xe^{-5x} - 45e^{-5x} = 0$
$\Leftrightarrow 9e^{-5x}\cdot(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 5$
g) $f(x) = 12e^{2x} - e^{2x}\cdot 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x}\cdot(6 - x^2) = 0$
$\Rightarrow x_1 = \sqrt{6},\ x_2 = -\sqrt{6}$

h) $f(x) = e^{2x} - e^{x+2} = 0 \iff e^x \cdot (e^x - e^2) = 0 \Rightarrow x = 2$
i) $f(x) = x^2 e^{3x} + (x-6)e^{3x} = 0 \iff e^{3x} \cdot (x^2 + x - 6) = 0$
$\Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 2$

Seite 55

10 a) $f(x) = x \cdot e^x;\ f'(x) = (x+1) \cdot e^x;$
$f'(x) = (x+1) \cdot e^x = 0 \Rightarrow x = -1;\ P\left(-1 \middle| -\frac{1}{e}\right)$
b) $f(x) = x^2 \cdot e^{2x};\ f'(x) = 2x e^{2x} \cdot (1+x),\ f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ oder $x_2 = -1$, also $P_1(0|0)$ und $P_2\left(-1 \middle| \frac{1}{e^2}\right)$
c) $f(x) = (x-2) \cdot e^{-x};\ f'(x) = e^{-x} \cdot (3-x),\ f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$, also $P\left(3 \middle| \frac{1}{e^3}\right)$

11 a) $h(6) = 0{,}02 \cdot e^{6k} = 0{,}4 \Rightarrow k = \frac{1}{6} \cdot \ln(20) \approx 0{,}50$
b) $h(t) = 0{,}02 \cdot e^{0{,}5t} = 3 \Rightarrow t = 2 \cdot \ln(150) \approx 10$; nach ca. 10 Wochen ist die Pflanze 3 m hoch.
c) $h'(t) = 0{,}01 \cdot e^{0{,}5t} = 0{,}3 \Rightarrow t = 2 \cdot \ln(3) \approx 6{,}8$. Nach knapp sieben Wochen ist die momentane Änderungsrate 0,3 m pro Woche.
d) $h(t+1) - h(t) = 0{,}43$

12 a) $v(t) = 2{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}1t}) = 2 \Rightarrow t = -10 \cdot \ln(0{,}2) \approx 16{,}1$. Nach ca. 16 Sekunden beträgt die Geschwindigkeit des Steins $2\frac{m}{s}$.
b) $v'(t) = 0{,}25 \cdot e^{-0{,}1t} > 0$ für alle reellen Zahlen t. Somit ist die Funktion v monoton wachsend. Die Geschwindigkeit des Steins nimmt ständig zu.
c) Im Sachzusammenhang beschreibt die Lösung der Gleichung „$v(t+5) - v(t) = 0{,}05$“ den Zeitpunkt t, ab dem die Geschwindigkeit des Steins in den folgenden fünf Sekunden um $5\frac{m}{s}$ zunimmt.
d) $v(t+1) - v(t) = 0{,}13$
$v(t+1) - v(t) = 2{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}1}) \cdot e^{-0{,}1t} = 0{,}13$
$\Rightarrow t = -10 \cdot \ln\left(\frac{0{,}13}{2{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}1})}\right) \approx 6{,}04$; in der 7. Sekunde nimmt die Geschwindigkeit um $0{,}13\frac{m}{s}$ zu.
e) $v'(t) = 0{,}25 \cdot e^{-0{,}1t} = 0{,}026$ für $t = -10 \cdot \ln(0{,}104) = 22{,}6$.
Nach knapp 23 beträgt die Beschleunigung $2{,}6\frac{cm}{s^2}$.

13 a) $e^{4 \cdot \ln(2)} = \left(e^{\ln(2)}\right)^4 = 2^4 = 16$
b) $e^{3 \cdot \ln(a)} = \left(e^{\ln(a)}\right)^3 = a^3$
c) $e^{\frac{1}{2} \cdot \ln(9)} = \left(e^{\ln(9)}\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$
d) $e^{0{,}5 \cdot \ln(4b)} = \left(e^{\ln(4b)}\right)^{0{,}5} = (4b)^{0{,}5} = 2 \cdot \sqrt{b}$
e) $e^{2 \cdot \ln(3x)} = \left(e^{\ln(3x)}\right)^2 = (3x)^2 = 9x^2$
f) $e^{c \cdot \ln(x^2)} = \left(e^{\ln(x^2)}\right)^c = (x^2)^c = x^{2c}$

14 a) $e^{2x} - 11 \cdot e^x + 30 = 0$
Substitution: $u = e^x$.
$u^2 - 11u + 30 = 0 \Rightarrow u_1 = 5,\ u_2 = 6$
Rücksubstitution: $u_1 = 5 = e^{x_1} \Rightarrow x_1 = \ln(5) \approx 1{,}609$.
$u_2 = 6 = e^{x_2} \Rightarrow x_2 = \ln(6) \approx 1{,}792$
b) $e^{2x^2} - e^{x^2} - 6 = 0$
Substitution: $u = e^{x^2}$.
$u^2 - u - 6 = 0 \Rightarrow u_1 = 3,\ u_2 = -2$
Rücksubstitution: $u_1 = 3 = e^{x^2} \Rightarrow x_1 = +\sqrt{\ln(3)} \approx 1{,}048$;
$x_2 = -\sqrt{\ln(3)} \approx -1{,}048$.
$u_2 = -2 = e^{x^2}$ ist nicht lösbar.
c) $e^x - 9e^{-x} = 0 \iff e^{2x} = 9 \iff e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$

d) $\frac{15}{e^x} - 1 = 2 \cdot e^x \iff 15 - e^x = 2 \cdot e^{2x} \iff 2e^{2x} + e^x - 15 = 0$
Substitution: $u = e^x$.
$2u^2 + u - 15 = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{5}{2},\ u_2 = -3$
Rücksubstitution: $u_1 = \frac{5}{2} = e^x \Rightarrow x = \ln(2{,}5) \approx 0{,}916$.
$u_2 = -3 = e^x$ ist nicht lösbar.
e) $7^x = 5 \iff \left(e^{\ln(7)}\right)^x = e^{\ln(7) \cdot x} = 5 \Rightarrow x = \frac{\ln(5)}{\ln(7)} \approx 0{,}827$
f) $3^{x+2} - 3^x = 7 \iff 3^x \cdot (9 - 1) = 7 \iff 3^x = \frac{7}{8}$;
$e^{\ln(3) \cdot x} = \frac{7}{8} = 0{,}875 \Rightarrow x = \frac{\ln(0{,}875)}{\ln(3)} \approx -0{,}122$
g) $4^{2x} - 6 \cdot 4^x - 27 = 0$
Substitution: $u = 4^x$.
$u^2 - 6u - 27 = 0 \Rightarrow u_1 = 9,\ u_2 = -3$
Rücksubstitution: $u_1 = 9 = 4^x \Rightarrow x = \log_4(9) = \frac{\ln(9)}{\ln(4)} \approx 1{,}585$.
$u_2 = -3 = 4^x$ ist unlösbar.
h) $12 + 5^x = 25^x \iff 5^{2x} - 5^x - 12 = 0$
Substitution: $u = 5^x$.
$u^2 - u - 12 = 0 \Rightarrow u_1 = 4,\ u_2 = -3$
Rücksubstitution: $u_1 = 4 = 5^x \Rightarrow x = \log_5(4) = \frac{\ln(4)}{\ln(5)} \approx 0{,}861$.
$u_2 = -3 = 5^x$ ist unlösbar.

15 a) $f(x) = 4^x = e^{\ln(4)x};\ f'(x) = \ln(4) \cdot e^{\ln(4)x} = \ln(4) \cdot 4^x$
b) $f(x) = 3 \cdot 2^x - 5 = 3 \cdot e^{\ln(2)x} - 5;$
$f'(x) = 3 \cdot \ln(2) \cdot 2^x = \ln(8) \cdot 2^x$
c) $f(x) = 7^{2x} - 3^x = e^{\ln(7) \cdot 2x} - e^{\ln(3)x};$
$f'(x) = 2 \cdot \ln(7) \cdot 7^{2x} - \ln(3) \cdot 3^x = \ln(49) \cdot 7^{2x} - \ln(3) \cdot 3^x$
d) $f(x) = 2^{-x} + 2^x = e^{-\ln(2)x} + e^{\ln(2)x};$
$f'(x) = -\ln(2) \cdot 2^{-x} + \ln(2) \cdot 2^x$

18 Zu $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$:
Es gilt $e^{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{a}{b} = \frac{e^{\ln(a)}}{e^{\ln(b)}} = e^{\ln(a) - \ln(b)}$.
Somit gilt $\ln\left(e^{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(e^{\ln(a) - \ln(b)}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
Zu $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$:
Es gilt $e^{\ln(a^x)} = a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{\ln(a)x}$.
Somit gilt $\ln\left(e^{\ln(a^x)}\right) = \ln(a^x) = \ln\left(e^{\ln(a)x}\right) = \ln(a)x = x \cdot \ln(a)$.

19 Die Tangente im Punkt $P(u|e^{-u})$ des Graphen von f hat die Gleichung $t\colon y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$, also
$t\colon y = -e^{-u} \cdot x + e^{-u} \cdot (u+1)$.
Diese Tangente schneidet die x-Achse in $x = u + 1$ und die y-Achse in $y = e^{-u} \cdot (u+1)$.
Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks, das die Koordinatenachsen mit der Tangente bilden, beträgt also
$A(u) = \frac{1}{2} \cdot e^{-u} \cdot (u+1)^2$ (Zielfunktion).
Es gilt $A'(u) = \frac{1}{2} \cdot e^{-u} \cdot (1 - u^2),\ A''(u) = \frac{1}{2} \cdot e^{-u} \cdot (u^2 - 2u - 1)$.
Maximum des Flächeninhalts: $A'(u) = \frac{1}{2} \cdot e^{-u} \cdot (1 - u^2) = 0$
$\Rightarrow u = \pm 1$. Da nach Aufgabenstellung $u > 0$ ist, folgt $u = 1$.
Überprüfung von $u = 1$: $A''(1) = -\frac{1}{e} < 0$. Bei $u = 1$ liegt also lokales Maximum vor. Da nur eine innere Extremstelle vorhanden ist, muss es ein globales Maximum sein.
Alternativ kann man auch die Ränder untersuchen: Für $u \to +\infty$ gilt $A(u) \to 0$ und für $u \to 0$ gilt $A(u) \to \frac{1}{2}$.
Da $A(1) = \frac{2}{e} > \frac{1}{2}$ gilt, liegt ein globales Maximum vor.
Der gesucht Punkt ist somit $P\left(1 \middle| \frac{1}{e}\right)$.

3 Exponentialfunktionen und ihre Graphen

Seite 56

Einstiegsaufgabe

(A) Vermutung: $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$ und $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$.

(B) Vermutung: $g(x) \to 0$ für $x \to +\infty$. Man könnte außerdem aufgrund des Verlaufs des Graphen vermuten, dass $g(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$ gilt. Es muss aber $g(x) \to 0$ für $x \to -\infty$ gelten, da der Funktionsterm erkennen lässt, dass der Graph symmetrisch zu y-Achse ist.

Seite 57

1 a) $f(x) = 2x - e^{2x}$, $f'(x) = 2 - 2e^{2x}$, $f''(x) = -4e^{2x}$
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 2 - 2e^{2x} = 0$.
Lösung: $x = 0$.
Überprüfung: $f''(0) = -4 < 0$, also Maximumstelle.
Es ist $f(0) = -1$, also $H(0|-1)$.

b) $f(x) = e^{3x} - 6x$, $f'(x) = 3e^{3x} - 6$, $f''(x) = 9e^{3x}$
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 3e^{3x} - 6 = 0$.
Lösung: $x = \frac{1}{3} \cdot \ln(2) \approx 0{,}231$.
Überprüfung: $f''\left(\frac{1}{3} \cdot \ln(2)\right) = 18 > 0$, also Minimumstelle.
Es ist $f\left(\frac{1}{3}\ln(2)\right) = 2 - 2\ln(2) \approx 0{,}614$,
also $T\left(\frac{1}{2}\ln(2) \middle| 2 - 2\ln(2)\right) \approx T(0{,}231|0{,}614)$.

c) $f(x) = x \cdot e^{-x}$, $f'(x) = (1 - x) \cdot e^{-x}$, $f''(x) = (x - 2) \cdot e^{-x}$
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = (1 - x) \cdot e^{-x} = 0$.
Lösung: $x = 1$.
Überprüfung: $f''(1) = -e^{-1} < 0$, also Maximumstelle.
Es ist $f(1) = \frac{1}{e}$; $H\left(1 \middle| \frac{1}{e}\right) \approx H(1|0{,}368)$.

d) $f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$, $f'(x) = 2x \cdot (1 + x) \cdot e^{2x}$,
$f''(x) = (2 + 8x + 4x^2) \cdot e^{2x}$.
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 2x \cdot (1 + x) \cdot e^{2x} = 0$.
Lösungen: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.
Überprüfung: $f''(0) = 2 > 0$, also Minimumstelle;
$f''(-1) = (-2) \cdot e^{-2} < 0$, also Maximumstelle.
Es ist $f(0) = 0$, also $T(0|0)$; $f(-1) = \frac{1}{e^2} \approx 0{,}135$, also $H\left(-1 \middle| \frac{1}{e^2}\right) \approx H(-1|0{,}135)$.

e) $f(x) = x \cdot e^x$, $f'(x) = (1 + x) \cdot e^x$, $f''(x) = (2 + x) \cdot e^x$
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = (1 + x) \cdot e^x = 0$.
Lösung: $x = -1$.
Überprüfung: $f''(-1) = e^{-1} > 0$, also Minimumstelle.
Es ist $f(-1) = -\frac{1}{e}$, also $T\left(-1 \middle| -\frac{1}{e}\right) \approx T(-1|-0{,}368)$.

f) $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x$, $f'(x) = (x^2 + 2x - 3) \cdot e^x$,
$f''(x) = (x^2 + 4x - 1) \cdot e^x$
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = (x^2 + 2x - 3) \cdot e^x = 0$.
Lösungen: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.
Überprüfung: $f''(1) = 4e > 0$, also Minimumstelle;
$f''(-3) = -\frac{4}{e^3} < 0$, also Maximumstelle.
Es ist $f(1) = -2e$, also $T(1|-2e) \approx T(1|-5{,}437)$;
$f(-3) = \frac{6}{e^3} \approx 0{,}299$, also $H\left(-3 \middle| \frac{6}{e^3}\right) \approx H(-3|0{,}299)$.

g) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x$, $f'(x) = e^{2x} - 2e^x$, $f''(x) = 2e^{2x} - 2e^x$
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = e^{2x} - 2e^x = e^x \cdot (e^x - 2) = 0$.
Lösung: $x = \ln(2) \approx 0{,}693$.
Überprüfung: $f''(\ln(2)) = 4 > 0$, also Minimumstelle.
Es ist $f(\ln(2)) = -2$, also $T(\ln(2)|-2) \approx T(0{,}693|-2)$.

h) $f(x) = e^x + e^{-x}$, $f'(x) = e^x - e^{-x}$, $f''(x) = e^x + e^{-x}$
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = e^x - e^{-x} = 0$
$\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0$.
Lösung: $x = 0$.
Überprüfung: $f''(0) = 2 > 0$, also Minimumstelle.
Es ist $f(0) = 2$, also $T(0|2)$.

i) $f(x) = -e^{-3x} + e^{-x}$, $f'(x) = 3e^{-3x} - e^{-x}$,
$f''(x) = -9e^{-3x} + e^{-x}$
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 3e^{-3x} - e^{-x} = 0$
$\Leftrightarrow 3e^{-2x} - 1 = 0$.
Lösung: $x = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\sqrt{3}\right) \approx 0{,}549$.
Überprüfung: $f''\left(\ln\left(\sqrt{3}\right)\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} < 0$, also Maximumstelle.
Es ist $f\left(\ln\left(\sqrt{3}\right)\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0{,}385$,
also $H\left(\ln\left(\sqrt{3}\right) \middle| -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right) \approx H(0{,}549|0{,}385)$.

2 a) $f(x) \to 0$ für $x \to +\infty$; $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$
b) $f(x) \to 0$ für $x \to +\infty$; $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$
c) $f(x) \to 0$ für $x \to +\infty$; $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$
d) $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$; $f(x) \to 4$ für $x \to -\infty$
e) $f(x) \to 2$ für $x \to +\infty$; $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$
f) $f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$; $f(x) \to 3$ für $x \to -\infty$
g) $f(x) \to 0$ für $x \to +\infty$; $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$
h) $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$; $f(x) \to 1$ für $x \to -\infty$
i) $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$; $f(x) \to -1$ für $x \to -\infty$
j) $f(x) \to 0$ für $x \to +\infty$; $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$
k) $f(x) \to 0$ für $x \to +\infty$; $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$
l) $f(x) \to -4$ für $x \to +\infty$; $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$

3 Kärtchen 1 gehört zu C, denn für die Funktion f mit $f(x) = x^4 \cdot e^{-x}$ gilt $f(x) \to 0$ für $x \to +\infty$ und $f(x) \geq 0$ für alle x.
Kärtchen 2 gehört zu A, denn für die Funktion f mit $f(x) = x^3 \cdot e^x$ gilt $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$ und $f(x) < 0$ für alle $x < 0$.
Kärtchen 3 gehört zu D, denn für die Funktion f mit $f(x) = x^5 \cdot e^{-x}$ gilt $f(x) \to 0$ für $x \to +\infty$ und $f(x) < 0$ für alle $x < 0$.
Zu B gehört z. B. der Funktionsterm $f(x) = x^2 \cdot e^x$, denn es gilt $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$ und $f(x) \geq 0$ für alle x.

4 a) $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ achsensymmetrisch zur y-Achse
b) $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ punktsymmetrisch zum Ursprung
c) $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ punktsymmetrisch zum Ursprung
d) weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung
e) $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ achsensymmetrisch zur y-Achse
f) $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ achsensymmetrisch zur y-Achse

5 a) $f(t) = e^{2t} - 4e^t$, $f'(t) = 2 \cdot e^{2t} - 4e^t$,
$f''(t) = 4 \cdot e^{2t} - 4e^t$, $f'''(t) = 8 \cdot e^{2t} - 4e^t$
Mögliche Extremstellen:
$f'(t) = 2 \cdot e^{2t} - 4e^t = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot e^t \cdot (e^t - 2) = 0$.
Lösung: $t = \ln(2)$.
Überprüfung: $f''(\ln(2)) = 8 > 0$, also Minimumstelle,
Es ist $f(\ln(2)) = -4$, also $T(\ln(2)|-4) \approx T(0{,}69|-4)$
Mögliche Wendestellen:
$f''(t) = 4 \cdot e^{2t} - 4e^t = 0 \rightarrow 4 \cdot e^t \cdot (e^t - 1) = 0$.
Lösung: $t = 0$.

Überprüfung: $f'''(0) = 4 \neq 0$, also Wendestelle.
Es ist $f(0) = -3$, also $W(0|-3)$.
Gleichung der waagerechten Asymptote: $y = 0$.
b) $f(x) = 3 + x \cdot e^{-0,2x}$,
$f'(x) = e^{-0,2x} \cdot (1 - 0,2x)$, $f''(x) = 0,2 \cdot e^{-0,2x} \cdot (0,2x - 2)$,
$f'''(x) = 0,04 \cdot e^{-0,2x} \cdot (3 - 0,2x)$
Mögliche Extremstellen:
$f'(x) = e^{-0,2x} \cdot (1 - 0,2x) = 0$.
Lösung: $x = 5$.
Überprüfung: $f''(5) = -\frac{0,2}{e} < 0$, also Maximumstelle.
Es ist $f(5) = 3 + \frac{5}{e}$, also $H\left(5 \middle| 3 + \frac{5}{e}\right) \approx H(5|4,84)$.
Mögliche Wendestellen:
$f''(x) = 0,2 \cdot e^{-0,2x} \cdot (0,2x - 2) = 0$.
Lösung: $x = 10$.
Überprüfung: $f'''(10) = \frac{0,04}{e^2} \neq 0$, also Wendestelle.
Es ist $f(10) = 3 + \frac{10}{e^2}$, also $W\left(10 \middle| 3 + \frac{10}{e^2}\right) \approx W(10|4,35)$.
Gleichungen der waagerechten Asymptote: $y = 3$.
c) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$, $f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x\right)$,
$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(\frac{1}{2}x - 2\right)$, $f'''(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(3 - \frac{1}{2}x\right)$
Mögliche Extremstellen:
$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = 0$.
Lösung: $x = 2$.
Überprüfung: $f''(2) = -\frac{1}{2e} < 0$, also Maximumstelle.
Es ist $f(2) = \frac{2}{e}$, also $H\left(2 \middle| \frac{2}{e}\right) \approx H(2|0,74)$.
Mögliche Wendestellen:
$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 0$.
Lösung: $x = 4$.
Überprüfung: $f'''(4) = \frac{1}{4e^2} \neq 0$, also Wendestelle
Es ist $f(4) = \frac{4}{e^2}$, also $W\left(4 \middle| \frac{4}{e^2}\right) \approx W(4|0,54)$.
Gleichung der waagerechten Asymptote: $y = 0$.

Seite 58

8 a) (A) $f(x) = x^2 \cdot e^x$ ist als Funktionsterm nicht möglich. Ansonsten wäre $f'(x) = x \cdot e^x \cdot (x + 2)$. Mögliche Extremstellen dieser Funktion sind 0 und $-2 < 0$. Der abgebildete Graph hat aber einen Hochpunkt bei $a > 0$.
Alternative: Für die Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$ würde gelten: $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$ und $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$. Würde der abgebildete Graph dieses Verhalten außerhalb des gezeichneten Bereichs noch aufweisen, so müsste der Graph im Bereich $x > 0$ noch einen Tiefpunkt und im Bereich $x < 0$ noch einen Hochpunkt haben. Beides trifft für den Graphen von f mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$ jedoch sicher nicht zu, da f nur zwei Extremstellen hat (s. o.).
(B) $f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$ ist als Funktionsterm nicht möglich, da in diesem Fall $f(x) < 0$ für alle $x < 0$ gilt; der Graph müsste für $x < 0$ also unterhalb der x-Achse liegen. Dies ist nicht der Fall.
(C) Die Ableitungsfunktion f′ hat bei $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel von − nach +. Also ist $x = 0$ keine Extremstelle von f′.
(D) Aus dem Hochpunkt $H(a|f(a))$ des Graphen von f ergibt sich, dass f′ bei $x = a$ einen Vorzeichenwechsel von + zu − hat. Somit ist $f''(a) \leq 0$.

b) Individuelle Lösung, z. B.: $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ oder $f(x) = x^4 \cdot e^{-x}$.

9 (A) Für $x \to \pm\infty$ strebt x^2 gegen $+\infty$ und damit strebt auch e^{x^2} gegen $+\infty$. Somit strebt $e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$ gegen 0 für $x \to \pm\infty$.
(B) $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$, $f''(x) = 2e^{-x^2} \cdot (2x^2 - 1)$
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} = 0$.
Lösung: $x = 0$.
Überprüfung: $f''(0) = -2 < 0$, also Maximumstelle.
Es ist $f(0) = 1$, also $H(0|1)$.
(C) Es ist $f(x) > 0$ für alle x. Da $x = 0$ die einzige Extremstelle von f ist und $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$ gilt, ist $f(0)$ ein globales Maximum und somit $0 < f(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist umgekehrt $0 < b \leq 1$, so ist $x = \ln(b) \leq 0$, also $-\ln(b) \geq 0$. Somit ist $x = \sqrt{-\ln(b)}$ definiert und eine Lösung der Gleichung $e^{-x^2} = b$. Damit ist $b \in W_f$ und folglich $W_f =]0;1]$.
(D) $f''(x) = 2e^{-x^2} \cdot (2x^2 - 1)$,
$f'''(x) = 4xe^{-x^2} \cdot (3 - 2x^2)$
Mögliche Wendestellen: $f''(x) = 2e^{-x^2} \cdot (2x^2 - 1) = 0$.
Lösungen: $x_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.
Überprüfung: $f'''\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \pm\frac{8}{\sqrt{2e}} \neq 0$, also Wendestellen.
Es ist $f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$, also Wendpunkte
$W_{1,2}\left(\pm\sqrt{0,5} \middle| e^{-0,5}\right)$.
(E) Es gilt $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$. Also ist der Graph von f symmetrisch zur y-Achse.

10 a) $x = 1$ und $x = 5$ sind Extremstellen von f, da sie Nullstellen von f′ mit Vorzeichenwechsel sind.
- $x = 1$ ist Minimumstelle, da ein Vorzeichenwechsel von f′ von − nach + vorliegt.
- $x = 5$ ist Maximumstelle, da ein Vorzeichenwechsel von f′ von + nach − vorliegt.

b) Der Graph von f hat an der Stelle $x = 2$ die Steigung 1. Also ist an dieser Stelle der Steigungswinkel 45°.
c) Da $y = -1$ die Gleichung der waagerechten Asymptote des Graphen ist, ist $d = 1$.
Der Graph von g mit $g(x) = e^{-(x-c)^2}$ entsteht aus dem Graphen von h mit $h(x) = e^{-x^2}$ durch eine Verschiebung um c in positive x-Richtung. Die Funktion h hat als Maximumstelle $x = 0$. Da g genau wie f die Maximumstelle $x = 3$ hat, gilt $c = 3$.
Aus $f(3) = a - d = 1,5$ folgt $a = 2,5$.
Der Wert von b ergibt sich z. B. aus den Nullstellen von f:
$f(1) = 2,5 \cdot e^{-b \cdot (1-3)^2} - 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{\ln(0,4)}{4}$
$\approx 0,229$.
Man könnte den Wert von b auch grafisch ermitteln. Der Grafik entnimmt man näherungsweise $f(2) = 1$. Damit würde sich ergeben:
$f(2) = 2,5 \cdot e^{-b \cdot (2-3)^2} - 1 = 1 \Rightarrow b = -\ln\left(\frac{4}{5}\right) \approx 0,223$.

11 $f(t) = 1,5 \cdot t \cdot e^{-0,5t+1} + 37$,
$f'(t) = (1,5 - 0,75t) \cdot e^{-0,5t+1}$, $f''(t) = (-1,5 + 0,375t) \cdot e^{-0,5t+1}$,
$f'''(t) = (1,125 - 0,1875t) \cdot e^{-0,5t+1}$

a) Grafisch: Die maximale Temperatur beträgt 40 °C.
Rechnerisch:
Mögliche Extremstellen:
$f'(t) = (1{,}5 - 0{,}75t) \cdot e^{-0{,}5t+1} = 0 \Rightarrow t = 2$.
Überprüfung: $f''(2) = -0{,}75 < 0$, also Maximum $f(2) = 40$.
Nach zwei Tagen ist das Fieber maximal mit 40 °C.
b) Grafisch: Das Fieber geht nach ca. vier Tagen am stärksten zurück.
Rechnerisch:
Mögliche Wendestellen:
$f''(t) = (-1{,}5 + 0{,}375t) \cdot e^{-0{,}5t+1} = 0 \Rightarrow t = 4$.
Überprüfung: $f'''(4) = 0{,}375 \cdot e^{-1} \neq 0$, also Wendestelle.
Wegen $f'(4) = (-1{,}5) \cdot e^{-1} < 0$ liegt ein Wendepunkt mit maximaler negativer Steigung vor.
Nach vier Tagen geht das Fieber am stärksten zurück.
c) Grafisch: Man vermutet die waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = 37$ für $t \to \infty$. Langfristig nähert sich Sophies Temperatur 37 °C an.
Rechnerisch: Es gilt $1{,}5 \cdot t \cdot e^{-0{,}5t+1} \to 0$ für $t \to \infty$.
Somit gilt $f'(t) = 1{,}5 \cdot t \cdot e^{-0{,}5t+1} + 37 \to 37$ für $t \to \infty$.
d) Grafisch: Legt man mit dem Geodreieck eine Tangente an den Graphen von f im Punkt $A(4 \mid f(4))$ an, so schneidet diese Tangente die Gerade mit der Gleichung $y = 37$ etwa bei $t = 8$. Die Ausgangstemperatur 37 °C wird also nach ca. acht Tagen erreicht.
Rechnerisch: Tangentengleichung für $t = 4$:
$y = f'(4) \cdot (t - 4) + f(4)$; $f'(4) = -\frac{1{,}5}{e}$; $f(4) = \frac{6}{e} + 37$
Somit gilt $y = -\frac{1{,}5}{e} \cdot (t - 4) + \frac{6}{e} + 37 = -\frac{1{,}5}{e}t + \frac{12}{e} + 37$.
Die Tangente schneidet die Gerade $y = 37$ für
$-\frac{1{,}5}{e}t + \frac{12}{e} = 0$, also $t = 8$.
Nach acht Tagen wird die Ausgangstemperatur wieder erreicht.
e) $f'(t) = (1{,}5 - 0{,}75t) \cdot e^{-0{,}5t+1} < 0$ für $t > 2$. Somit sinkt das Fieber nach zwei Tagen ständig.
f) Die Gleichung $f(t + 1) = f(t) - 0{,}2$ beschreibt den Zeitpunkt t, zu dem die Temperatur von Sophie am folgenden Tag (d.h. in den folgenden 24 Stunden) um 0,2 °C sinkt.
g) Ansatz für Max' Fieberkurve: $g(t) = at \cdot e^{-bt+1} + 37$;
$g'(t) = a \cdot (1 - bt) \cdot e^{-bt+1} = 0$, also $t = \frac{1}{b}$. Wenn Max seine höchste Temperatur früher erreicht, so muss also $b > 0{,}5$ sein. Die maximale Temperatur ist $\frac{a}{b} + 37$. Da sie bei Max niedriger ist als bei Sophie, muss der Quotient $\frac{a}{b} < 3$ sein. Es könnte z.B. $b = 1$, $a = 2$ passen.

Seite 59

12 a) (1) $f(15) = 8$: Im Jahr 2035 rechnet man mit täglich 8000 Übernachtungen.
(2) $f'(25) = 0$ und $f''(25) < 0$: Im Jahr 2045 sind die täglichen Übernachtungszahlen maximal.
(3) „$f(27) - f(30) = 0{,}009$“: Zwischen 2047 und 2050 nimmt die tägliche Übernachtungszahl um 9 ab.
b) (4) $f'(t) < 0$ für alle $t > 25$
(5) $f(t) \to 8$ für $t \to \infty$
c) Wegen (5) muss $c > 0$ gelten (sonst $f(t) \to \infty$ für $t \to \infty$) und folglich $a \cdot (t - b) \cdot e^{-ct} \to 0$ für $t \to \infty$.
Aus (5) und $f(t) \to d$ für $t \to \infty$ folgt $d = 8$.
Aus (1) ergibt sich $f(15) = a \cdot (15 - b) \cdot e^{-15c} + 8 = 8$. Also folgt $b = 15$.
Aus (2) und $f'(t) = a \cdot e^{-ct} \cdot (bc + 1 - ct)$ folgt $bc + 1 - 25c = 0$, also $15c + 1 - 25c = 0$. Somit gilt $c = 0{,}1$.
Es ist $f(27) - f(30) = a \cdot 12 \cdot e^{-2{,}7} - a \cdot 15 \cdot e^{-3} = 0{,}009$ für
$a = \frac{0{,}009}{12e^{-2{,}7} - 15e^{-3}} \approx 0{,}151$ (vgl. (3)).

14 a) $h(1) = e^{a(b-1)} = 2 \Leftrightarrow a \cdot (b - 1) = \ln(2)$;
$h(2) = 1 \Leftrightarrow e^{a(b-4)} = 1 \Leftrightarrow a \cdot (b - 4) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 4$. Wäre $a = 0$, so wäre $h(x) = 1$ für alle x; das widerspricht $h(1) = 2$. Somit ist $b = 4$ und $a = \frac{\ln(2)}{3}$ und
$h(x) = e^{\frac{1}{3}\ln(2) \cdot (4 - x^2)}$.
b) Man kann den kompletten Berghang einsehen, wenn man den Wendepunkt sehen kann. Man muss also die Wendetangente mit der y-Achse schneiden; die Turmspitze muss auf der y-Achse oberhalb von diesem Schnittpunkt liegen.
$h(x) = e^{\frac{1}{3}\ln(2) \cdot (4 - x^2)}$, $h'(x) = \left(-\frac{2}{3}\ln(2)x\right) \cdot e^{\frac{1}{3}\ln(2) \cdot (4 - x^2)}$,
$h''(x) = \left(\frac{4}{9}(\ln(2))^2 x^2 - \frac{2}{3}\ln(2)\right) \cdot e^{\frac{1}{3}\ln(2) \cdot (4 - x^2)}$,
$h'''(x) = \left(-\frac{8}{27}(\ln(2))^3 x^3 + \frac{4}{3}(\ln(2))^2 x\right) \cdot e^{\frac{1}{3}\ln(2) \cdot (4 - x^2)}$
Mögliche Wendestellen:
$h''(x) = \left(\frac{4}{9}(\ln(2))^2 2x^2 - \frac{2}{3}\ln(2)\right) \cdot e^{\frac{1}{3}\ln(2) \cdot (4 - x^2)} = 0$
$\Rightarrow x_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2\ln(2)}} \approx \pm 1{,}471$.
Da die Gerade mit der Gleichung $y = 0$ waagerechte Asymptote ist und der Graph an der Stelle $x = 0$ einen Hochpunkt hat, muss der Graph mindestens zwei Wendepunkte haben. Also müssen x_1 und x_2 Wendestellen sein.
Alternative:
$h'''\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2\ln(2)}}\right) = \pm\frac{4}{3}\ln(2)^2\sqrt{\frac{3}{2\ln(2)}} \cdot e^{\frac{4}{3}\ln(2) - \frac{1}{2}} \neq 0$, also Wendestellen.
Bestimmung der Wendetangente in $W_1(x_1 \mid h(x_1))$:
$h'(x_1) = h'\left(\sqrt{\frac{3}{2\ln(2)}}\right) = -\sqrt{\frac{2\ln(2)}{3}} \cdot e^{\frac{4}{3}\ln(2) - \frac{1}{2}} \approx -1{,}03895$;
$h(x_1) = h\left(\sqrt{\frac{3}{2\ln(2)}}\right) = e^{\frac{4}{3}\ln(2) - \frac{1}{2}} \approx 1{,}5284$.
Gleichung der Wendetangente:
$y = h'(x_1) \cdot (x - x_1) + h(x_1)$
$= -\sqrt{\frac{2\ln(2)}{3}} \cdot e^{\frac{4}{3}\ln(2) - \frac{1}{2}} \cdot x + 2 \cdot e^{\frac{4}{3}\ln(2) - \frac{1}{2}}$
$\approx -1{,}03895x + 3{,}0567$.
Die Wendetangente schneidet die y-Achse an der Stelle $x = 0$:
$y_0 = 2 \cdot e^{\frac{4}{3}\ln(2) - \frac{1}{2}} \approx 3{,}0567$.
Die Berghöhe ist $h(0) = e^{\frac{4}{3}\ln(2)} \approx 2{,}5198$,
$y_0 - h(0) = e^{\frac{4}{3}\ln(2)} \cdot (2e^{-0{,}5} - 1) \approx 0{,}537$.
Somit muss die Turmhöhe mindestens 53,7 m betragen, damit man von der Turmspitze den gesamten Hang einsehen kann (die Augenhöhe ist hierbei in Höhe der Turmspitze).

15 a) $h(x) = 5x^2e^x$, $h'(x) = (10x + 5x^2)e^x$,
$h''(x) = (10 + 20x + 5x^2)e^x$
Mögliche Extremstellen
$h'(x) = (10x + 5x^2)e^x = 0$.
Lösungen: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$.
Überprüfung: $h''(-2) = -10e^{-2} < 0$, also Maximumstelle;
$h''(0) = 10 > 0$, also Minimumstelle.
Es ist $h(-2) = 20 \cdot e^{-2} \approx 2{,}71$. Der Deich ist ca. 2,71 m hoch über dem Land dahinter.

b) Mögliche Wendestellen:
$h''(x) = (10 + 20x + 5x^2)\,e^x = 0$.
Lösungen: $x_1 = -2 + \sqrt{2} \approx -0{,}59$, $x_2 = -2 - \sqrt{2} \approx -3{,}41$.
Überprüfung: Zwischen dem Hochpunkt und dem Tiefpunkt muss auf dem Graphen ein Wendepunkt vorliegen, ebenso muss links vom Hochpunkt ein Wendepunkt vorliegen, da der Graph für $x \to -\infty$ eine waagerechte Asymptote hat. Somit muss an den beiden möglichen Wendestellen tatsächlich ein Wendepunkt vorliegen.
Es ist $h\left(-2-\sqrt{2}\right) = 10\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)\cdot e^{-(2+\sqrt{2})} \approx 1{,}92$,
$h\left(-2+\sqrt{2}\right) = 10\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)\cdot e^{-(2-\sqrt{2})} \approx 0{,}955$.
Die steilste Stelle (Anstieg) an der Meerseite liegt im Punkt $W_1\left(-2-\sqrt{2}\,\middle|\,10\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)\cdot e^{-(2+\sqrt{2})}\right)$
$\approx W_1(-3{,}41\,|\,1{,}92)$
vor, der steilste Stelle (Gefälle) an der Landseite im Punkt $W_2\left(-2+\sqrt{2}\,\middle|\,10\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)\cdot e^{-(2-\sqrt{2})}\right) \approx W_2(-0{,}59\,|\,0{,}96)$.

c) Man kann die komplette Deichoberfläche einsehen, wenn man beide Wendepunkte einsehen kann.
Da die Landseite steiler ist, braucht man eine größere Höhe, um sie einzusehen. Die Betrachtung der Meerseite ist daher unnötig.
Wendepunkt Landseite:
$W_2\left(-2+\sqrt{2}\,\middle|\,10\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)\cdot e^{-(2-\sqrt{2})}\right)$
$\approx W_2(-0{,}5858\,|\,0{,}9551)$.
Gleichung der zugehörigen Wendetangenten:
t_2: $y = h'\left(-2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(x+2-\sqrt{2}\right) + h\left(-2+\sqrt{2}\right)$
$= \left[\left(1-\sqrt{2}\right)x + \left(7-5\sqrt{2}\right)\right]\cdot 10\cdot e^{-(2-\sqrt{2})}$
$\approx -2{,}3058x - 0{,}3956$.
Schnitt der Wendetangente t_2 mit der Geraden $x = -2$ durch den Hochpunkt:
$y_2 = \left(5-3\sqrt{2}\right)\cdot 10\cdot e^{-(2-\sqrt{2})} \approx 4{,}2160$.
Höhe über der Deichspitze:
$\left(5-3\sqrt{2}\right)\cdot 10\cdot e^{-(2-\sqrt{2})} - 20\cdot e^{-2} \approx 4{,}2160 - 2{,}7067 = 1{,}5093$.
Die Augenhöhe einer Person muss mindestens ca. 1,51 m betragen, damit sie die Deichoberfläche auf der Landseite und damit die gesamte Deichoberfläche einsehen kann.

16 $f'(x) = e^x\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = e^x\cdot\frac{x-1}{x^2}$, $f''(x) = e^x\cdot\left(\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)$
Mögliche Extremstelle: $f'(x) = e^x\cdot\frac{x-1}{x^2} = 0$.
Lösung: $x = 1$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle: $f''(1) = 2e > 0$, also Minimumstelle.
Es ist $f(1) = e$, also $T(1\,|\,e)$.

17 **a)** Die Substitution $u = ax$ führt zu $x\cdot e^{-ax} = \frac{1}{a}\cdot u\cdot e^{-u}$. Bei $a > 0$ gilt mit $x \to \infty$ auch $u \to \infty$.
Nach dem Beweis von Seite 56 im Schulbuch folgt dann $\lim\limits_{u\to+\infty}(u\cdot e^{-u}) = 0$. Somit gilt auch
$\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\cdot u\cdot e^{-u}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot e^{-ax}) = 0$.

b) Man ergänzt die Tabelle von Seite 56 um eine weitere Zeile: vgl. Tabelle unten.
Zeile (3) ergibt sich aus dem Hilfssatz von Seite 56. Nach der Folgerung in Zeile (3) ergibt sich
$e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ für alle $x > 0$.

c) Im Folgenden sei mit $f_n(x)$ bzw. $g_n(x)$ der Funktionsterm von f bzw. g in Zeile (n) der Tabelle unten bezeichnet. Die Zeilen ab $n = 4$ sind in der Tabelle nicht dargestellt.
Der Funktionsterm von g in Zeile (4) der Tabelle ist
$g_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4$, denn dann gilt
$g_4'(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$. Das ist genau der Term $g_3(x)$ von Zeile (3).
Der Term $g_n(x)$ von Zeile (n) ist so gebaut, dass $g_n'(x)$ der Term $g_{n-1}(x)$ von Zeile $(n-1)$ ist. Somit steht in Zeile (n) $g_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$,
denn dann gilt $g_n'(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$.
Das ist der Term $g_{n-1}(x)$ in Zeile $(n-1)$. In Zeile $(n-1)$ wurde für alle $x > 0$ gefolgert:
$e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} = g_n'(x)$.
Aus dem Hilfssatz von Seite 56 und $f(0) = g_n(0) = 1$ ergibt sich jetzt
$e^x > g_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$
für alle $x > 0$.

d) Aus $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{1}{n!}x^n$ folgt durch Division mit $x^{n-1} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$:
$\frac{e^x}{x^{n-1}} > \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{n-3}} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}x$
In dieser Summe strebt der letzte Summand gegen ∞ für $x \to \infty$. Also strebt auch die ganze Summe gegen ∞. Es folgt $\frac{e^x}{x^{n-1}} \to \infty$ für $x \to \infty$. Der Kehrwert $\frac{x^{n-1}}{e^x} = x^{n-1}\cdot e^{-x}$ strebt also gegen 0 für $x \to +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$

e) Mit der Substitution $z = -x$ ergibt sich $x^{n-1}\cdot e^x = (-z)^{n-1}\cdot e^{-z}$.
Je nachdem, ob $n-1$ gerade oder ungerade ist, gilt $(-z)^{n-1}\cdot e^{-z} = \pm z^{n-1}\cdot e^{-z}$.
Für $x \to -\infty$ gilt $z = -x \to +\infty$. Also folgt nach Teilaufgabe d)
$\pm z^{n-1}\cdot e^{-z} \to 0$. Somit gilt auch $\lim\limits_{x\to\infty}(x^{n-1}\cdot e^x) = 0$.

Tabelle zu Aufgabe 17 auf Seite 59

	f(x)	f(0)	f′(x)	g(x)	g(0)	g′(x)	Folgerung
(1)	e^x	1	e^x	$1+x$	1	1	$e^x > 1 + x$ für alle $x > 0$, denn $f(0) = g(0)$ und $f'(x) > g'(x)$ für alle $x > 0$
(2)	e^x	1	e^x	$1+x+\frac{1}{2}x^2$	1	$1+x$	$e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ für alle $x > 0$, denn $f(0) = g(0)$ und nach (1) $f'(x) > g'(x)$ für alle $x > 0$
(3)	e^x	1	e^x	$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$	1	$1+x+\frac{1}{2}x^2$	$e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ für alle $x > 0$, denn $f(0) = g(0)$ und nach (2) $f'(x) > g'(x)$ für alle $x > 0$

18 a) Die Tabelle zeigt die Werte von
$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ für wachsendes n.

n	3	4	5	6
$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$	2,6667	2,708 33	2,716 67	2,718 06

n	7	8	9	10
$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$	2,718 25	2,718 279	2,718 281 5	2,718 281 80

Da $e = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$ ist, erkennt man, dass ab $n = 10$ bereits sieben Dezimalen übereinstimmen.
b) Für $n = 50\,000\,000$ ergibt sich mit dem WTR $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718\,281\,801$, also eine Übereinstimmung auf sieben Dezimalen. Für $n = 45\,000\,000$ ergibt sich $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718\,279\,08$, also noch keine Übereinstimmung auf sieben Dezimalen. Dabei treten allerdings Rundungsfehler auf. Man erhält unterschiedliche Näherungen.
c) Wie in Teilaufgabe a) beschrieben, nähert sich $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ sehr schnell der Zahl e an. Man muss für sieben Dezimalen nur bis $n = 10$ rechnen. Allerdings muss man zur Berechnung für $n = 10$ bereits den Wert für $n = 9$ berechnet haben. Man kann also nur schrittweise vorgehen.
Dagegen nähert sich $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nur sehr langsam der Zahl e an. Allerdings erhält man durch Einsetzen von hohen Werten von n (z.B. $n = 100\,000\,000$) sofort einen Näherungswert von e; man muss keine Vorgängerwerte berechnet haben. Mit dem Taschenrechner entstehen dabei aber je nach dessen Leistungsfähigkeit hohe Rundungsungenauigkeiten.

4 Exponentialfunktionen mit Parameter

Seite 60

Einstiegsaufgabe
Aus $f_k(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(k+3) = \frac{1}{2}(k+4)$ ergibt sich für Graph A: $\frac{1}{2}(k+4) = 1{,}5$, also $k = -1$.
Für Graph B ergibt sich $\frac{1}{2}(k+4) = 2$, also $k = 0$.
Für Graph C ergibt sich $\frac{1}{2}(k+4) = 2{,}5$, also $k = 1$.
Für Graph D ergibt sich $\frac{1}{2}(k+4) = 3$, also $k = 2$.

Seite 61

1 a) $f_4(x) = 4e^x - 4x$, $f_{-2}(x) = -2e^x + 2x$
b) $f_3(2) = 3e^2 - 6$, $f_2(3) = 2e^3 - 6$

2 a) $f_3(x) = e^x - 3$, $f_{-2}(x) = e^x + 2$, $f_0(x) = e^x$
b) Eine Erhöhung von a bewirkt eine Verschiebung des Graphen nach unten.
c) Für $x \to -\infty$ gilt $f_a(x) \to -a$. Außerdem gilt $f_a(0) = 1 - a$.
Somit ergibt sich:

Graph	A	B	C	D
Wert des Parameters a	0	1	1,5	2

d) $f_a'(x) = e^x$

3 Zur Funktion g gehört $b = 0{,}5$.
Zur Funktion h gehört $b = -5$.
Zur Funktion i gehört $b = -e$.
Zur Funktion j gehört $b = 0$.
Zur Funktion k gehört $b = 0{,}1$.
Zur Funktion l gehört $b = -\frac{1}{2}$.

4 a) $g_k'(x) = 2ke^{2kx}$, $g_k''(x) = 4k^2e^{2kx}$
b) $g_k'(x) = 6kx \cdot e^{kx^2}$, $g_k''(x) = 6k \cdot (1 + 2kx^2) \cdot e^{kx^2}$
c) $g_k'(x) = ke^{kx}$, $g_k''(x) = k^2e^{kx}$
d) $g_k'(x) = k \cdot e^{2x} \cdot (1 + 2x)$, $g_k''(x) = 4ke^{2x} \cdot (1 + x)$

5 a) (1) $h_b(2) = e^{2b} = 5 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \cdot \ln(5)$
(2) $h_b'(x) = be^{bx}$; $h_b'(0) = b = 1$
b) (1) $h_b(2) = 2 \cdot e^{-2b} = 5 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{5}{2}\right)$
(2) $h_b(x) = x \cdot e^{-bx}$; $h_b'(x) = (1 - bx) \cdot e^{-bx}$; $h_b'(0) = 1$ gilt für alle $b \in \mathbb{R}$.
c) (1) $h_b(2) = (b^2 - 2) \cdot e^2 = 5 \Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{5}{e^2} + 2}$
(2) $h_b(x) = (b^2 - x) \cdot e^x$; $h_b'(x) = (b^2 - x - 1) \cdot e^x$;
$h_b'(0) = b^2 - 1 = 1 \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$

Seite 62

8 a) Die Graphen haben die Gerade mit der Gleichung $y = b$ als waagerechte Asymptote. Somit gehört $b = -2$ zu Graph A, $b = 2$ zu Graph B, $b = 0{,}5$ zu Graph C und $b = -0{,}5$ zu Graph D.
b) Erhöht man b, so verschiebt sich der Graph nach oben und nach rechts.
c) Der Graph hat im Punkt $P_b(a \mid f_b(a))$ den Steigungswinkel 60°, wenn $f_b'(a) = \tan(60°) = \sqrt{3}$ gilt. Wegen $f_b'(x) = e^{x-b}$ folgt $e^{a-b} = \sqrt{3}$ bzw. $a = \ln(\sqrt{3}) + b$. Somit ergibt sich $P_b(\ln(\sqrt{3}) + b \mid \sqrt{3} + b)$

9 $f_k(t) = 8 - 2e^{-kt}$, $f_k'(t) = 2ke^{-kt}$
a) $8 - 2e^{-3k} = 7 \Rightarrow k = \frac{1}{3}\ln(2) \approx 0{,}231$
b) $f_k'(0) = 2k = 0{,}25 \Rightarrow k = 0{,}125$
c) $f_k(t) \to 8$ für $t \Rightarrow \infty$; man erwartet langfristig 8000 Ameisen.
d) Die Lösung t der Gleichung $f_k(t+1) - f_k(t) = 0{,}1$ ist ein Zeitpunkt, zu dem der Ameisenbestand in der Folgewoche um 100 zunimmt. Die Lösung t der Gleichung $f_k'(t) = 0{,}1$ ist ein Zeitpunkt, an dem die momentane Änderungsrate der Ameisenzahl 100 Ameisen pro Woche beträgt.

10 a) $h_c'(x) = e^{c+x} \cdot (x+1)$. Die Steigung des Graphen von h_c im Ursprung beträgt $h_c'(0) = e^c$.
b) Mit wachsendem c nimmt die Steigung des Graphen von h_c im Ursprung zu.
Daher gehört zu Graph A mit der geringsten Steigung im Ursprung der kleinste Parameter $c = 0$. Analog gehört zu B der Parameter $c = 0{,}5$, zu C der Parameter $c = 1$ und zu D der Parameter $c = 1{,}5$.

c) Alle Graphen haben einen Tiefpunkt bei $x = -1$.
Die Gerade mit der Gleichung $y = 0$ (x-Achse) ist waagerechte Asymptote für $x \to -\infty$.
Alle Graphen verlaufen durch den Ursprung.
Alle Graphen haben einen Wendepunkt bei etwa $x = -2$.
Die Funktionswerte streben für $x \to +\infty$ gegen ∞.
Eine Erhöhung von c bewirkt, dass die Graphen im Ursprung steiler werden. Der Tiefpunkt verschiebt sich auf der Geraden mit Gleichung $x = -1$ in negative y-Richtung (nach unten). Der Wendepunkt verschiebt sich auf der Geraden mit Gleichung $x = -2$ in negative y-Richtung (nach unten). Die Graphen werden in y-Richtung gestreckt.
d) Ableitungen: $h_c'(x) = e^{c+x} \cdot (x+1)$; $h_c''(x) = e^{c+x} \cdot (x+2)$
Mögliche Extremstellen: $h_c'(x) = e^{c+x} \cdot (x+1) = 0$
$\Rightarrow x = -1$.
Überprüfung: $h_c''(-1) = e^{c-1} > 0$, also Minimumstelle.
$h_c(-1) = -e^{c-1}$, also $T_c(-1 \mid -e^{c-1})$.

11 a) $f_k(x) = e^x - kx$, $f_k'(x) = e^x - k$, $f_k''(x) = e^x$
Mögliche Extremstellen: $f_k'(x) = e^x - k = 0 \Rightarrow x = \ln(k)$.
Überprüfung: $f_k''(\ln(k)) = k > 0$, also Minimumstelle.
$f_k(\ln(k)) = k \cdot (1 - \ln(k))$, also $T_k(\ln(k) \mid k \cdot (1 - \ln(k)))$.
Der Tiefpunkt liegt auf der y-Achse für $\ln(k) = 0$, also $k = 1$.
Der Tiefpunkt liegt auf der x-Achse für $k \cdot (1 - \ln(k)) = 0$, also $k = e$.
b) $f_k(x) = (x-k) \cdot e^{x-k}$, $f_k'(x) = (x-k+1) \cdot e^{x-k}$,
$f_k''(x) = (x-k+2) \cdot e^{x-k}$
Mögliche Extremstellen: $f_k'(x) = (x-k+1) \cdot e^{x-k} = 0$
$\Rightarrow x = k - 1$.
Überprüfung: $f_k''(k-1) = e^{-1} > 0$, also Minimumstelle.
$f_k(k-1) = -e^{-1}$, also $T_k\left(k-1 \,\middle|\, -\frac{1}{e}\right)$.
Der Tiefpunkt liegt auf der y-Achse für $k - 1 = 0 \to k = 1$.
Der Tiefpunkt liegt für keinen Wert des Parameters k auf der x-Achse.
c) $f_k(x) = e^{x \cdot (x-k+4)} = e^{x^2-kx+4x}$,
$f_k'(x) = (2x - k + 4) \cdot e^{x^2-kx+4x}$,
$f_k''(x) = (2 + (2x-k+4)^2) \cdot e^{x^2-kx+4x}$
Mögliche Extremstellen:
$f_k'(x) = (2x-k+4) \cdot e^{x^2-kx+4x} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}k - 2$.
Überprüfung: $f_k''\left(\frac{1}{2}k - 2\right) = 2 \cdot e^{-\left(\frac{1}{2}k-2\right)^2} > 0$, also Minimumstelle.
$f_k\left(\frac{1}{2}k - 2\right) = e^{-\left(\frac{1}{2}k-2\right)^2}$, also $T_k\left(\frac{1}{2}k - 2 \,\middle|\, e^{-\left(\frac{1}{2}k-2\right)^2}\right)$.
Der Tiefpunkt liegt auf der y-Achse für $\frac{1}{2}k - 2 = 0$, also $k = 4$.
Der Tiefpunkt liegt für keinen Wert des Parameters k auf der x-Achse.
d) $g_a(x) = e^x - x + a$, $g_a'(x) = e^x - 1$, $g_a''(x) = e^x$
Mögliche Extremstellen: $g_a'(x) = e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$.
Überprüfung: $g_a''(0) = 1 > 0$, also Minimumstelle.
$g_a(0) = 1 + a$, also $T_a(0 \mid 1 + a)$.
Der Tiefpunkt liegt für jeden Wert des Parameters a auf der y-Achse.
Der Tiefpunkt liegt auf der x-Achse für $a = -1$.
e) $g_a(x) = (x-a)e^x + 1$, $g_a'(x) = (x-a+1)e^x$,
$g_a''(x) = (x-a+2)e^x$
Mögliche Extremstellen:
$g_a'(x) = (x-a+1)e^x = 0 \Rightarrow x = a - 1$.
Überprüfung: $g_a''(a-1) = e^{a-1} > 0$, also Minimumstelle.
$g_a(a-1) = -e^{a-1} + 1$, also $T_a(a-1 \mid -e^{a-1} + 1)$.
Der Tiefpunkt liegt auf der y-Achse für $a = 1$.
Der Tiefpunkt liegt auf der x-Achse für $a = 1$.
f) $g_a(x) = e^{x+a} - e^3x$, $g_a'(x) = e^{x+a} - e^3$, $g_a''(x) = e^{x+a}$
Mögliche Extremstellen: $g_a'(x) = e^{x+a} - e^3 = 0$
$\Rightarrow x = 3 - a$.
Überprüfung: $g_a''(3-a) = e^3 > 0$, also Minimumstelle.
$g_a(3-a) = e^3 \cdot (a-2)$, also $T_a(3 - a \mid e^3 \cdot (a-2))$.
Der Tiefpunkt liegt auf der y-Achse für $a = 3$
Der Tiefpunkt liegt auf der x-Achse für $a = 2$
g) $h_b(x) = xe^{bx} + 2$ $(b \neq 0)$, $h_b'(x) = e^{bx} \cdot (1 + xb)$,
$h_b''(x) = b \cdot e^{bx} \cdot (2 + xb)$
Mögliche Extremstellen: $h_b'(x) = e^{bx} \cdot (1 + xb) = 0$
$\Rightarrow x = -\frac{1}{b}$.
Überprüfung: $h_b''\left(-\frac{1}{b}\right) = b \cdot e^{-1} = \frac{b}{e} < 0$. Für $b > 0$ ergibt sich eine Minimumstelle, für $b < 0$ eine Maximumstelle.
$h_b\left(-\frac{1}{b}\right) = 2 - \frac{1}{be}$, also $T_b\left(-\frac{1}{b} \,\middle|\, 2 - \frac{1}{be}\right)$ (falls $b > 0$) bzw. $H_b\left(-\frac{1}{b} \,\middle|\, 2 - \frac{1}{be}\right)$ (falls $b < 0$).
Der Tief- bzw. Hochpunkt liegt für keinen Wert von b auf der y-Achse.
Der Tiefpunkt liegt auf der x-Achse für $b = \frac{1}{2e}$.
Der Hochpunkt liegt für kein $b < 0$ auf der x-Achse, da dann $2 - \frac{1}{be} > 0$ gilt.
h) $h_b(x) = be^{x-b} - x + b$, $h_b'(x) = be^{x-b} - 1$, $h_b''(x) = be^{x-b}$
Mögliche Extremstellen: $h_b'(x) = be^{x-b} - 1 = 0$
$\Rightarrow x = b - \ln(b)$ (für $b \leq 0$ keine Extremstellen möglich).
Überprüfung: $h_b''(b - \ln(b)) = 1 > 0$, also Minimumstelle.
$h_b(b - \ln(b)) = 1 + \ln(b)$, also $T_b(b - \ln(b) \mid 1 + \ln(b))$ für $b > 0$.
Der Tiefpunkt liegt für kein $b > 0$ auf der y-Achse, da $x > \ln(x)$ für alle $x > 0$ gilt.
Der Tiefpunkt liegt auf der x-Achse für $b = \frac{1}{e}$.
i) $h_b(x) = -bx - e^{-bx} + b$, $h_b'(x) = -b + be^{-bx}$,
$h_b''(x) = -b^2 \cdot e^{-bx}$
Mögliche Extremstellen: $h_b'(x) = -b + be^{-bx} = 0 \Rightarrow x = 0$.
Überprüfung: $h_b''(0) = -b^2 < 0$, also Maximumstelle für $b \neq 0$.
$h_b(0) = b - 1$, also $H_b(0 \mid b - 1)$ für $b \neq 0$.
Der Hochpunkt liegt auf der y-Achse für alle $b \neq 0$.
Der Hochpunkt liegt auf der x-Achse für $b = 1$.

12 $f_k(x) = x \cdot e^{-kx}$ $(k \neq 0)$,
$f_k'(x) = e^{-kx} \cdot (1 - kx)$, $f_k''(x) = k \cdot e^{-kx} \cdot (kx - 2)$,
$f_k'''(x) = k^2 \cdot e^{-kx} \cdot (3 - kx)$
Mögliche Extremstellen: $f_k'(x) = e^{-kx} \cdot (1 - kx) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{k}$
Überprüfung: $f_k''\left(\frac{1}{k}\right) = -\frac{k}{e} < 0$ für $k > 0$, also Maximumstelle; $f_k''\left(\frac{1}{k}\right) = -\frac{k}{e} > 0$ für $k < 0$, also Minimumstelle
$f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{ek}$, also $H_k\left(\frac{1}{k} \,\middle|\, \frac{1}{ek}\right)$ für $k > 0$ und $T_k\left(\frac{1}{k} \,\middle|\, \frac{1}{ek}\right)$ für $k < 0$.

Mögliche Wendestellen:
$f_k''(x) = k \cdot e^{-kx} \cdot (kx - 2) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{k}$.
Überprüfung: $f_k'''\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{k^2}{e^2} \neq 0$, also Wendestelle.
$f_k\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{2}{e^2 k}$, also $W_k\left(\frac{2}{k} \middle| \frac{2}{e^2 k}\right)$.

13 $f_k(t) = 10t \cdot e^{-kt}$, $f_k'(t) = 10e^{-kt} \cdot (1 - kt)$,
$f_k''(t) = 10ke^{-kt} \cdot (kt - 2)$, $f_k'''(t) = 10k^2e^{-kt} \cdot (3 - kt)$
a) Extremstellen von f_k: $f_k'(t) = 10e^{-kt} \cdot (1 - kt) = 0$.
Lösung: $t = \frac{1}{k}$.
Überprüfung: $f_k''\left(\frac{1}{k}\right) = -\frac{10k}{e} < 0$, also Maximumstelle.
Man liest aus dem Graphen ab: $t = 2$, also $k = 0{,}5$.
b) Die maximale Verkaufszahl ist $f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{10}{ke}$ (in 100 E-Bikes). Sie beträgt 1000 E-Bikes, wenn $\frac{10}{ke} \leq 10$ ist, also für $k \geq \frac{1}{e}$.
c) Mögliche Wendestellen: $f_k''(t) = 10ke^{-kt} \cdot (kt - 2) = 0$.
Lösung: $t = \frac{2}{k}$.
Überprüfung: $f_k'''\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{10k^2}{e^2} \neq 0$, also Wendestelle.
Die monatlichen Verkaufszahlen nehmen im Monat $\frac{2}{k}$ am stärksten ab.
Das Zeitintervall von der Markteinführung bis zum Erreichen der maximalen monatlichen Verkaufszahl beträgt $\frac{1}{k}$ Monate.
Das Zeitintervall von der Markteinführung bis zur stärksten Abnahme der Verkaufszahlen beträgt $\frac{2}{k}$ Monate, ist also doppelt so lang.
d) Die Lösung t der Gleichung $f_k(3 + t) = 0{,}8 \cdot f_k(t)$ ist der Zeitpunkt t, zu dem die monatlichen Verkaufszahlen im folgenden Vierteljahr um 20% abnehmen.

Seite 63

14 $h_a(x) = 100a^2x^2e^{-ax}$ $(a > 0)$,
$h_a'(x) = 100a^2e^{-ax}(-ax^2 + 2x)$,
$h_a''(x) = 100a^2e^{-ax}(a^2x^2 - 4ax + 2)$,
$h_a'''(x) = 100a^3e^{-ax}(-a^2x^2 + 6ax - 6)$
a) Mögliche Extremstellen:
$h_a'(x) = 100a^2xe^{-ax}(2 - ax) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{a}$.
Überprüfung: $h_a''\left(\frac{2}{a}\right) = 100a^2e^{-2} \cdot (-2) < 0$, also Maximumstelle; $h_a''(0) = 200a^2 > 0$, also Minimumstelle
$h_a\left(\frac{2}{a}\right) = 400e^{-2} = \frac{400}{e^2} \approx 54{,}134$
Die Höhe des höchsten Punkts der Bahn ist unabhängig von a ca. 54,1 m.
b) $h_a'(x) = 100a^2xe^{-ax}(2 - ax)$ ist negativ für $x > \frac{2}{a}$.
Also fällt die Bahn ständig ab für $x > \frac{2}{a}$.
c) Die Auffahrt ist im Wendepunkt am steilsten.
Mögliche Wendestellen:
$h_a''(x) = 100a^2e^{-ax}(a^2x^2 - 4ax + 2) = 0 \Rightarrow x_{3;4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{a}$.
Nur $x_3 = \frac{2 - \sqrt{2}}{a}$ kommt als Wendestelle in der Auffahrt infrage, da $x_3 < \frac{2}{a}$ und $x_4 > \frac{2}{a}$ gilt und $\frac{2}{a}$ die Maximumstelle ist.

Überprüfung:
$h_a'''\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{a}\right) = 100a^3e^{\sqrt{2}-2}\left(-(2 - \sqrt{2})^2 + 6(2 - \sqrt{2}) - 6\right)$
$= -200 \cdot \sqrt{2} \cdot t^3 e^{\sqrt{2}-2} < 0$, also Wendestelle.
(Alternative ohne Verwendung von h_a''': Die Ableitungsfunktion h_a' mit $h_a'(x) = 100a^2xe^{-ax}(2 - ax)$ ist positiv für $0 < x < \frac{2}{a}$ und $h_a'(0) = h_a'\left(\frac{2}{a}\right) = 0$. Somit muss zwischen 0 und $\frac{2}{a}$ eine Maximumstelle von h_a' vorliegen.)
Größte Steigung der Auffahrt:
$h_a'\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{a}\right) = 100a(2 - \sqrt{2})\sqrt{2}e^{\sqrt{2}-2}$
Die Steigung ist maximal 70%, wenn
$100a(2 - \sqrt{2})\sqrt{2}e^{\sqrt{2}-2} \leq 0{,}7$ gilt.
Dies ist der Fall für $a \leq \frac{0{,}7}{100(2 - \sqrt{2})\sqrt{2}e^{\sqrt{2}-2}} \approx 0{,}015179$.

17 $q_k(x) = 1 - e^{-kx^2}$, $q_k'(x) = 2kxe^{-kx^2}$,
$q_k''(x) = 2ke^{-kx^2}(1 - 2kx^2)$, $q_k'''(x) = 4k^2xe^{-kx^2}(2kx^2 - 3)$
a) Die steilste Stelle liegt im Wendepunkt vor.
Mögliche Wendestellen: $q_k''(x) = 2ke^{-kx^2}(1 - 2kx^2) = 0$
$\Rightarrow x_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2k}}$ $(k > 0)$.
Überprüfung: $q_k'''\left(\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = -12k^2\sqrt{\frac{1}{2k}}e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$, also Wendestelle.
Steigung im Wendepunkt: $q_k'\left(\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = \sqrt{\frac{2k}{e}} \leq 0{,}1$
$\Rightarrow k \leq 0{,}005 \cdot e \approx 0{,}0136$.
b) Die Augen von Ben bewegen sich auf der Geraden mit Gleichung $y = 1{,}17$ (1 LE entspricht 10 m). Ben kann den Kanal komplett einsehen, wenn er den Wendepunkt mit negativem x-Wert sehen kann. Man muss also die Wendetangente mit der Geraden mit der Gleichng $y = 1{,}17$ schneiden.
Wendetangente: $x = -\sqrt{\frac{1}{2k}}$,
$q_k'\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = -\sqrt{\frac{2k}{e}}$, $q_k\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$
Tangentengleichung:
$y = q_k'\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{1}{2k}}\right) + q_k\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = -\sqrt{\frac{2k}{e}} \cdot x + 1 - \frac{2}{\sqrt{e}}$.
Schnitt der Wendetangente mit der Geraden mit der Gleichung $y = 1{,}17$:
$-\sqrt{\frac{2k}{e}} \cdot x + 1 - \frac{2}{\sqrt{e}} = 1{,}17 \rightarrow x = -\left(\frac{2}{\sqrt{e}} + 0{,}17\right) \cdot \sqrt{\frac{e}{2k}}$.
Wenn Ben bei $x = -\left(\frac{2}{\sqrt{e}} + 0{,}17\right) \cdot \sqrt{\frac{e}{2k}}$ steht, kann er den leeren Kanal komplett einsehen.

18 **a)** Es ist $g_{a,b}(-x) = -ax \cdot e^{-b(-x)^2} = -g_{a,b}(x)$. Also sind alle Graphen von $g_{a,b}$ punktsymmetrisch zum Ursprung. Alle Graphen haben wegen $b > 0$ die waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$.
b) $g_{a,b}(x) = ax \cdot e^{-bx^2}$,
$g_{a,b}'(x) = a(1 - 2bx^2) \cdot e^{-bx^2}$,
$g_{a,b}''(x) = a(-3 + 2bx^2) \cdot 2bxe^{-bx^2}$,
$g_{a,b}'''(x) = a(-3 + 12bx^2 - 4b^2x^4) \cdot 2be^{-bx^2}$
Mögliche Extremstellen: $g_{a,b}'(x) = a(1 - 2bx^2) \cdot e^{-bx^2} = 0$
$\Leftrightarrow 1 - 2bx^2 = 0 \Rightarrow x_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2b}}$.

Überprüfung:
$g''_{a,b}\left(\sqrt{\frac{1}{2b}}\right) = a(-3+1)\cdot 2b\sqrt{\frac{1}{2b}}\cdot e^{-\frac{1}{2}} = -2a\cdot\sqrt{\frac{2b}{e}}$.
Für $a > 0$ liegt bei $x = \sqrt{\frac{1}{2b}}$ eine Maximumstelle vor, für $a < 0$ eine Minimumstelle. Für $a = 0$ liegt die Nullfunktion vor; dieser Fall wird nicht weiter untersucht.
$g''_{a,b}\left(-\sqrt{\frac{1}{2b}}\right) = 2a\cdot\sqrt{\frac{2b}{e}}$. Für $a < 0$ liegt bei $x = -\sqrt{\frac{1}{2b}}$ eine Maximumstelle vor, für $a > 0$ eine Minimumstelle.
$g_{a,b}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2b}}\right) = \pm a\sqrt{\frac{1}{2b}}\cdot e^{-\frac{1}{2}} = \pm\frac{a}{\sqrt{2be}}$,
also Extrempunkt $E\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2b}}\,\middle|\,\pm\frac{a}{\sqrt{2be}}\right)$.
Mögliche Wendestellen:
$g''_{a,b}(x) = a(-3+2bx^2)\cdot 2bxe^{-bx^2} = 0 \Rightarrow x_3 = 0$
oder $-3+2bx^2 = 0 \Rightarrow x_{4;5} = \pm\sqrt{\frac{3}{2b}}$.
Überprüfung: $g'''_{a,b}(0) = -6ab \neq 0$ für $a \neq 0$, also Wendestelle.
$g'''_{a,b}\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2b}}\right) = 12abe^{-\frac{3}{2}}$ für $a \neq 0$, also Wendestellen.
$g_{a,b}(0) = 0$, also $W_1(0\,|\,0)$.
$g_{a,b}\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2b}}\right) = \pm\sqrt{\frac{3}{2a}}\cdot e^{-\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2ae^3}}$,
also $W_{2;3}\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2a}}\,\middle|\,\pm\sqrt{\frac{3}{2ae^3}}\right)$.

c) Eine Erhöhung von a bei konstantem b bewirkt eine Streckung des Graphen in y-Richtung.
Eine Erhöhung von b bei konstantem a bewirkt, dass die x- und y-Koordinaten der Extrempunkte beide betragsmäßig kleiner werden, sie rücken näher an den Ursprung heran. Der Graph wird in x- und y-Richtung gestaucht.
Wenn beide Parameter erhöht werden, liegt zumindest eine Stauchung des neuen Graphen in x-Richtung vor (vgl. x-Koordinate der Extrempunkte). Ob auch eine Streckung/Stauchung des neuen Graphen in y-Richtung vorliegt, hängt von dem Verhältnis der Änderung bei der y-Koordinate $\frac{a}{\sqrt{2be}}$ ab.

d) Graph A hat im Ursprung die Steigung +1, also
$g'_{a,b}(0) = a = 1$. Der Hochpunkt liegt bei $\sqrt{\frac{1}{2b}} = 1$,
also $b = \frac{1}{2}$.
Graph B hat im Ursprung die Steigung +1, also
$g'_{a,b}(0) = a = 1$. Der Hochpunkt liegt bei $\sqrt{\frac{1}{2b}} = 0{,}5$,
also $b = 2$.
Graph C hat im Ursprung die Steigung +1, also
$g'_{a,b}(0) = a = 1$. Der Hochpunkt liegt bei $\sqrt{\frac{1}{2b}} = 0{,}25$,
also $b = 8$.
Graph D hat im Ursprung die Steigung −2, also
$g'_{a,b}(0) = a = -2$. Der Tiefpunkt liegt bei $\sqrt{\frac{1}{2b}} = 0{,}25$,
also $b = 8$.

19 $f_a(x) = x - e^{ax}$, $f'_a(x) = 1 - ae^{ax}$,
$f''_a(x) = -a^2e^{ax}$
Mögliche Extremstellen:
$f'_a(x) = 1 - ae^{ax} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a}\cdot\ln\left(\frac{1}{a}\right)$.
Überprüfung: $f''_a\left(\frac{1}{a}\cdot\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right) = -a < 0$, also Maximumstelle.
Es ist $f_a\left(\frac{1}{a}\cdot\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right) = x - e^{ax} = e^{ax}\cdot(xe^{-ax} - 1)$. Für $x \to +\infty$ strebt $xe^{-ax} - 1$. gegen −1 und e^{ax} gegen ∞. Also strebt $f_a(x)$ gegen $-\infty$. Für $x \to -\infty$ strebt e^{ax} gegen 0, also strebt $f_a(x) = x - e^{ax}$ gegen $-\infty$; genauer nähert sich der Graph von f_a der 1. Winkelhalbierenden mit der Gleichung $y = x$ an (man nennt die 1. Winkelhalbierende in diesem Fall eine schiefe Asymptote).

5 Die Umkehrfunktion

Seite 64

Einstiegsaufgabe
Die Kärtchen, auf denen jeweils die Umkehraufgabe des anderen Kärtchens steht, sind zu Paaren geordnet:
A ↔ J, B ↔ H, C ↔ K, D ↔ E, F ↔ N, G ↔ M, I ↔ L und O ↔ P.

Seite 65

1 **a)** 1. $y = x - 4{,}5$
2. $x = y + 4{,}5$
3. $y = x + 4{,}5$
4. $\bar{f}(x) = x + 4{,}5$

b) 1. $y = \frac{1}{7}x$
2. $x = 7y$
3. $y = 7x$
4. $\bar{f}(x) = 7x$

c) 1. $y = 3x - 4$
2. $x = \frac{1}{3}(y + 4)$
3. $y = \frac{1}{3}(x + 4)$
4. $\bar{f}(x) = \frac{1}{3}(x + 4)$

d) 1. $y = -5x + 3$
2. $x = -\frac{1}{5}(y - 3)$
3. $y = -\frac{1}{5}(x - 3)$
4. $\bar{f}(x) = -\frac{1}{5}(x - 3)$

2 **a)** 1. $y = (4x - 3)^2$; $D_f = [0{,}75; \infty[$
2. $x = \frac{1}{4}\cdot(\sqrt{y} + 3)$ oder $x = \frac{1}{4}\cdot(-\sqrt{y} + 3)$
Da $D_f = [0{,}75; \infty[$ ist, gilt $x = \frac{1}{4}\cdot(\sqrt{y} + 3)$.
3. $y = \frac{1}{4}\cdot(\sqrt{x} + 3)$
4. $\bar{f}(x) = \frac{1}{4}\cdot(\sqrt{x} + 3)$

b) 1. $y = \frac{1}{3}\cdot(x - 1)^2 + 3$; $D_f = [1; \infty[$
2. $x = \sqrt{3y - 9} + 1$ oder $x = -\sqrt{3y - 9} + 1$
Da $D_f = [1; \infty[$ ist, gilt $x = \sqrt{3y - 9} + 1$.
3. $y = \sqrt{3x - 9} + 1$
4. $\bar{f}(x) = \sqrt{3x - 9} + 1$

c) 1. $y = x^3$; $D_f = [0; \infty[$
2. $x = \sqrt[3]{y}$
3. $y = \sqrt[3]{x}$
4. $\bar{f}(x) = \sqrt[3]{x}$

3 **a)** $D_{\bar{f}} = [3{,}5; \infty[$
b) $D_{\bar{f}} =]0{,}4; \infty[$
c) $D_{\bar{f}} = \mathbb{R} = \left]-\infty; \frac{3}{7}\right[$
d) $D_{\bar{f}} = \mathbb{R} =]-\infty; \infty[$
e) $D_{\bar{f}} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}$
f) $D_{\bar{f}} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\cdot\ln(5)\right\}$

Seite 66

4 **a)** Die maximale Definitionsmenge ist $D_f = [0{,}4; \infty[$.
1. $y = \sqrt{5x - 2}$
2. $x = \frac{1}{5}\cdot(y^2 + 2)$

3. $y = \frac{1}{5} \cdot (x^2 + 2)$

4. $\bar{f}(x) = \frac{1}{5} \cdot (x^2 + 2)$

b) Die maximale Definitionsmenge ist $D_f = \mathbb{R} \backslash \{3\}$.

1. $y = \frac{2}{3 - x}$

2. $x = \frac{3y - 2}{y}$

3. $y = \frac{3x - 2}{x}$

4. $\bar{f}(x) = \frac{3x - 2}{x} = 3 - \frac{2}{x}$

c) Die maximale Definitionsmenge ist $D_f = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$.

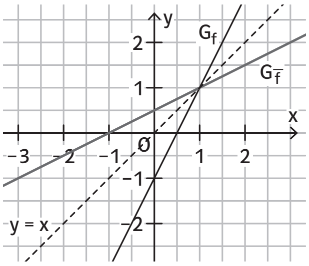
1. $y = 3 \cdot \sqrt{-2x + 1} + 2$

2. $x = -\frac{1}{18} \cdot (y - 2)^2 + \frac{1}{2}$

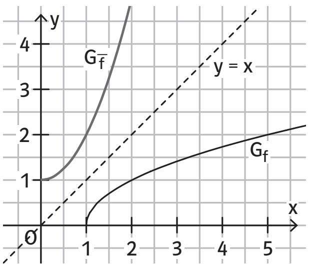
3. $y = -\frac{1}{18} \cdot (x - 2)^2 + \frac{1}{2}$

4. $\bar{f}(x) = -\frac{1}{18} \cdot (x - 2)^2 + \frac{1}{2}$

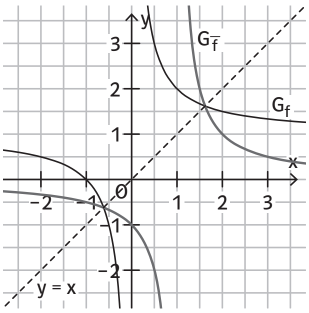
5 a)



b)



c)



6 **a)** (1) Es ist z. B. $f(0) = f(2) = 0$. Zu dem Funktionswert $0 \in W_f$ gibt es also zwei verschiedene x-Werte aus $[-1; 3]$, die auf 0 abgebildet werden. Daher ist f auf $[-1; 3]$ nicht umkehrbar.

(2) Die Funktion f hat zwei Nullstellen im Intervall $[-1; 3]$. Es gibt also zwei x-Werte aus $[-1; 3]$, die auf 0 abgebildet werden. Daher ist f auf $[-1; 3]$ nicht umkehrbar.

(3) Zum Beispiel für $y = 1$ gibt es zwei x-Werte aus $[-1; 3]$, die auf 1 abgebildet werden ($x_1 \approx -0,9$ und $x_2 \approx 0,5$). Daher ist f auf $[-1; 3]$ nicht umkehrbar.

b) (1) f ist auf $[-1; 1]$ und auf $[1; 3]$ umkehrbar.

(2) f ist auf $[0; 1,5]$, auf $[-1; 0]$ und auf $[1,5; 3]$ umkehrbar.

(3) f ist auf $[-1; -0,5]$ und auf $[0,5; 3]$ umkehrbar.

8 **a)** Der Graph kann sicher nicht zu einer auf $\mathbb{R}$ umkehrbaren Funktion gehören. Zum Beispiel gibt es zwei Nullstellen. Daher werden der 0 verschiedene x-Werte zugeordnet.

b) Der Graph kann zu einer auf $\mathbb{R}$ umkehrbaren Funktion gehören. Jede Parallele zur x-Achse schneidet den Graphen nur in genau einem Punkt.

c) Der Graph kann zu einer auf $\mathbb{R}$ umkehrbaren Funktion gehören. Jede Parallele zur x-Achse schneidet den Graphen nur in genau einem Punkt.

9 **a)** 1. $y = -x^2$; $D_f = [0; \infty[$, $W_f =]-\infty; 0]$

2. $x = \sqrt{-y}$ oder $x = -\sqrt{-y}$. Da $D_f = [0; \infty[$ ist, gilt $x = \sqrt{-y}$.

3. $y = \sqrt{-x}$

4. $\bar{f}(x) = \sqrt{-x}$

b) 1. $y = x^2$; $D_f =]-\infty; 0]$

2. $x = \sqrt{y}$ oder $x = -\sqrt{y}$. Da $D_f =]-\infty; 0]$ ist, gilt $x = -\sqrt{y}$.

3. $y = -\sqrt{x}$

4. $\bar{f}(x) = -\sqrt{x}$

10 **a)** $f'(x) = 2 \cdot (2x + 3) = 4x + 6$. Es ist $f'(x) > 0$ für alle $x > -1,5$. Also ist f auf $[-1,5; +\infty[$ umkehrbar.

b) $f'(x) = -5 \cdot e^{-x+4} < 0$ und $e^{-2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist f auf $\mathbb{R}$ umkehrbar.

c) $f'(x) = 2x \cdot e^{-2x} + \left(x^2 + \frac{3}{16}\right) \cdot (-2) \cdot e^{-2x}$

$= \left(-2x^2 + 2x - \frac{3}{8}\right) \cdot e^{-2x}$.

$-2x^2 + 2x - \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow x_1 = 0,25;\ x_2 = 0,75$.

Es ist $-2x^2 + 2x - \frac{3}{8} > 0$ und $e^{-2x} > 0$ für alle $x \in]0,25; 0,75[$.

Somit ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in]0,25; 0,75[$. Also ist f auf $[0,25; 0,75]$ umkehrbar.

11 **a)** $f'(x) = 1,5x^2 > 0$ auf $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ und $f'(0) = 0$. Somit ist f streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ und f auf $\mathbb{R}$ umkehrbar.

b) $f'(x) = 8x^3 > 0$ auf $]0; +\infty[$ und $f'(x) = 8x^3 < 0$ auf $]-\infty; 0[$. Somit ist f streng monoton fallend auf $]-\infty; 0]$ und streng monoton wachsend auf $[0; +\infty[$. Die Funktion f ist umkehrbar auf $]-\infty; 0]$ und auf $[0; +\infty[$.

c) $f'(x) = e^{-x} \cdot (x - 1) > 0$ auf $]1; +\infty[$ und $f'(x) = e^{-x} \cdot (x - 1) < 0$ auf $]-\infty; 1[$. Somit ist f streng monoton fallend auf $]-\infty; 1]$ und streng monoton wachsend auf $[1; +\infty[$. Die Funktion f ist umkehrbar auf $]-\infty; 1]$ und auf $[1; +\infty[$.

d) $f'(x) = x^2 + 2x - 15 = (x + 5) \cdot (x - 3) > 0$ auf $]-\infty; -5[$ und $]3; +\infty[$ und $f'(x) < 0$ auf $]-5; 3[$. Somit ist f streng monoton wachsend auf $]-\infty; -5]$ und $[3; +\infty[$ und streng monoton fallend auf $[-5; 3]$. Die Funktion f ist umkehrbar auf $]-\infty; -5]$, auf $[-5; 3]$ und auf $[3; +\infty[$.

e) f ist streng monoton wachsend auf $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ und streng monoton fallend auf $\left[\frac{\pi}{2}; +\frac{3\pi}{2}\right]$ usw.

Allgemein ist f auf jedem Intervall $\left[(2k-1)\cdot\frac{\pi}{2};\ (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbb{Z})$ umkehrbar.

f) $f'(x) = 3\cdot e^{3x} - 6 < 0$ auf $\left]-\infty; \frac{1}{3}\ln(2)\right[$ und $f'(x) > 0$ auf $\left]\frac{1}{3}\ln(2); +\infty\right[$. Somit ist f streng monoton fallend auf $\left]-\infty; \frac{1}{3}l(2)\right]$ und streng monoton wachsend auf $\left[\frac{1}{3}\ln(2); +\infty\right[$. Die Funktion f ist umkehrbar auf $\left]-\infty; \frac{1}{3}\ln(2)\right]$ und auf $\left[\frac{1}{3}\ln(2); +\infty\right[$.

12 Tangente an G_f:
t_f: $y = f'(1)\cdot(x-1) + f(1) = \frac{1}{2}\cdot(x-1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
Umkehrfunktion von f: $\bar{f}(x) = x^2$ mit $D_{\bar{f}} = W_f = [0; +\infty[$.
Tangente an $G_{\bar{f}}$:
$t_{\bar{f}}$: $y = \bar{f}'(1)\cdot(x-1) + \bar{f}(1) = 2\cdot(x-1) + 1 = 2x - 1$.
Der Steigungswinkel von t_f ist $\alpha_f = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26{,}6°$.
Der Schnittwinkel mit der 1. Winkelhalbierenden ist $45° - \alpha_f \approx 18{,}4°$. Der Schnittwinkel von t_f und $t_{\bar{f}}$ ist $\varphi = 2\cdot(45° - \alpha_f) \approx 36{,}9°$.
(Alternative Berechnung des Schnittwinkels φ:
$\varphi = \arctan(2) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 36{,}9°$.)

13 (1) $f(x) = \sqrt{x-3} = (x-3)^{\frac{1}{2}}$, $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(x-3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x-3}}$

a) $D_f = [3; +\infty[$, $W_f = [0; +\infty[$

b) $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(x-3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x-3}} > 0$ auf $]3; +\infty[$. Also ist f streng monoton wachsend auf $[3; +\infty[$ und somit umkehrbar.

c) 1. $y = \sqrt{x-3}$
2. $x = y^2 + 3$
3. $y = x^2 + 3$
4. $\bar{f}(x) = x^2 + 3$
$D_{\bar{f}} = W_f = [0; +\infty[$, $W_{\bar{f}} = D_f = [3; +\infty[$

(2) $f(x) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2x-1} = \frac{1}{2}\cdot(2x-1)^{\frac{1}{2}}$,
$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(2x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2x-1}}$

a) $D_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$, $W_f = [0; +\infty[$

b) $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(2x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2x-1}} > 0$ auf $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$. Also ist f streng monoton wachsend auf $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ und somit umkehrbar.

c) 1. $y = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2x-1}$
2. $x = 2y^2 + \frac{1}{2}$
3. $y = 2x^2 + \frac{1}{2}$
4. $\bar{f}(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}$
$D_{\bar{f}} = W_f = [0; +\infty[$, $W_{\bar{f}} = D_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

(3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} = (x-1)^{-\frac{1}{2}}$, $f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot(x-1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{(x-1)^3}}$

a) $D_f =]1; +\infty[$, $W_f =]0; +\infty[$

b) $f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot(x-1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{(x-1)^3}} < 0$ auf $]1; +\infty[$. Also ist f streng monoton fallend auf $]1; +\infty[$ und somit umkehrbar.

c) 1. $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$
2. $x = \frac{1}{y^2} + 1$
3. $y = \frac{1}{x^2} + 1$
4. $\bar{f}(x) = \frac{1}{x^2} + 1$
$D_{\bar{f}} = W_f =]0; +\infty[$, $W_{\bar{f}} = D_f =]1; +\infty[$

Seite 67

14 **a)** $5\cdot\sqrt{t+1} = 11 \Rightarrow t = 2{,}2^2 - 1 = 3{,}84$. Nach ca. drei Jahren und zehn Monaten nach Markteinführung ist die jährliche Verkaufszahl auf 11 000 E-Autos gestiegen.
b) Mit der Umkehrfunktion $\bar{f}$ errechnet man den Zeitpunkt, zu dem eine gegebene jährlichen Verkaufszahl von E-Autos erreicht wird. Genauer: Ist $y > 5000$ eine vorgegebene Verkaufszahl, so ist $\bar{f}\left(\frac{y}{1000}\right)$ der Zeitpunkt, zu dem y Autos pro Jahr verkauft werden.
Bestimmung eines Funktionsterms von $\bar{f}$:
1. $y = 5\cdot\sqrt{t+1}$
2. $t = \left(\frac{y}{5}\right)^2 - 1$
3. Hier ist kein Variablentausch nötig, da $\bar{f}$ keine Funktion in Abhängigkeit von der Zeit t ist.
4. $\bar{f}(y) = \left(\frac{y}{5}\right)^2 - 1$

c) Die Lösung der Gleichung $\bar{f}(2y) - \bar{f}(y) = 6$ ist diejenige jährliche Verkaufszahl y, die sich in den nächsten sechs Jahren verdoppelt. Eine Frage wäre also: „Bei welcher jährlichen Verkaufszahl verdoppeln sich die jährlichen Verkaufszahlen in den nächsten sechs Jahren?“
Die Lösung der Gleichung $f(t+6) = 2\cdot f(t)$ bestimmt den Zeitpunkt, ab dem sich die Verkaufszahlen in den nächsten sechs Jahren verdoppeln. Die gesuchte jährliche Verkaufszahl bestimmt man aus der Lösung mit $f(t) = y$.

15 Mit der Umkehrfunktion $\bar{h}$ von h berechnet man zu einer vorgegebenen Größe x den Zeitpunkt, an dem die Giraffe die Größe x erreicht.
Bestimmung eines Funktionsterms von $\bar{h} = k$:
1. $x = 8{,}5\cdot\sqrt{0{,}01t + 0{,}04}$
2. $t = 100\cdot\left(\left(\frac{x}{8{,}5}\right)^2 - 0{,}04\right)$
3. Hier ist kein Variablentausch nötig, da $\bar{h}$ keine Funktion in Abhängigkeit von der Zeit t ist.
4. $k(x) = 100\cdot\left(\left(\frac{x}{8{,}5}\right)^2 - 0{,}04\right) = \frac{400}{289}\cdot x^2 - 4$

16 **a)** f ist auf dem Intervall $D_f =]1; \infty[$ umkehrbar (genauso auf $]-\infty; 1[$).
Bestimmung eines Funktionsterms von $\bar{f}$:
1. $y = \frac{1}{(x-1)^2}$
2. $x = \frac{1}{\sqrt{y}} + 1$ für $D_f =]1; \infty[$
3. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$
4. $\bar{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$

b) $f(x) = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ ist auf dem Intervall $D_f = [-3; +\infty[$ umkehrbar (genauso auf $]-\infty; -3]$).
Bestimmung eines Funktionsterms von $\bar{f}$:
1. $y = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$
2. $x = \sqrt{y} - 3$ für $D_f = [-3; +\infty[$

3. $y = \sqrt{x} - 3$
4. $\bar{f}(x) = \sqrt{x} - 3$

c) $f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 + 1$ ist auf dem Intervall $D_f = [1; +\infty[$ umkehrbar (genauso auf $]-\infty; 1]$).
Bestimmung eines Funktionsterms von $\bar{f}$:
1. $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 + 1$
2. $x = \sqrt{y-1} + 1$ für $D_f = [1; +\infty[$
3. $y = \sqrt{x-1} + 1$
4. $\bar{f}(x) = \sqrt{x-1} + 1$

19 a) Aus $f(\bar{f}(x)) = x$ folgt durch Ableiten von beiden Seiten der Gleichung und nach der Kettenregel:
$f'(\bar{f}(x)) \cdot \bar{f}'(x) = 1$. Somit folgt nach Division durch $f'(\bar{f}(x))$ (beachten Sie, dass nach Voraussetzung $f'(x) \neq 0$ gilt): $\bar{f}'(x) = \frac{1}{f'(\bar{f}(x))}$.

b) Die Funktion g mit $g(x) = \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2$. Es gilt $f'(x) = 2x$.
Somit gilt $\bar{f}(x) = g(x) = \sqrt{x}$. Es ist $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in]0; \infty[$.
Nach Teilaufgabe a) ist $g'(x) = \bar{f}'(x) = \frac{1}{f'(\bar{f}(x))} = \frac{1}{2 \cdot \bar{f}(x)} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$.
Da $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ ist, stimmt das Ergebnis mit der Ableitung von g überein, die nach der Potenzregel bestimmt wird.

c) Im abgebildeten Dreieck ist $\sin(\delta) = x$, also $\delta = \arcsin(x)$. Aus dem Satz des Pythagoras folgt $\cos(\delta) = \sqrt{1 - x^2}$, also $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$. Zu $f(x) = \sin(x)$ ist $f'(x) = \cos(x)$ der Term der Ableitungsfunktion. Für $D_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ist $\bar{f}(x) = \arcsin(x)$ mit $D_{\bar{f}} = W_f = [-1; 1]$.
Somit gilt
$\arcsin'(x) = \bar{f}'(x) = \frac{1}{f'(\bar{f}(x))} = \frac{1}{\cos(\bar{f}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
Die Funktion arcsin ist bei -1 und $+1$ nicht differenzierbar, ihre Definitionsmenge ist daher $]-1; +1[$.

20 a) f ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, daher auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion ist $\bar{f}$ mit

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{|x|} & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

b) f ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, daher auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion ist $\bar{f}$ mit

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \sqrt[5]{x} + \frac{1}{2} & \text{für } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot \sqrt[5]{|x|} + \frac{1}{2} & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

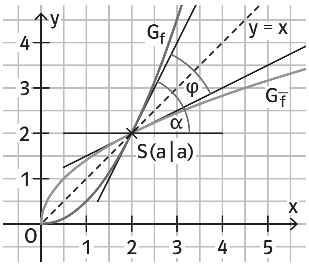
c) Es ist $f(x) = \frac{3x-2}{4x-1} = (3x-2) \cdot (4x-1)^{-1}$ mit
$f'(x) = \frac{3}{4x-1} - \frac{4 \cdot (3x-2)}{(4x-1)^2} = \frac{5}{(4x-1)^2} > 0$ für alle $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$. Somit ist f auf den Intervallen $\left]-\infty; \frac{1}{4}\right[$ und $\left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$ jeweils umkehrbar.
Bestimmung von $\bar{f}$:
1. $y = \frac{3x-2}{4x-1}$
2. $y \cdot (4x-1) = 3x - 2 \iff 4xy - 3x = y - 2 \iff x = \frac{y-2}{4y-3}$
3. $y = \frac{x-2}{4x-3}$
4. $\bar{f}(x) = \frac{x-2}{4x-3}$ mit $D_{\bar{f}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

Der Funktionsterm von $\bar{f}$ ist für beide Intervalle, auf denen f umkehrbar ist, $\bar{f}(x) = \frac{x-2}{4x-3}$.

d) Es ist $f(x) = \frac{3x}{2x^2 - 18} = 3x \cdot (2x^2 - 18)^{-1}$ mit
$f'(x) = \frac{3}{2x^2 - 18} - \frac{12x^2}{(2x^2 - 18)^2} = -6\frac{x^2 + 9}{(2x^2 - 18)^2} < 0$ für alle $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$. Somit ist f auf den drei Intervallen $]-\infty; -3[$, $]-3; +3[$ und $]+3; +\infty[$ jeweils umkehrbar.
Bestimmung von $\bar{f}$ für das Intervall $D_f =]+3; +\infty[$ $\left(\text{hier ist } y = \frac{3x}{2x^2 - 18} > 0 \text{ und } W_f =]0; +\infty[\right)$:
1. $y = \frac{3x}{2x^2 - 18}$
2. $y \cdot (2x^2 - 18) = 3x \iff 2x^2 y - 3x = 18y$
$\iff x^2 - \frac{3}{2y}x = 9 \iff \left(x - \frac{3}{4y}\right)^2 - \frac{9}{16y^2} = 9$
$\iff x = \frac{3}{4y} \cdot \left(\sqrt{16y^2 + 1} + 1\right)$
3. $y = \frac{3}{4x} \cdot \left(\sqrt{16x^2 + 1} + 1\right)$
4. $\bar{f}(x) = \frac{3}{4x} \cdot \left(\sqrt{16x^2 + 1} + 1\right)$

Die Umkehrfunktion von f mit $D_f =]+3; +\infty[$ ist $\bar{f}$ mit $\bar{f}(x) = \frac{3}{4x} \cdot \left(\sqrt{16x^2 + 1} + 1\right)$ und $D_{\bar{f}} = W_f =]0; +\infty[$ (für das Intervall $]-\infty; -3[$ passt derselbe Funktionsterm).

21 a) Wenn die Größe des Steigungswinkels α mindestens 45° beträgt, so hat der Schnittwinkel von G_f und erster Winkelhalbierender im Punkt S die Größe $\alpha - 45°$ (vgl. Abbildung). Da G_f und $G_{\bar{f}}$ symmetrisch zur ersten Winkelhalbierenden liegen, beträgt die Größe des Schnittwinkels von G_f und $G_{\bar{f}}$ im Punkt S:
$\varphi = 2 \cdot (\alpha - 45°) = 2\alpha - 90°$.
Falls $0 < \alpha < 45°$ gilt, so beträgt die Größe des Schnittwinkels der ersten Winkelhalbierenden und G_f im Punkt S: $45° - \alpha$. Also gilt $\varphi = 2 \cdot (45° - \alpha) = 90° - 2\alpha$.



b) Es gilt genau dann $A(2|1) \in G_f \cap G_{\bar{f}}$, wenn $A(2|1) \in G_f$ und $B(1|2) \in G_f$ gilt. Gesucht sind also Funktionen mit $f(2) = 1$ und $f(1) = 2$. Das ist z. B. für f mit $f(x) = 3 - x$ der Fall (dann ist $\bar{f}(x) = 3 - x$) oder für g mit $g(x) = (x-2)^2 + 1$ mit $D_g =]-\infty; 2]$ (dann ist $\bar{g}(x) = -\sqrt{x-1} + 2$).
Weitere Beispiele: $h(x) = \frac{4}{2^x}$ $\left(\text{dann ist } \bar{h}(x) = \frac{\ln\left(\frac{4}{x}\right)}{\ln(2)} = \log_2\left(\frac{4}{x}\right)\right)$ oder $k(x) = -(x-2)^3 + 1$ $\left(\text{dann ist } \bar{k}(x) = \sqrt[3]{1 - x} + 2\right)$.

c) Die Funktionen f_a mit $f_a(x) = a - x$ bilden eine Schar von unendlich vielen Funktionen mit $f_a(x) = \bar{f}_a(x) = a - x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Weitere Beispiele: $g(x) = \frac{1}{x}$ oder allgemeiner $g_b(x) = \frac{1}{x - b} + b$ ($b \in \mathbb{R}$ beliebig).

Möglich sind auch zusammengesetzte Funktionen wie z. B. h, k und l mit $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 0 \\ -\sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ und

$k(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x < 0 \\ -\frac{1}{2}x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

und $l(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{für } x < \Omega \\ -\ln x & \text{für } x \geq \Omega \end{cases}$

(zur Definition von Ω: vgl. Aufgabe 15 auf Seite 70 im Schulbuch).
Die zusammengesetzten Funktionen haben meist eine Knickstelle, an der sie nicht differenzierbar sind. Dies ist anders für m mit $m(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{für } x < 0 \\ -\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$.
Sie ist auf ℝ zweimal, aber nicht dreimal differenzierbar.

6 Die Logarithmusfunktion und ihre Ableitung

Seite 68

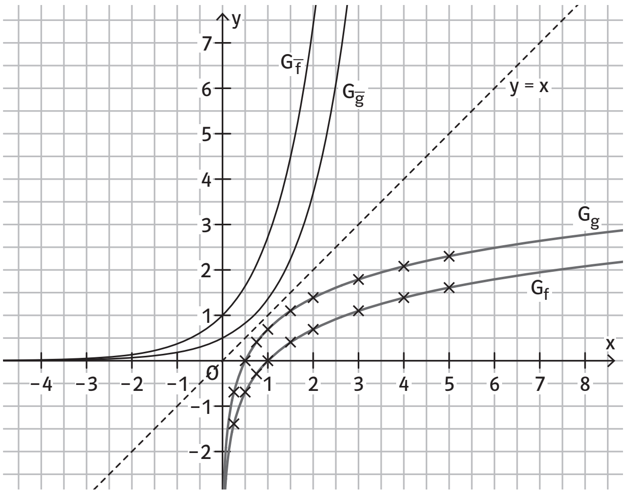
Einstiegsaufgabe
Kärtchen D zeigt den Graphen der natürlichen Exponentialfunktion; der Graph der Umkehrfunktion entsteht durch Spiegelung des Graphen auf Kärtchen D an der 1. Winkelhalbierenden. Vom Verlauf her könnten Kärtchen A oder Kärtchen C passen. Der Graph auf Kärtchen A hat aber die waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = 1$. Dann müsste der Graph der natürlichen Exponentialfunktion die senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 1$ haben. Dies ist jedoch nicht der Fall. Daher passt nur der Graph von Kärtchen C für die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion.
Die Steigung dieser Umkehrfunktion ist stets positiv und wird geringer mit wachsendem x. Es könnte der Graph von Kärtchen B oder Kärtchen E passen. Nach dem Graphen auf Kärtchen E würde die Steigung der Umkehrfunktion allerdings nie kleiner als 1 werden. Da die Steigung der natürlichen Exponentialfunktion mit wachsendem x gegen ∞ strebt, muss die Steigung ihrer Umkehrfunktion mit wachsendem x gegen 0 streben. Daher ist der Graph auf Kärtchen E unmöglich für die Ableitungsfunktion der Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion. Dagegen könnte der Graph auf Kärtchen B passen.

Seite 69

1 **a)** $f(x) = 3 + \ln(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$
b) $f(x) = 2x + \ln(x)$, $f'(x) = x + \frac{1}{x}$
c) $f(x) = 3 \cdot \ln(x + 1)$, $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x + 1}$
d) $f(x) = x^2 + \ln(x)$, $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$
e) $f(x) = 3x^2 + \ln(x - 1)$, $f'(x) = 6x + \frac{1}{x - 1}$
f) $f(x) = \ln(x^2) - \frac{1}{x}$, $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$

2 **a)**

x	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	3	4	5
f(x) = ln(x)	−1,39	−0,69	−0,29	0	0,41	0,69	1,10	1,39	1,61
g(x) = ln(2x)	−0,69	0	0,41	0,69	1,10	1,39	1,79	2,08	2,30



b) Die gespiegelten Graphen gehen durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ ineinander über oder durch eine Verschiebung in x-Richtung um ln(2).

3 **a)** $\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$
b) $\ln(x) = 2 \Rightarrow x = e^2$
c) $\ln(x) = -3 \Rightarrow x = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$
d) $\ln(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$
e) $\ln(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$
f) $\ln(x - 5) = 2 \Leftrightarrow x - 5 = e^2 \Rightarrow x = e^2 + 5$

4 **a)** $f(x) = 3 \Leftrightarrow \ln(x) = 3 \Rightarrow x = e^3 \approx 20{,}09$
b) $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ für alle $x > 0$. Somit ist f streng monoton wachsend. Es gilt $\bar{f}(x) = e^x$.
c) $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Somit ist f′ streng monoton fallend und der Graph von f ist eine Rechtskurve.
d) Sei $f(x) = \ln(x) = y$. Dann ist $e^y = x$. Für $y \to -\infty$ gilt $x = e^y \to 0$, der Graph der natürlichen Exponentialfunktion nähert sich der x-Achse an. Da der Graph der natürlichen Logarithmusfunktion durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden aus dem Graphen der natürlichen Exponentialfunktion hervorgeht, nähert sich der Graph der natürlichen Logarithmusfunktion der y-Achse an. Für $x \to 0$ mit $x > 0$ gilt also $y = \ln(x) \to -\infty$.
e) f ist streng monoton wachsend. Wenn f(x) für $x \to +\infty$ nicht gegen $+\infty$ streben würde, so gäbe es eine Zahl m mit $f(x) = \ln(x) \leq m$ für alle $x > 0$. Für $x = e^{m+1}$ ist aber $\ln(x) = \ln(e^{m+1}) = m + 1 > m$. Somit gibt es keine Zahl m mit $\ln(x) \leq m$ für alle x und ln(x) strebt daher gegen ∞.

5 **a)** $f(x) = \ln(4x)$, $f'(x) = \frac{1}{4x} \cdot 4 = \frac{1}{x}$
b) $f(x) = \ln(x^3)$, $f'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot 3 \cdot x^2 = \frac{3}{x}$
c) $f(x) = \ln(4 \cdot (x - 2)^3)$, $f'(x) = \frac{1}{4 \cdot (x - 2)^3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot (x - 2)^2 = \frac{3}{x - 2}$
d) $f(x) = \ln\left(\frac{5}{x - 4}\right)$, $f'(x) = \frac{1}{\frac{5}{x - 4}} \cdot 5 \cdot (-1) \cdot (x - 4)^{-2} = -\frac{1}{x - 4}$
e) $f(x) = x \cdot \ln(x)$, $f'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

f) $f(x) = x \cdot \ln(\sqrt{x})$, $f'(x) = \ln(\sqrt{x}) + \frac{x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \ln(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}$

g) $f(x) = x^2 \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)$,

$f'(x) = 2x \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x)$

h) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot \ln(x + 1)$,

$f'(x) = 2x \cdot \ln(x + 1) + (x^2 - 1) \cdot \frac{1}{x+1} = 2x \cdot \ln(x + 1) + x - 1$

i) $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 9)$,

$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 9} \cdot (2x - 6) = \frac{2 \cdot (x - 3)}{(x - 3)^2} = \frac{2}{x - 3}$

7 **a)** $D_f = \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$, $W_f = \mathbb{R}$

b) $f'(x) = \frac{6}{2x + 3} > 0$ für $x > -\frac{3}{2}$. Also ist f streng monoton wachsend auf $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$. Somit ist f umkehrbar.

Es ist $\bar{f}(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{3}x} - \frac{3}{2}$.

c) $D_{\bar{f}} = \mathbb{R}$, $W_{\bar{f}} = \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$

Seite 70

8 (1) $f(x) = e^{3x}$

a) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}^+ =]0; +\infty[$

b) $f'(x) = 3 \cdot e^{3x} > 0$. Also ist f streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$. Somit ist f umkehrbar.

(2) $f(x) = e^{-2x+1}$

a) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}^+ =]0; +\infty[$

b) $f'(x) = (-2) \cdot e^{-2x+1} < 0$. Also ist f streng monoton fallend auf ganz $\mathbb{R}$. Somit ist f umkehrbar.

(3) $f(x) = 4 \cdot e^{3x-2} + 1$

a) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f =]1; +\infty[$

b) $f'(x) = 12 \cdot e^{3x-2} > 0$. Also ist f streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$. Somit ist f umkehrbar.

9 **a)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} ((x^2 + 2x) \cdot \ln(x)) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{3x^2 - 2x - 4} = 0$

10 **a)** $f(x) = x - \ln(x)$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{1}{x^2}$

Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$.

Überprüfung: $f''(1) = 1 > 0$, also Minimumstelle.

$f(1) = 1$, also $T(1|1)$.

b) $f(x) = x \cdot \ln(x) - 2x$, $f'(x) = \ln(x) - 1$,

$f''(x) = \frac{1}{x}$

Mögliche Extremstellen: $f'(x) = \ln(x) - 1 = 0 \Rightarrow x = e$.

Überprüfung: $f''(e) = \frac{1}{e} > 0$, also Minimumstelle.

$f(e) = -e$, also $T(e|-e)$.

c) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$, $f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x$,

$f''(x) = 2 \cdot \ln(x) + 3$

Mögliche Extremstellen:

$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x = x \cdot (2 \cdot \ln(x) + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = e^{-\frac{1}{2}}$.

Überprüfung: $0 \notin D_f$; $f''\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = 2 > 0$, also Minimumstelle.

$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$, also $T\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \middle| -\frac{1}{2e}\right)$.

11 $h(t) = 4 \cdot \frac{1}{(t + 1)^2} \cdot \ln(t + 1)$,

$h'(t) = 4 \cdot \frac{1}{(t + 1)^3} \cdot (1 - 2 \cdot \ln(t + 1))$,

$h''(t) = -4 \cdot \frac{1}{(t + 1)^4} \cdot (5 - 6 \cdot \ln(t + 1))$,

$h'''(t) = 8 \cdot \frac{1}{(t + 1)^5} \cdot (13 - 12 \cdot \ln(t + 1))$

a) Mögliche Extremstellen:

$h'(t) = 4 \cdot \frac{1}{(t + 1)^3} \cdot (1 - 2 \cdot \ln(t + 1)) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2 \cdot \ln(t + 1) = 0 \Rightarrow t = e^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{e} - 1 \approx 0{,}649$.

Überprüfung: $h''\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) = -8 \cdot \frac{1}{e^2} < 0$, also Maximumstelle.

$h\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) = \frac{2}{e} \approx 0{,}736$

Der höchste Wasserstand wird nach ca. 0,65 Tagen = 15,6 Stunden mit ca. 74 cm über Normal erreicht.

b) Mögliche Wendestellen:

$h''(t) = -4 \cdot \frac{1}{(t + 1)^4} \cdot (5 - 6 \cdot \ln(t + 1)) = 0$

$\Leftrightarrow 5 - 6 \cdot \ln(t + 1) = 0 \Rightarrow t = e^{\frac{5}{6}} - 1 \approx 1{,}3$.

Überprüfung: $h'''\left(e^{\frac{5}{6}} - 1\right) = 24 \cdot \frac{1}{e^{\frac{25}{6}}} \neq 0$, also Wendestelle.

Nach ca. 1,3 Tagen nimmt das Hochwasser am stärksten ab.

c) Setzt man $x = t + 1$, so strebt x gegen ∞ für $t \to \infty$.

Somit gilt

$\lim\limits_{t \to +\infty} \left(4 \cdot \frac{1}{(t + 1)^2} \cdot \ln(t + 1)\right) = 4 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$, nach den Grenzwerten, die auf Seite 68 im Schulbuch angegeben wurden.

Man kann also langfristig wieder mit Normalhöhe rechnen.

d) Die Lösung der Gleichung $h(t + 2) - h(t) = -0{,}2$ beschreibt den Zeitpunkt t, zu dem an den beiden Folgetagen der Wasserstand um 20 cm sinkt.

e) Bestimmung der Gleichung der Tangente an den Graphen von h im Punkt $(4|h(4))$:

$h(4) = \frac{4}{25} \cdot \ln(5) \approx 0{,}2575$, $h'(4) = \frac{4}{125} \cdot (1 - 2 \cdot \ln(5)) \approx -0{,}071$

$y = h'(4) \cdot (x - 4) + h(4)$

$= \frac{4}{125} \cdot (1 - 2 \cdot \ln(5)) \cdot x + \frac{1}{125} \cdot (52 \cdot \ln(5) - 16)$

Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse:

$\frac{4}{125} \cdot (1 - 2 \cdot \ln(5)) \cdot x + \frac{1}{125} \cdot (52 \cdot \ln(5) - 16) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{4 - 13\ln(5)}{1 - 2\ln(5)} \approx 7{,}6267$

Nach ca. 7,6 Tagen ist die Wasserhöhe wieder normal.

12 **a)** $f'(t) = \frac{1}{t + 1} > 0$. Also ist f streng monoton wachsend auf $D_f = \mathbb{R}_0^+ = [0; +\infty[$.

b) $\bar{f}(x) = e^x - 1$. Mit $\bar{f}$ berechnet man den Zeitpunkt, zu dem eine vorgegebene tägliche Verkaufszahl x erreicht wird.

c) Der Beginn des Zwei-Monate-Zeitraums wird durch die Gleichung $f(t + 2) - f(t) = a$ beschrieben (oder durch $\bar{f}(x + a) = \bar{f}(x) + 2$ mit $\bar{f}(x) = t$). Dies führt auf $\ln(t + 3) = \ln(t + 1) + a$ bzw. $t + 3 = (t + 1) \cdot e^a$.

Die Lösung ist $t = \frac{3 - e^a}{e^a - 1} > 0$ für $0 < a \leq \ln(3)$. In dem Zwei-Monate-Zeitraum $\left[\frac{3 - e^a}{e^a - 1}; \frac{3 - e^a}{e^a - 1} + 2\right]$ nehmen die täglichen Verkaufszahlen um a zu.

14 **a)** $f(x) = \ln(g(x))$, $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$. Es ist $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
Für $g(x) = \cos(x)$ ist $\frac{g'(x)}{g(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
Somit gilt für $f(x) = -\ln(\cos(x))$ $\left(D_f = \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[\right)$:
$f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$.
b) Es ist $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} > 0$ für alle $x \in I$. Somit ist f streng monoton wachsend auf I und daher umkehrbar.
1. $y = \ln(g(x))$
2. $x = \overline{g}(e^y)$
3. $y = \overline{g}(e^x)$
4. $\overline{f}(x) = \overline{g}(e^x)$.

15 **a)** $h(x) = x \cdot e^x$, $h'(x) = (x+1) \cdot e^x > 0$ für $x > -1$.
Somit ist h auf $[-1; +\infty[$ streng monoton wachsend, also umkehrbar.
b) Sei f die natürliche Exponentialfunktion mit $f(x) = e^x$. Verschiebt man den Graphen von f um a $(a > 0)$ nach rechts, so ergibt sich der Graph der Funktion k mit $k(x) = e^{x-a}$ und $k'(x) = e^{x-a}$.
Der Graph von k soll den Graphen der natürlichen Logarithmusfunktion g mit $g(x) = \ln(x)$ berühren.
Somit muss gelten: $k(x) = g(x)$ und $k'(x) = g'(x)$.
Aus $g(x) = \ln(x)$ und $g'(x) = \frac{1}{x}$ folgt $e^{x-a} = \ln(x)$ und $e^{x-a} = \frac{1}{x}$, also $\ln(x) = \frac{1}{x}$. Es folgt $x = e^{\frac{1}{x}}$ bzw. $\frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 1$.
Aus $h\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ (Funktion h aus Teilaufgabe a)) folgt nun $\frac{1}{x} = \overline{h}(1) = W(1) = \Omega$. Somit ist $x = \frac{1}{\Omega}$.
Es ergibt sich $e^{\frac{1}{\Omega} - a} = \Omega \Rightarrow a = \frac{1}{\Omega} - \ln(\Omega)$. Aus $\Omega \cdot e^{\Omega} = 1$ folgt $\frac{1}{\Omega} = e^{\Omega}$, also $\ln(\Omega) = -\Omega$.
Somit ist $a = \frac{1}{\Omega} - \ln(\Omega) = \frac{1}{\Omega} + \Omega$.
Man muss den Graphen der natürlichen Exponentialfunktion um $\frac{1}{\Omega} - \ln(\Omega) = \frac{1}{\Omega} + \Omega$ nach rechts verschieben, damit er den Graphen der natürlichen Logarithmusfunktion berührt. Der Berührpunkt ist $B\left(\frac{1}{\Omega} \middle| \Omega\right)$.
c) $\eta^\eta = \left(e^{\ln(\eta)}\right)^\eta = e^{\ln(\eta) \cdot \eta} = e^{\ln\left(\frac{1}{\Omega}\right) \cdot \frac{1}{\Omega}} = e^{-\ln(\Omega) \cdot \frac{1}{\Omega}} = e^{-(-\Omega) \cdot \frac{1}{\Omega}} = e$

16 **a)** Für $f(x) = e^x$ ist $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$. Für $g(x) = x^e$ ist $g'(x) = e \cdot x^{e-1}$, $g''(x) = e \cdot (e-1) \cdot x^{e-2}$, $g'''(x) = e \cdot (e-1) \cdot (e-2) \cdot x^{e-3}$ und $g^{(4)}(x) = e \cdot (e-1) \cdot (e-2) \cdot (e-3) \cdot x^{e-4}$.
Nach einer leichten Abwandlung des Hilfssatzes von Seite 56 im Schulbuch gilt für zwei differenzierbare Funktionen h und k: Wenn $k(e) \le h(e)$ und $k'(x) < h'(x)$ für alle $x > e$ gilt, gilt auch $k(x) < h(x)$ für alle $x > e$.
Man wendet diesen Satz auf $k(x) = g'''(x)$ und $h(x) = f'''(x)$ an: Es ist
$k(e) = g'''(e) = e \cdot (e-1) \cdot (e-2) \cdot e^{e-3} < e^3 \cdot e^{e-3}$
$= e^e = f'''(e) = h(e)$ und
$k'(x) = g^{(4)}(x) = e \cdot (e-1) \cdot (e-2) \cdot (e-3) \cdot x^{e-4} < 0 < f^{(4)}(x)$
$= e^x = h'(x)$
für alle $x > e$ (denn $e - 3 < 0$).
Also ist $k(x) = g'''(x) < f'''(x) = h(x)$ für alle $x > e$.
Nun wiederholt man die Anwendung des Satzes für $k(x) = g''(x)$ und $h(x) = f''(x)$.
Dann folgt
$k(e) = g''(e) = e \cdot (e-1) \cdot e^{e-2} < e^2 \cdot e^{e-2} = e^e = f''(e) = h(e)$
und wie gerade bewiesen $k'(x) = g'''(x) < f'''(x) = h'(x)$ für alle $x > e$. Somit folgt $k(x) = g''(x) < f''(x) = h(x)$ für alle $x > e$.
Nun wendet man denselben Satz auf $k(x) = g'(x)$ und $h(x) = f'(x)$ an.
Dann folgt $k(e) = g'(e) = e \cdot e^{e-1} = e^e = f'(e) = h(e)$ und wieder
$k'(x) = g''(x) < f''(x) = h'(x)$ für alle $x > e$.
Somit folgt $k(x) = g'(x) < f'(x) = h(x)$ für alle $x > e$.
Zuletzt wendet man den Satz auf $k(x) = g(x)$ und $h(x) = f(x)$ an.
Dann folgt $k(e) = g(e) = e^e = f(e) = h(e)$ und wieder
$k'(x) = g'(x) < f'(x) = h'(x)$ für alle $x > e$.
Somit folgt $k(x) = g(x) < f(x) = h(x)$ für alle $x > e$.
Somit ist $x^e < e^x$ für alle $x > e$. Da $\pi > e$ ist, folgt $\pi^e < e^\pi$.
b) Man muss zwei Richtungen beweisen. Zunächst beweist man, dass aus $x^a \le a^x$ für alle $x > 0$ folgt, dass $a = e$ ist. Dies bedeutet, dass, wenn $a \neq e$ ist, es ein $c > 0$ mit $c^a > a^c$ gibt.
Sei also $0 < a \neq e$, $f(x) = a^x = e^{\ln(a)x}$, $g(x) = x^a$ und $h(x) = f(x) - g(x)$.
Es gilt $h'(x) = f'(x) - g'(x) = \ln(a) \cdot a^x - a \cdot x^{a-1}$.
Die Funktion h hat die Nullstelle a mit
$h'(a) = (\ln(a) - 1) \cdot a^a \neq 0$. Somit ist a also eine Nullstelle von h mit Vorzeichenwechsel. Es gibt also in der Umgebung von a Werte c mit $h(c) < 0$. Aus $a^c - c^a < 0$ folgt $c^a > a^c$. Somit ist diese „Hinrichtung" bewiesen.
Nun zur „Rückrichtung". Sie besagt, dass $e^x \ge x^e$ für alle $x > 0$ gilt.
In Teilaufgabe a) wurde bewiesen: $x^e < e^x$ für alle $x > e$.
Somit bleibt zu zeigen: $x^e < e^x$ für alle $0 < x < e$. Da $x^e \le 1$ für $0 < x \le 1$ ist, bleibt zu zeigen, dass $x^e < e^x$ für alle $1 < x < e$ gilt. Nach einer leichten Abwandlung des Hilfssatzes von Seite 56 im Schulbuch gilt für zwei differenzierbare Funktionen h und k: Wenn $k(e) = h(e)$ und $k'(x) > h'(x)$ für alle x mit $1 < x < e$ gilt, so gilt auch $k(x) < h(x)$ für alle x mit $1 < x < e$.
Wendet man diesen Hilfssatz auf $f(x) = e^x$ und $g(x) = x^e$ an, so ist also zu zeigen, dass $g'(x) = e \cdot x^{e-1} > e^x = f'(x)$ für alle x mit $1 < x < e$ gilt. Setzt man $f_1(x) = e^{x-1}$ und $g_1(x) = x^{e-1}$, so ist dies nach Division durch e äquivalent zu:
(*) $g_1(x) = x^{e-1} > e^{x-1} = f_1(x)$ für alle $1 < x < e$.
Man zeigt (*) wieder mithilfe der Ableitungen
$g_1'(x) = (e-1) \cdot x^{e-2}$ und $f_1'(x) = e^{x-1}$. Der Graph von g_1' ist rechtsgekrümmt, da $e - 2 < 1$ ist $\left(g_1''\right.$ ist streng monoton fallend, da $e - 3 < 0$ bzw. $\left.g_1'''(x) < 0 \text{ ist}\right)$. Der Graph von f_1' ist wie der Graph der natürlichen Exponentialfunktion linksgekrümmt. Somit können die Graphen von f_1' und g_1' maximal zwei Schnittpunkte haben. Da
$g_1'(0) = 0 < f_1'(0) = e^{-1}$ und $g_1'(1) = e - 1 > f_1'(1) = 1$ gilt, gibt es ein a mit $0 < a < 1$ mit $g_1'(a) = f_1'(a)$. Da wieder $g_1'(e) = (e-1) \cdot e^{e-2} < e \cdot e^{e-2} = e^{e-1} = f_1'(e)$ gilt, gibt es auch ein b mit $1 < b < e$ mit $g_1'(b) = f_1'(b)$. Es gibt also genau eine Zahl $x = b$ mit $1 < x < e$, für die $g_1'(x) = f_1'(x)$ gilt (es ist im Übrigen $b \approx 2{,}06$, was hier aber nicht benötig wird).

Für $1 < x < b$ gilt $g_1'(x) > f_1'(x)$, für $b < x < e$ gilt $g_1'(x) < f_1'(x)$.
Da $g_1(1) = 1 = f_1(1)$ und $g_1'(x) > f_1'(x)$ für alle $1 < x < b$ gilt, folgt $g_1(x) > f_1(x)$ für alle x mit $1 < x < b$. Da $g_1 - f_1$ sogar auf $]1; b]$ streng monoton wachsend ist, gilt auch $g_1(b) - f_1(b) > 0$ und damit $g_1(x) > f_1(x)$ für alle x mit $1 < x \leq b$.
Da $g_1(e) = e^{e-1} = f_1(e)$ und $g_1'(x) < f_1'(x)$ für alle x mit $b < x < e$ gilt, folgt $g_1(x) > f_1(x)$ für alle x mit $b < x < e$. Zusammen gilt also $g_1(x) > f_1(x)$ für alle $1 < x < e$. Dies ist genau die Behauptung (*), die zu beweisen war. Damit ist bewiesen, dass $x^e \leq e^x$ gilt für alle $x > 0$.

7 Anwendungen von Exponentialfunktionen

Seite 71

Einstiegsaufgabe

Tag	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl a	10	18	31	50	75	105	137	164
$\frac{a(t+1)}{a(t)}$	1,8	1,72	1,61	1,5	1,4	1,3	1,2	

Die Infiziertenzahlen wachsen zwar schnell, aber der Wachstumsfaktor $\frac{a(t+1)}{a(t)}$ sinkt kontinuierlich ab. Es liegt kein exponentielles Wachstum vor. An Tag 8 würde man ca. $164 \cdot 1{,}1 \approx 180$ Infizierte erwarten. Danach würde man erwarten, dass die Infiziertenzahlen nicht mehr zunehmen bzw. abnehmen, z.B. an Tag 9 noch 180 Infizierte und an Tag 10 noch 165 Infizierte.

Seite 72

1 **a)** Anfangsbestand: $f(0) = 0{,}8$; Zunahme, da $2 > 0$.
b) Anfangsbestand: $f(0) = 5$; Abnahme, da $-0{,}99 < 0$.
c) Anfangsbestand: $f(0) = 5$; Abnahme, da $-\frac{1}{3} < 0$.
d) Anfangsbestand: $f(0) = 29$; Zunahme, da $0{,}02 > 0$.

2 **a)** $f(t) = 8 \cdot e^{kt}$, $f(1) = 8 \cdot e^{k} = 12$,
$k = \ln\left(\frac{12}{8}\right) = \ln(1{,}5) \approx 0{,}405$, $f(t) \approx 8 \cdot e^{0{,}405t}$
b) $f(t) = 37 \cdot e^{kt}$, $f(1) = 37 \cdot e^{k} = 46{,}5$,
$k = \ln\left(\frac{46{,}5}{37}\right) \approx 0{,}229$, $f(t) \approx 37 \cdot e^{0{,}229t}$
c) $f(t) = 750 \cdot e^{kt}$, $f(1) = 750 \cdot e^{k} = 723$,
$k = \ln\left(\frac{723}{750}\right) = \ln(0{,}964) \approx -0{,}0367$, $f(t) \approx 750 \cdot e^{-0{,}0367t}$

3 Ablesen am Graphen A: $f(0) = 5$, $f(5) = 30$.
Ansatz: $f(t) = 5 \cdot e^{kt}$, $f(5) = 5 \cdot e^{5k} = 30$,
$k = \frac{1}{5} \cdot \ln(6) \approx 0{,}358$, $f(t) \approx 5 \cdot e^{0{,}358t}$
Ablesen am Graphen B: $f(0) = 20$, $f(15) = 90$.
Ansatz: $f(t) = 20 \cdot e^{kt}$, $f(15) = 20 \cdot e^{15k} = 90$,
$k = \frac{1}{15} \cdot \ln\left(\frac{90}{20}\right) \approx 0{,}1$, $f(t) \approx 20 \cdot e^{0{,}1t}$
Ablesen am Graphen C: $f(0) = 60$, $f(6{,}25) = 20$.
Ansatz: $f(t) = 60 \cdot e^{kt}$, $f(6{,}25) = 60 \cdot e^{6{,}25k} = 20$,
$k = \frac{1}{6{,}25} \cdot \ln\left(\frac{20}{60}\right) \approx -0{,}176$, $f(t) \approx 60 \cdot e^{-0{,}176t}$

4 **a)** $k = 0{,}3$; $T_V = \frac{1}{k} \cdot \ln(2) \approx 2{,}31\,s$
b) $k = -0{,}25$; $T_H = -\frac{1}{k} \cdot \ln(2) \approx 2{,}77\,s$
c) $k = -0{,}001$; $T_H = -\frac{1}{k} \cdot \ln(2) \approx 693\,s$
d) $k = \ln(4) \approx 1{,}386$; $T_V = \frac{1}{k} \cdot \ln(2) = 0{,}5\,s$

5 **a)** Ansatz: $f(t) = 34 \cdot e^{kt}$, $f(4) = 34 \cdot e^{4k} = 70$,
$k = \frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{70}{34}\right) \approx 0{,}181$.
Das Wachstum des Alligatorenbestands wird durch die Funktion f mit $f(t) = 34 \cdot e^{0{,}181t}$ beschrieben.
b) Verdopplungszeit: $T_V = \frac{1}{k} \cdot \ln(2) \approx 3{,}84$ Jahre.
c) Wenn es zur Zeit t 1000 Alligatoren geben soll, muss $f(t) = 34 \cdot e^{0{,}181t} = 1000$ gelten, also
$t = \frac{1}{0{,}181} \cdot \ln\left(\frac{1000}{34}\right) \approx 18{,}73$.
Nach ca. 18,7 Jahren rechnet man mit 1000 Alligatoren.

6 $f(t) = 100 \cdot e^{kt}$, $f(5) = 100 \cdot e^{5k} = 150$,
$k = \frac{1}{5} \cdot \ln(1{,}5) \approx 0{,}081$
Verdopplungszeit: $T_V = \frac{1}{k} \cdot \ln(2) \approx 8{,}55$ Tage

7 **a)** $f(t) = 12 \cdot e^{\ln(2{,}5)t} \approx 12 \cdot e^{0{,}916t}$. Verdopplungszeit:
$T_V = \frac{1}{k} \cdot \ln(2) \approx 0{,}756\,s$. Prozentuale Zunahme pro Sekunde:
$(2{,}5 - 1) \cdot 100\,\% = 150\,\%$.
b) $f(t) = 1{,}3 \cdot e^{\ln(0{,}8)t} \approx 1{,}3 \cdot e^{-0{,}223t}$.
Halbwertszeit: $T_H = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 3{,}11\,s$.
Prozentuale Abnahme pro Sekunde:
$(1 - 0{,}8) \cdot 100\,\% = 20\,\%$.
c) $f(t) = 0{,}9 \cdot e^{3\ln(1{,}2)t} \approx 0{,}9 \cdot e^{0{,}547t}$.
Verdopplungszeit: $T_V = \frac{1}{k} \cdot \ln(2) \approx 1{,}267\,s$.
Prozentuale Zunahme pro Sekunde:
$(1{,}2^3 - 1) \cdot 100\,\% = 72{,}8\,\%$.

8 **a)**

t (in s)	0	1	2	3	4	5
f(t)	28	35	44	55	69	87
$\frac{f(t)}{f(t-1)}$		1,25	1,26	1,25	1,25	1,26

Pro Zeitschritt nimmt der Bestand annähernd konstant um den Faktor 1,254 (Mittelwert) zu. Es liegt also exponentielles Wachstum vor.
$f(t) = 28 \cdot e^{\ln(1{,}254) \cdot t} \approx 28 \cdot e^{0{,}226t}$
b)

t (in s)	0	2	4	6	8	10
f(t)	9,1	8,2	7,4	6,7	6,0	5,4
$\frac{f(t)}{f(t-2)}$		0,901	0,902	0,905	0,896	0,90

Pro zwei Zeitschritten nimmt der Bestand annähernd um den Faktor 0,9008 (Mittelwert) ab. Es liegt also exponentielles Wachstum vor. In einem Zeitschritt ist der Faktor $\sqrt{0{,}9008} \approx 0{,}9491$.
$f(t) = 9{,}1 \cdot e^{\ln(0{,}9491) \cdot t} \approx 9{,}1 \cdot e^{-0{,}0522t}$

Seite 73

11 **a)** $T_H = \frac{1}{k} \cdot \ln(0{,}5) = 24110$, somit
$k = \frac{\ln(0{,}5)}{24110} \approx 0{,}000\,028\,749$.
$m_{Pu}(6000) = 1 \cdot e^{-0{,}000\,028\,749 \cdot 6000} \approx 0{,}8416$
Nach 6000 Jahren sind von einem Kilogramm Plutonium-239 noch ca. 842 Gramm übrig.

b) Wenn 80 % von 1 kg Plutonmium-239 zerfallen sind, so sind noch 20 % übrig. Somit gilt $e^{-0{,}000\,028\,749\,t} = 0{,}2$, also $t = \frac{\ln(0{,}2)}{-0{,}000\,028\,749} \approx 55\,982$ Jahre.
c) Wenn 75 % zerfallen sind, so sind noch 25 % übrig. Das ist ein Viertel. Dies ist nach zwei Halbwertszeiten der Fall, also nach 48 220 Jahren.

12 (1) Falsch. Nach einer Halbwertszeit, also nach acht Tagen, ist die Hälfte übrig. Dies sind 16 g.
Nach weiteren acht Tagen ist von den 16 g wieder die Hälfte zerfallen. Also sind noch 8 g übrig.
(2) Wahr. Nach 24 Tagen, also drei Halbwertszeiten, ist noch ein Achtel, also 4 g, übrig.
(3) Falsch. Nach zweimal vier Tagen, also nach einer Halbwertszeit, ist die Hälfte übrig. Also sind nach den ersten vier Tagen noch $\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 70{,}7\,\%$ übrig. (Da in den zweiten vier Tagen der Bestand wieder um denselben Faktor abnimmt, sind nach acht Tagen noch $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 50\,\%$ übrig.)
(4) Wahr. In jedem Acht-Tage-Zeitraum nimmt der Bestand um 50 % ab.

13 Der Prozentsatz von C-14 zu C-12 ist zu Beginn 100 % des Werts bei lebenden Organismen. Er sinkt dann exponentiell gemäß $f(t) = 100 \cdot e^{kt}$. Aus $T_H = -\frac{1}{k} \cdot \ln(2)$ folgt
$k = -\frac{1}{T_H} \cdot \ln(2) = -\frac{1}{5730} \cdot \ln(2) \approx -0{,}000\,121$.
$100 \cdot e^{-0{,}000121 \cdot t} = 1{,}45 \;\Rightarrow\; t = -\frac{\ln(0{,}0145)}{0{,}000\,121} \approx 35\,000$.
Das Alter des Mammuts ist ca. 35 000 Jahre.

14 **a)** Beleuchtungsstärke in der Tiefe x:
$B(x) = 4000 \cdot e^{kx}$.
$B(1) = 4000 \cdot e^{k} = 0{,}8 \cdot 4000$.
Somit ist $k = \ln(0{,}8) = -0{,}223$ und
$B(x) = 4000 \cdot e^{-0{,}223\,x}$.
b) $B(10) \approx 430$. In 10 m Tiefe sind es noch ca. 430 Lux.
c) Da die Helligkeit exponentiell abnimmt, gibt es eine feste Tiefenzunahme, in der die Helligkeit auf die Hälfte absinkt. Diese Tiefe könnte man „Halbwertstiefe" nennen.
$T_H = -\frac{1}{k} \cdot \ln(2) \approx 3{,}1$. Die Halbwertstiefe ist ca. 3,1 m.

15 **a)** Dominik denkt, dass die Strahlungsstärke pro Zentimeter immer um den gleichen Wert, nämlich um 2 % der vor der Mauer vorhandenen Strahlungsstärke, abnimmt. Dann nähme sie in einer 50 cm dicken Mauer um $50 \cdot 2\,\% = 100\,\%$ ab und die Strahlung könnte die Mauer nicht durchdringen. Dies ist jedoch nicht richtig. Die Strahlungsstärke nimmt auf einem Zentimeter Mauer um 2 % von dem Wert ab, der vor diesem Zentimeter Mauer (also nicht vor der Mauer insgesamt) vorhanden war. Nach dem ersten Zentimeter sind also noch 98 % der Strahlungsstärke vorhanden, dann nach dem zweiten Zentimeter 98 % von 98 %, also $0{,}98^2 \cdot 100\,\%$ usw.
Die Strahlungsstärke nimmt bei Mauerdicke x auf 0, $98^x \cdot 100\,\%$ des Ausgangswertes ab. Bei $x = 50\,\text{cm}$ sind es also noch $0{,}98^{50} \cdot 100\,\% \approx 36{,}5\,\%$ des Ausgangswertes.
b) Die Strahlungsstärke nach 17 cm Mauerdicke beträgt noch $0{,}98^{17} \cdot 100\,\% \approx 70{,}9\,\%$.

16 **a)** $f(t) = f(0) \cdot 0{,}98^t = f(0) \cdot e^{\ln(0{,}98)\,t}$,
$T_H = \frac{1}{\ln(0{,}98)} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 34{,}3$; die Halbwertszeit beträgt ca. 34,3 Jahre.
b) $f(t) = f(0) \cdot e^{\ln(0{,}98)\,t} = 0{,}01 \cdot f(0)$; also $t = \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}98)} \approx 227{,}9$.
In knapp 230 Jahren sinkt die Bevölkerungszahl auf 1 % ab.

Seite 74

17 **a)** $f(t) = 100 - 80 \cdot e^{-0{,}1t}$, $f'(t) = 8 \cdot e^{-0{,}1t} > 0$, also nimmt die Karpfenzahl nie ab.
b) Da $80 \cdot e^{-0{,}1t} > 0$ ist, ist $f(t) = 100 - 80 \cdot e^{-0{,}1t} < 100$ für alle $t > 0$.
c) Wegen $80 \cdot e^{-0{,}1t} \to 0$ für $t \to \infty$ strebt $f(t) = 100 - 80 \cdot e^{-0{,}1t}$ für $t \to \infty$ gegen $S = 100$.
d)
$$\begin{aligned} f'(t) &= 8 \cdot e^{-0{,}1t} \\ &= 10 - (10 - 8 \cdot e^{-0{,}1t}) \\ &= 0{,}1 \cdot 100 - 0{,}1 \cdot (100 - 80 \cdot e^{-0{,}1t}) \\ &= 0{,}1 \cdot (S - f(t)) \end{aligned}$$

18 **a)** Zu Beginn ist die Temperatur $T(0) = 20 + 70 = 90$, also 90 °C. Langfristig erreicht die Kaffeetemperatur Raumtemperatur. Da $T(t) \to 20$ für $t \to \infty$ gilt, beträgt die Raumtemperatur 20 °C.
b) Es ist $T(30) = 20 + 70 \cdot e^{-30k} = 35{,}6$ und somit
$k = -\frac{1}{30} \cdot \ln\left(\frac{15{,}6}{70}\right) \approx 0{,}05$.
c) Es ist $T'(t) = -3{,}5 \cdot e^{-0{,}05t} = -1$ und somit
$t = -20 \cdot \ln\left(\frac{1}{3{,}5}\right) \approx 25{,}06$. Nach ca. 25 Minuten ist die momentane Änderungsrate der Kaffeetemperatur $-1\,\frac{°C}{min}$.
d)
$$\begin{aligned} T'(t) &= -70\,k \cdot e^{-kt} \\ &= k \cdot (20 - (20 + 70\,e^{-0{,}1t})) \\ &= k \cdot (20 - T(t)) \end{aligned}$$

20 $z(t) = 100 \cdot (10 - t) \cdot e^{kt}$,
$z'(t) = 100 \cdot e^{kt} \cdot (10k - 1 - tk)$,
$z''(t) = 100k \cdot e^{kt} \cdot (10k - 2 - tk)$,
$z'''(t) = 100k^2 \cdot e^{kt} \cdot (10k - 3 - tk)$
a) Mögliche Extremstellen:
$z'(t) = 100 \cdot e^{kt} \cdot (10k - 1 - tk) = 0$.
Lösung: $t = 10 - \frac{1}{k}$.
Untersuchung der möglichen Extremstelle:
$z''\left(10 - \frac{1}{k}\right) = 100k \cdot e^{10k-1} \cdot (-1) < 0$, also Maximumstelle.
Wenn $t = 10 - \frac{1}{k} = -10$ ist, so gilt $k = 0{,}05$.
b) Mögliche Wendestellen:
$z''(t) = 5 \cdot e^{0{,}05t} \cdot (-1{,}5 - 0{,}05t) = 0$.
Lösung: $t = -30$.
Untersuchung der möglichen Wendestelle:
$z'''(-30) = 0{,}25 \cdot e^{0{,}05 \cdot (-30)} \cdot (-1) < 0$, also maximale Zunahme.
Somit nimmt die Zuschauerzahl 30 Minuten vor Spielbeginn am stärksten zu.

21 Ein Wachstumsvorgang wird durch f mit $f(t) = f(0) \cdot e^{kt}$ beschrieben. Dann gilt
$f(t + \Delta t) = f(0) \cdot e^{k(t+\Delta t)} = f(0) \cdot e^{kt} \cdot e^{k\Delta t} = f(t) \cdot e^{k\Delta t}$.

Wenn der Wachstumsfaktor $a = e^k > 1$ ist, so nimmt der Bestand f im Zeitraum Δt unabhängig vom Bestand zu Beginn des Zeitraums immer um den Faktor $e^{k\cdot\Delta t} = a^{\Delta t}$ zu, also um den Prozentsatz $(a^{\Delta t} - 1)\cdot 100\,\%$.
Wenn der Wachstumsfaktor $a = e^k < 1$ ist, so nimmt der Bestand f im Zeitraum Δt um den Prozentsatz $(1 - a^{\Delta t})\cdot 100\,\%$ ab.

22 Die Funktion f mit $f(t) = 100 - 80\cdot e^{-0{,}1t}$ hat die Wertemenge $W_f = [20;\,100[$. Sie ist streng monoton wachsend. Falls für einen Zeitpunkt t also $f(t) < 50$ gilt, so gilt $2\cdot f(t) < 100$ und es gibt einen Zeitpunkt $t + T_V$ mit $f(t + T_V) = 2\cdot f(t)$, zu dem sich der Bestand also verdoppelt hat. Aus $100 - 80\cdot e^{-0{,}1t} < 50$ ergibt sich $t < -10\cdot\ln\left(\frac{5}{8}\right) \approx 4{,}7$. Es muss also t kleiner als 4,7 Stunden sein. Da der Graph von f rechtsgekrümmt ist, wird T_V immer größer, je größer $f(t)$ wird und sich 50 annähert. Die Verdopplungszeit ist also minimal für $f(0) = 20$. Dann gilt $f(T_V) = 100 - 80\cdot e^{-0{,}1T_V} = 40$. Das führt zu $T_V = -10\cdot\ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx 2{,}88$ Stunden.
(Alternativ: Aus $f(t + T_V) = 2\cdot f(t)$ folgt $100 - 80\cdot e^{-0{,}1(t+T_V)} = 2\cdot(100 - 80\cdot e^{-0{,}1t})$. Aufgelöst nach T_V ergibt sich $T_V(t) = -10\cdot\ln\left(2 - \frac{5}{4}\cdot e^{0{,}1t}\right)$.
Die Verdopplungszeit $T_V(t)$ existiert also für $2 - \frac{5}{4}\cdot e^{0{,}1t} > 0$, also $t < 10\cdot\ln\left(\frac{8}{5}\right) \approx 4{,}7$ Stunden.
Wenn t zunimmt, so sinkt $2 - \frac{5}{4}\cdot e^{0{,}1t}$ und damit steigt $T_V(t) = -10\cdot\ln\left(2 - \frac{5}{4}\cdot e^{0{,}1t}\right)$. Die Monotonie von $T_V(t)$ kann auch durch Ableiten bewiesen werden. Somit liegt ein Randextremum vor.
$T_V(t)$ ist also minimal für $t = 0$ mit $T_V(0) = -10\cdot\ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx 2{,}88$ Stunden.)

23 **a)** Vergleich 72er-Regel, 69er-Regel und Verdopplungszeit für verschiedene Zinssätze

p%	0,5%	1%	1,5%	2%	2,5%
72er-Regel (in Jahren)	144	72	48	36	28,8
69er-Regel (in Jahren)	138	69	46	34,5	27,6
Verdopplungszeit T_V in Jahren	138,98	69,66	46,56	35	28,07
bessere Regel	69er	69er	69er	69er	69er

p%	3%	3,5%	4%	4,5%	5%
72er-Regel (in Jahren)	24	20,57	18	16	14,4
69er-Regel (in Jahren)	23	19,71	17,25	15,33	13,8
Verdopplungszeit T_V in Jahren	23,45	20,15	17,67	15,75	14,21
bessere Regel	69er	72er	72er	72er	72er

b) Für Zinssätze $p < 3{,}5\,\%$ ist die 69er-Regel besser (genauer für $p < 3{,}4393845\ldots\%$; der Grenzprozentsatz ist die Lösung der Gleichung $4^p = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{141}$, denn es gilt $4^p = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{141} \Leftrightarrow \frac{72}{p} - \frac{\ln(2)}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)} = \frac{\ln(2)}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)} - \frac{69}{p}$).

c) Zinssatz $p\,\%$, Wachstumsfaktor $a = 1 + \frac{p}{100}$,
Wachstumskonstante $k = \ln(a) = \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) \approx \frac{p}{100}$ nach Näherung $\ln(1 + x) \approx x$
Verdopplungszeit:
$T_V = \frac{1}{k}\cdot\ln(2) \approx \frac{1}{\frac{p}{100}}\cdot\ln(2) = \frac{100\cdot\ln(2)}{p} \approx \frac{100\cdot 0{,}69}{p} = \frac{69}{p}$
(69er-Regel)

d) Lineare Näherung: $f(a + x) \approx f(a) + f'(a)\cdot x$ (vgl. Band 10, Seite 48).
Für $f(x) = \ln(x)$ und $f'(x) = \frac{1}{x}$ ergibt sich $\ln(a + x) \approx \ln(a) + \frac{1}{a}\cdot x$.
Für $a = 1$ folgt die lineare Näherung $\ln(1 + x) \approx \ln(1) + \frac{1}{1}\cdot x = x$.

e) 72 ist durch viele Zahlen teilbar, daher ist $\frac{72}{p}$ für viele Zinssätze im Kopf leichter berechenbar.
Außerdem ist die 72er-Regel für höhere Zinssätze (ab 3,5%) besser als die 69er-Regel.

Lambacher Schweizer

Das Lösungsheft enthält die Lösungen zu allen Aufgaben, die nicht im Schulbuch gelöst werden. Es unterstützt Sie im Unterricht und ermöglicht Ihren Schülerinnen und Schülern, sich zu Hause zu kontrollieren und ihr Wissen zu festigen.

Lambacher Schweizer Kursstufe Leistungsfach Lösungen

ISBN 978-3-12-735383-9