Lambacher Schweizer 10:
Auszug aus dem Schulbuch
zum Nachholen in Klasse 11

Lambacher Schweizer 10

Mathematik

Sachsen

Klett

Lambacher Schweizer 10, Mathematik für Gymnasien, Sachsen

Begleitmaterial
Zu diesem Buch gibt es ergänzend:
– Lösungsheft (ISBN 978-3-12-734103-4)
– Arbeitsheft mit zahlreichen Übungen plus Lösungsheft (ISBN 978-3-12-734104-1)
– Arbeitsheft mit zahlreichen Übungen plus Lösungsheft und Lernsoftware (ISBN 978-3-12-734106-5)
– Kompakt, Klasse 9/10, die wichtigsten Formeln und Merksätze mit Beispielen (ISBN 978-3-12-734395-3)

1. Auflage 1 5 4 3 2 1 | 2019 18 17 16 15

Alle Drucke dieser Auflage sind unverändert und können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.
Die letzten Zahlen bezeichnen jeweils die Auflage und das Jahr des Druckes.

Autorinnen und Autoren: Manfred Baum, Martin Bellstedt, Dr. Dieter Brandt, Heidi Buck, Dr. Detlef Dornieden, Christina Drüke-Noe, Prof. Rolf Dürr, Prof. Hans Freudigmann, Inga Giersemehl, Dieter Greulich, Prof. Dr. Heiko Harborth, Dr. Frieder Haug, Edmund Herd, Thomas Jörgens, Thorsten Jürgensen-Engl, Andreas König, Prof. Dr. Detlef Lind, Peter Neumann, Jutta Parkan, Rolf Reimer, Dr. Wolfgang Riemer, Reinhard Schmitt-Hartmann, Ulrich Schönbach, Raphaela Sonntag, Heike Spielmans, Andrea Stühler, Dr. Heike Tomaschek, Prof. Dr. Ingo Weidig, Dr. Peter Zimmermann
Für das Bundesland Sachsen bearbeitet von: Jens Negwer, Antje Nothnagel, Dr. Manfred Schwier, Prof. Dr. Hartmut Wellstein

Redaktion: Andreas Marte, Anke Stöckle
Mediengestaltung: Ulrike Glauner

Zeichnungen/Illustrationen: Uwe Alfer, Waldbreitbach; Helmut Holtermann, Dannenberg; Anja Malz, Taunusstein; MediaOffice, Kornwestheim; Sandra Oehler, Remseck; Claudia Rupp, Stuttgart; Andrea Staiger, Stuttgart
Bildkonzept Umschlag: SoldanKommunikation, Stuttgart
Satz: SMP Oehler, Remseck
Reproduktion: Meyle + Müller Medien-Management, Pforzheim
Druck: DBM Druckhaus Berlin-Mitte GmbH

Printed in Germany
ISBN 978-3-12-734101-0

9 783127 341010

Lambacher Schweizer 10

Mathematik für Gymnasien

Sachsen

bearbeitet von

Jens Negwer, Grimma
Antje Nothnagel, Grimma
Manfred Schwier, Dresden
Hartmut Wellstein, Würzburg

unter Beratung von
Horst Ocholt, Radeburg

Ernst Klett Verlag
Stuttgart · Leipzig

Inhaltsverzeichnis

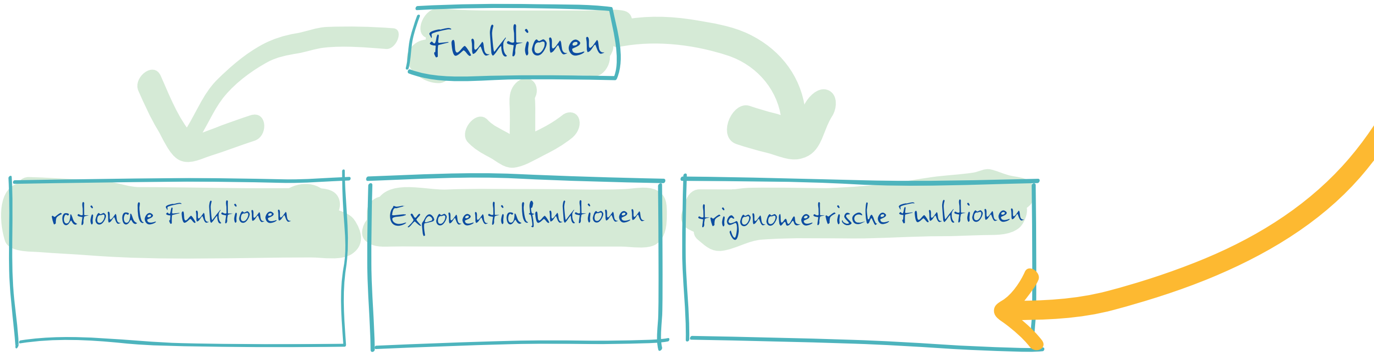
Bitte einordnen!

Die Funktionen f, g und h finden ihre Klasse nicht mehr. Kannst du ihnen helfen?

f: „Ich habe keine, eine oder zwei Nullstellen. Mein Graph hat entweder einen Hoch- oder Tiefpunkt.“

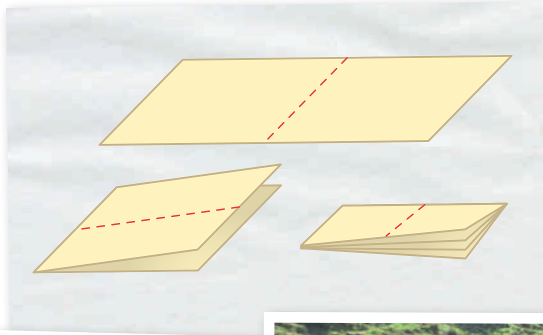
g: „Ich habe keine einzige Nullstelle und kann furchtbar groß werden.“

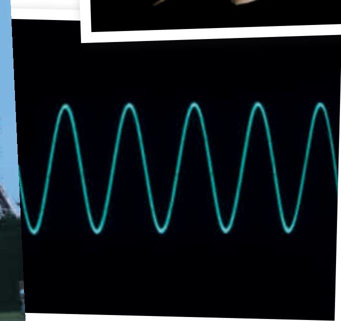
h: „Mein Graph ist kerzengerade.“



Das kannst du schon

- Eigenschaften von Funktionen beschreiben
- Funktionen graphisch darstellen
- Vorgänge mithilfe von Funktionen modellieren





Argumentieren / Kommunizieren

Problemlösen

Modellieren

Werkzeuge

Das kannst du bald

- Funktionen umkehren
- Funktionen verknüpfen
- Funktionen systematisieren
- Zahlenfolgen als spezielle Funktionen erkennen

2 Verknüpfen und Verketten von Funktionen

Das vermutlich größte Thermometer der Welt steht in Baker im US-Bundesstaat Kalifornien, dem Tor zum Death Valley.
Es zeigt zum Zeitpunkt der Aufnahme eine Temperatur von 106° Fahrenheit an.

Für die Umrechnung einer Temperaturangabe von der Kelvin-Skala in die Celsius-Skala gilt die Vorschrift $c(k) = k - 273$.
Für die Umrechnung einer Temperaturangabe von der Celsius-Skala in die Fahrenheit-Skala gilt die Vorschrift $f(c) = 1{,}8c + 32$.
Damit kann man jede Temperaturangabe der Kelvin-Skala in zwei Schritten auch in Grad Fahrenheit umrechnen. Geht dies noch einfacher?

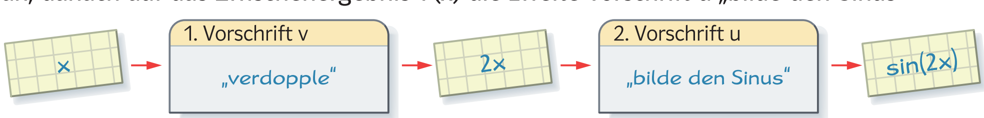
Aus zwei Funktionen u und v kann man durch die vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division neue Funktionen $u + v$; $u - v$; $u \cdot v$ und $\frac{u}{v}$ bilden.
Ist $u(x) = x^2 + 1$ und $v(x) = x - 2$, dann heißt die Funktion

$u + v$	mit $(u + v)(x) = u(x) + v(x) = x^2 + x - 1$	$D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$	**Summe** von u und v,
$u - v$	mit $(u - v)(x) = u(x) - v(x) = x^2 - x + 3$	$D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$	**Differenz** von u und v,
$u \cdot v$	mit $(u \cdot v)(x) = u(x) \cdot v(x) = (x^2 + 1)\cdot(x - 2)$	$D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$	**Produkt** von u und v,
$\frac{u}{v}$	mit $\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$	$D = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \neq 2\}$	**Quotient** von u und v.

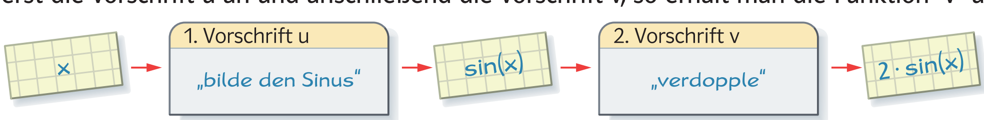
Beim Quotienten muss $v(x) \neq 0$ sein.

Gegeben sind die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$.
Die Funktionen $u(x) + v(x)$, $u(x) - v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$ sowie $\frac{u(x)}{v(x)}$ mit $v(x) \neq 0$ heißen **Verknüpfungen** von $u(x)$ und $v(x)$.

Die Funktion f mit $f(x) = \sin(2x)$ lässt sich durch keine dieser vier Arten aus den Funktionen u mit $u(x) = \sin(x)$ und v mit $v(x) = 2x$ bilden. Man benötigt eine weitere Möglichkeit, aus vorhandenen Funktionen neue Funktionen zu erzeugen.
Dazu wendet man auf die Variable x zuerst die erste Zuordnungsvorschrift v „verdopple“ an, danach auf das Zwischenergebnis $v(x)$ die zweite Vorschrift u „bilde den Sinus“:



In der Funktion u wird die Variable x durch den Term $v(x)$ ersetzt. Die entstandene neue Funktion nennt man **Verkettung von u und v** und schreibt $u \circ v$ mit $u(v(x)) = \sin(2x)$.
v nennt man **innere Funktion** und u **äußere Funktion**. Wendet man auf die Variable x zuerst die Vorschrift u an und anschließend die Vorschrift v, so erhält man die Funktion $v \circ u$:



Die Verkettung zweier Funktionen ist nicht kommutativ.

Es ist also $v \circ u$ mit $v(u(x)) = 2 \cdot \sin(x)$, dabei ist u die innere und v die äußere Funktion.
Die Funktionen $u \circ v$ und $v \circ u$ stimmen hier nicht überein.

Gegeben sind die Funktionen u und v.
Die Funktion $u \circ v$ mit $(u \circ v)(x) = u(v(x))$ heißt **Verkettung** von u und v. Dabei wird im Funktionsterm der Funktion u jedes x durch $v(x)$ ersetzt.

Für $u \circ v$ sagt man: „u nach v" oder „u verkettet mit v".

Beispiel 1
a) Bilde $u \circ v$ und $v \circ u$ für $u(x) = (1 - x)^2$ und $v(x) = 2x + 1$.
b) Bestimme für die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ zwei Funktionen g und h mit $g \circ h = f$.
c) Schreibe die Funktion k mit $k(x) = (3x + 1)^2$ als Summe, Produkt und als Verkettung zweier Funktionen.
Lösung:
a) $u(v(x)) = (1 - v(x))^2 = (1 - (2x + 1))^2 = (-2x)^2 = 4x^2$. Somit ist $u(v(x)) = 4x^2$.
$v(u(x)) = 2u(x) + 1 = 2(1 - x)^2 + 1 = 2(1 - 2x + x^2) + 1 = 2x^2 - 4x + 3$.
Somit ist $v(u(x)) = 2x^2 - 4x + 3$.
b) 1. Möglichkeit: Mit $h(x) = x + 3$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ergibt sich $g(h(x)) = \frac{1}{(x+3)^2}$.
2. Möglichkeit: Mit $h(x) = (x + 3)^2$ und $g(x) = \frac{1}{x}$ ergibt sich $g(h(x)) = \frac{1}{(x+3)^2}$.
c) Summe: Es ist $k(x) = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$. Mit $m(x) = 9x^2$ und $n(x) = 6x + 1$ ist $k(x) = m(x) + n(x)$.
Produkt: Es ist $k(x) = (3x + 1)^2 = (3x + 1) \cdot (3x + 1)$. Mit $p(x) = 3x + 1$ ist $k(x) = p(x) \cdot p(x)$.
Verkettung: Mit $q(x) = 3x + 1$ und $r(x) = x^2$ ist $k(x) = r(q(x))$.

Beispiel 2
Gegeben sind die Funktionen u und v mit $u(x) = \sqrt{x}$ und $v(x) = x^2 - 1$.
Bei der Verkettung $u \circ v$ liefert ein Rechner folgende Anzeigen:

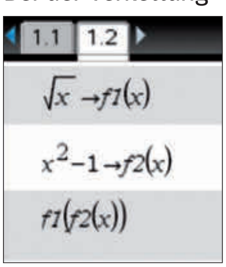


Fig. 1

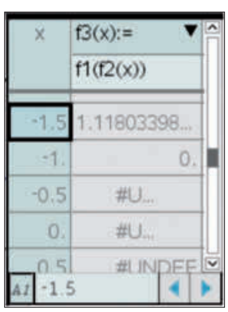


Fig. 2

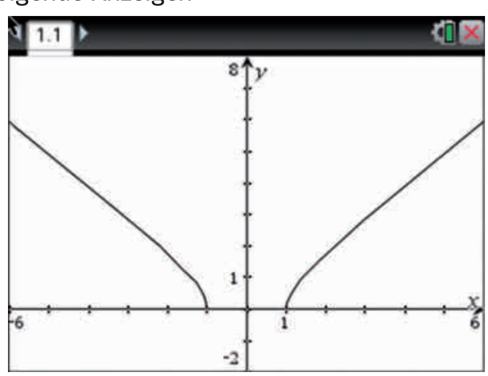


Fig. 3

a) Erläutere, wie die Tabellenanzeige für $x = -1$ und $x = -0{,}5$ zustande kommt (Fig. 2).
b) Erläutere den Graphen von $u \circ v$ in Bezug auf die Definitionsmenge (Fig. 3). Begründe.
Lösung:
a) Es ist $u(v(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$. Damit erhält man $u(v(-1)) = \sqrt{(-1)^2 - 1} = 0$ und $u(v(-0{,}5)) = \sqrt{(-0{,}5)^2 - 1} = \sqrt{-0{,}75}$. Da der Radikant negativ ist, kann die Wurzel nicht gezogen werden, das heißt, $u \circ v$ ist für $x = -0{,}5$ nicht definiert.
b) Für $-1 < x < 1$ gibt es keinen Graphen. Es ist $x^2 - 1 < 0$ für $-1 < x < 1$, also hat die Verkettung $u \circ v$ die Definitionsmenge $D = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \leqq -1 \text{ oder } x \geqq 1\}$.

Beispiel 3
Gib an, ob es sich bei $f(x)$ um eine Verknüpfung oder Verkettung handelt. Begründe.
a) $f(x) = -5x + 3$ b) $f(x) = 3^{\cos(x)}$
Lösung:
a) Verknüpfung, da z.B. $u(x) + v(x)$ mit $u(x) = -5x$ und $v(x) = 3$.
b) Verkettung, da $u(v(x))$ mit $u(x) = 3^x$ (äußere Funktion) und $v(x) = \cos(x)$ (innere Funktion).

Aufgaben

1 Bilde $u + v$; $u \cdot v$; $u \circ v$; $w \cdot v$ und $w \circ v$ für $u(x) = x^2$; $v(x) = x + 2$ und $w(x) = \sqrt{x}$.

2 Gib an, ob es sich bei $f(x)$ um eine Verknüpfung oder eine Verkettung handelt. Benenne gegebenenfalls die Art der Verknüpfung und die verknüpften Funktionen bzw. bei Verkettung die innere und die äußere Funktion.

Erinnere dich:
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

a) $f(x) = 3x^2 + 2x$ b) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ c) $f(x) = e^{\sin(x)}$ d) $f(x) = e^x + \sin(x)$
e) $f(x) = \tan(3x)$ f) $f(x) = 3x \cdot \tan(x)$ g) $f(x) = \frac{1}{(-4x+2)^2}$ h) $f(x) = \sqrt{3x^3 + 2}$

3 Bilde die Verkettungen $f(x) = u(v(x))$ und $g(x) = v(u(x))$.
a) $u(x) = 1 - x^2$; $v(x) = (1 - x)^2$ b) $u(x) = (x - 1)^2$; $v(x) = x + 1$
c) $u(x) = \sin(x)$; $v(x) = x + 1$ d) $u(x) = \sqrt{2x}$; $v(x) = x - 1$
e) $u(x) = \frac{1}{x+1}$; $v(x) = \cos(x)$ f) $u(x) = 2 - x$; $v(x) = 1$

4 Es ist $f(x) = u(v(x))$. Vervollständige die Tabelle.

	$v(x)$	$u(x)$	$f(x)$
a)	x^3	$3x + 1$	
b)		x^2	$(x^2 + 1)^2$

	$v(x)$	$u(x)$	$f(x)$
c)	$x^2 - 4$		$\frac{1}{2(x^2 - 4)}$
d)		$2 \cdot \sqrt{x}$	$2\sqrt{3 - 0{,}5x}$

5 Die Funktion f kann als Verkettung $u \circ v$ aufgefasst werden. Nenne mögliche Funktionen u und v.
a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ c) $f(x) = (\sin(x))^2$ d) $f(x) = \sin(x^2)$
e) $f(x) = \sqrt{x + 3}$ f) $f(x) = \sqrt{3x}$ g) $f(x) = 2^{x-3}$ h) $f(x) = 2^x - 3$

Bist du sicher?

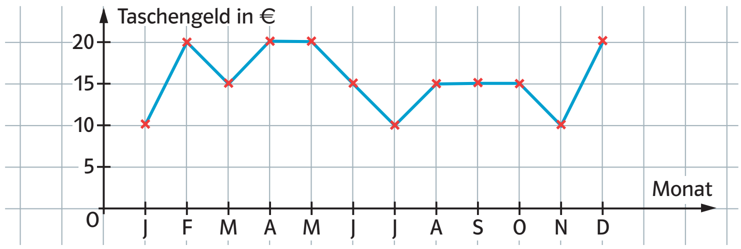
1 Gegeben sind die Funktionen $u(x) = 2x$ und $v(x) = \sin(x)$.
a) Bilde $u(x) + v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $u \circ v$ und $v \circ u$. Schreibe die jeweiligen Funktionsterme auf.
b) Stelle die Verknüpfungen und Verkettungen mit deinem GTR graphisch dar. Gib die Definitionsbereiche der neu entstandenen Funktionen an.

Wähle ein sehr großes Betrachtungsfenster bei deinem GTR.

6 Es sei $g(x) = x + 1$; $h(x) = x^2$; $k(x) = \frac{1}{x}$; $l(x) = \sqrt{x}$; $s(x) = \sin(x)$.
Drücke f durch g, h, k, l, s aus.
a) $f(x) = \frac{1}{x} - x - 1$ b) $f(x) = f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ c) $f(x) = \sqrt{x+1} + x^2$ d) $f(x) = \sin(x) + 1$

4 Zahlenfolgen als spezielle Funktionen

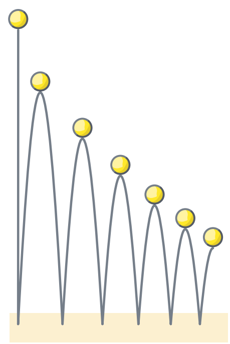
Luise: „Schau. Ich habe mein monatliches Taschengeld vom letzten Jahr in einem Diagramm dargestellt.“
Tobias: „Du kannst doch aber die einzelnen Werte nicht durch Linien verbinden.“



Fällt ein Ball aus einer Höhe von 2 Meter auf einen glatten Boden und erreicht er nach jedem Aufprall wieder das 0,8-Fache der vorherigen Höhe, so hängt die Höhe davon ab, wie oft der Ball bisher auf den Boden aufgetroffen ist. Die Höhe ist dabei eine Funktion der Nummer des Aufpralls. Man erhält eine Folge von Zahlen:

Höhe nach dem 1. Aufprall: $a_1 = 2 \cdot 0{,}8 = 1{,}6$
Höhe nach dem 2. Aufprall: $a_2 = a_1 \cdot 0{,}8 = 1{,}28$
… …
Höhe nach dem n-ten Aufprall: $a_n = a_{n-1} \cdot 0{,}8$

Die unabhängige Variable (die Nummer des Aufpralls) ist dabei eine natürliche Zahl. Derartige Funktionen nennt man **Zahlenfolgen**. Auch zur Beschreibung von Wachstumsvorgängen und zur Darstellung von irrationalen Zahlen sind Zahlenfolgen von Bedeutung.



Anstelle von Zahlenfolge sagt man oft nur Folge.

Hat eine Funktion f als Definitionsbereich die Menge $\mathbb{N}^*$ oder eine Teilmenge von $\mathbb{N}^*$, so nennt man f eine Zahlenfolge. Der Funktionswert f(n) wird mit a_n bezeichnet und heißt das n-te Glied der Folge. Für die Zahlenfolge schreibt man (a_n).

Im Folgenden ist $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \ldots\}$ und $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$. Die Folgenglieder a_n sind in der Regel keineswegs natürliche Zahlen.

Zahlenfolgen lassen sich wie andere Funktionen unterschiedlich darstellen.
Wortvorschrift: Ein Ball fällt aus 2 Meter Höhe auf einen glatten Boden und erreicht nach jedem Aufprall wieder das 0,8-Fache der vorherigen Höhe.
Die Höhe nach dem (n+1)-ten Aufprall ist berechenbar, wenn man die n-te Höhe kennt. Man spricht von einer **rekursiven Bildungsvorschrift** der Zahlenfolge. Man kann a_{n+1} aber auch direkt angeben (a = 2 m):

$a_1 = 2 \cdot 0{,}8$
$a_2 = a_1 \cdot 0{,}8 = (2 \cdot 0{,}8) \cdot 0{,}8 = 2 \cdot 0{,}8^2$
$a_3 = a_2 \cdot 0{,}8 = (2 \cdot 0{,}8^2) \cdot 0{,}8 = 2 \cdot 0{,}8^3$
…
$a_n = a_{n-1} \cdot 0{,}8 = (2 \cdot 0{,}8^{n-1}) \cdot 0{,}8 = 2 \cdot 0{,}8^n$
$a_{n+1} = a_n \cdot 0{,}8 = (2 \cdot 0{,}8^n) \cdot 0{,}8 = 2 \cdot 0{,}8^{n+1}$

In diesem Fall erhält man eine **explizite Bildungsvorschrift** der Zahlenfolge. Hierbei ist zu jedem Wert $n \in \mathbb{N}^*$ der Wert a_n direkt berechenbar.
Fig. 1 zeigt die **grafische Darstellung** der Zahlenfolge.

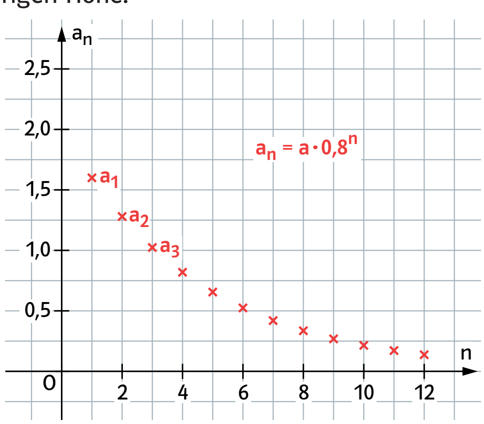


Fig. 1

***Merke:** Bei der rekursiven Bildungsvorschrift muss ein konkretes Zahlenfolgenglied angegeben werden (man verwendet oft das erste Glied).*

Anstelle Bildungsvorschrift sagt man auch Zuordnungsvorschrift.

Liest man aus der grafischen Darstellung die Höhe nach dem 1., 2., 3. … Aufprall ab oder berechnet die jeweilige Höhe mit einer der Bildungsvorschriften, so kann eine **Wertetabelle** erstellt werden:

n (n-ter Aufprall)	1	2	3	4	5
a_n (Höhe in m)	1,60	1,28	1,024	0,8192	0,65536

Umgekehrt erhält man aus einer Wertetabelle die grafische Darstellung.
Bemerkung: Da der Definitionsbereich bei Zahlenfolgen nur die natürlichen Zahlen umfasst, können in der grafischen Darstellung nur Punkte eingetragen werden.

Beispiel

Eine Zahlenfolge (a_n) ist explizit gegeben durch $a_n = 3^n$.

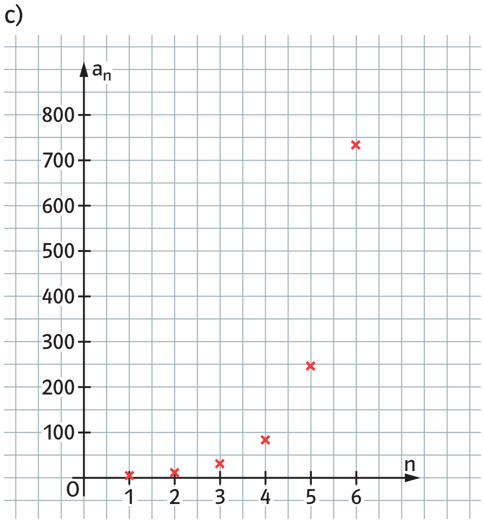
a) Berechne die ersten 8 Glieder der Zahlenfolge.
b) Ermittle eine rekursive Bildungsvorschrift der Zahlenfolge.
c) Stelle die ersten 5 Glieder der Zahlenfolge grafisch dar.
d) Bestimme mithilfe eines CAS oder GTR, ab welchem n der Wert des Zahlenfolgengliedes größer als 1 000 000 ist.

Lösung:

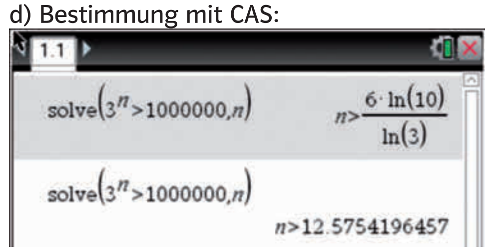
a) $a_1 = 3^1 = 3$ $\quad a_2 = 3^2 = 9$ $\quad a_3 = 3^3 = 27$ $\quad a_4 = 3^4 = 81$
$a_5 = 3^5 = 243$ $\quad a_6 = 3^6 = 729$ $\quad a_7 = 3^7 = 2187$ $\quad a_8 = 3^8 = 6561$

b) $a_2 = 9 = 3 \cdot 3 = a_1 \cdot 3$
$a_3 = 27 = 9 \cdot 3 = a_2 \cdot 3$
$a_4 = 81 = 27 \cdot 3 = a_3 \cdot 3$
…
$a_{n+1} = a_n \cdot 3,\ a_1 = 3$

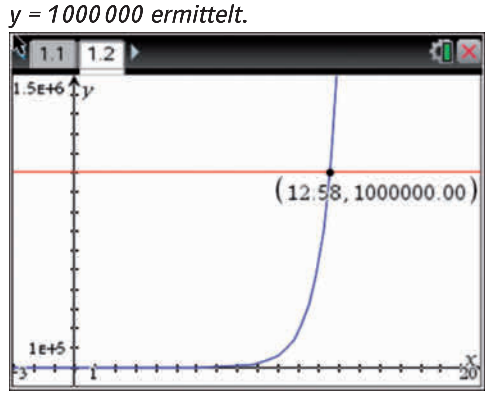
c)



d) Bestimmung mit CAS:



Bestimmung mit GTR:
Man löst grafisch die Gleichung $3^x = 1\,000\,000$, indem man den Schnittpunkt der Graphen von $y = 3^x$ und $y = 1\,000\,000$ ermittelt.



Ab n = 13 ist der Wert des Zahlenfolgengliedes größer als 1 000 000.

Aufgaben

1 Berechne die ersten zehn Glieder der Zahlenfolge (a_n). Stelle die Zahlenfolge grafisch dar.

a) $a_n = \frac{2n}{5}$ b) $a_n = \frac{1}{n}$ c) $a_n = (-1)^n$ d) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e) $a_n = 2$ f) $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

2 Berechne die ersten zehn Glieder der rekursiv dargestellten Zahlenfolge (a_n). Versuche eine explizite Bildungsvorschrift der Folge anzugeben.

a) $a_1 = 1;\ a_{n+1} = 2 + a_n$ b) $a_1 = 1;\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n$

c) $a_1 = \frac{1}{2};\ a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ c) $a_1 = 0;\ a_2 = 1;\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

3 Eine Ware mit dem heutigen Preis von 1,00 € wird durch eine jährliche Inflation von konstant 5 % laufend teurer.

a) Berechne zu einer Inflationsrate von 5 % und einer beliebigen Jahreszahl n den zugehörigen Warenpreis und erstelle einen Graphen für die ersten 20 Jahre.

b) Berechne den Zeitraum, nach welchem sich der Preis der Ware verdoppelt hat.

Bist du sicher?

1 Berechne die ersten fünf Glieder der Zahlenfolge (a_n).

a) $a_n = \frac{2n}{n+1}$ b) $a_1 = 0;\ a_{n+1} = 2a_n - 2$ c) $a_1 = 2;\ a_{n+1} = 2a_n - 2$

2 Ein Haus mit einem ursprünglichen Wert von 200 000 € verliert jährlich 2 % vom Vorjahreswert. Bestimme eine explizite Bildungsvorschrift für den Wert des Hauses nach n Jahren.

4 Ermittle mithilfe eines CAS oder GTR, für welche n der Wert des Zahlenfolgengliedes größer als 500 (kleiner als 0) ist.

a) $a_n = 0{,}5 \cdot 2^n$ b) $a_n = 0{,}8^n - 1$ c) $a_n = \frac{1000}{n}$ d) $a_n = \frac{10n}{n-2}$

5 Intelligenztests bestehen zu einem Teil darin, aus den ersten Folgegliedern eine Bildungsvorschrift für weitere Glieder zu ermitteln. Ermittle entsprechend eine Bildungsvorschrift für a_n und berechne jeweils a_{10} und a_{20}.
Wie verhält sich die Folge für sehr große n?

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a)	1	−2	3	−4	5
b)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$
c)	16	−8	4	−2	1
d)	−4	−1	2	5	8
e)	3	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{2}{3}$	$4\frac{1}{4}$	$3\frac{4}{5}$

Wie intelligent ist eine solche Aufgabe aus mathematischer Sicht?

6 Von zwei gleich großen Würfeln der Kantenlänge 1 wird einer in 8 gleich große Würfel zerlegt und einer der dabei erhaltenen Würfel wie in Fig. 1 auf den anderen gestellt. Dieses Verfahren wird wiederholt.

a) Berechne das Volumen des entstandenen Körpers nach der 1., der 2. und der 3. Teilung.

b) Gib das n-te Glied der Zahlenfolge (V_n) an, die jedem n das Volumen V_n des entstandenen Körpers zuordnet.

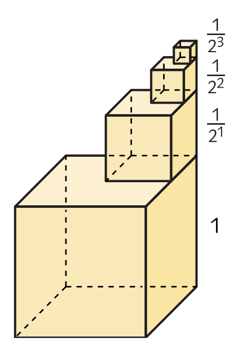


Fig. 1

7 Gegeben ist eine Folge (a_n) mit $a_{n+1} = \sqrt{a_n} - 0{,}25$ mit $a_1 = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Berechne die ersten 10 Glieder der Folge. Erstelle dazu einen Graphen. Äußere eine Vermutung, ob sich die Glieder der Zahlenfolge mit wachsendem n einem bestimmten Wert annähern.

5 Grenzwerte von Zahlenfolgen

Pro Minute kühlt sich die Milch um 5 % ab. Wird sie gefrieren?

Betrachtet man die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = 0{,}8^n$, dann sieht man, dass alle ihre Glieder größer als $S_u = 0$ und kleiner $S_o = 1$ sind. Es gilt also: $S_u < a_n < S_o$.
Die Ungleichung gilt auch für andere Werte von S_u und S_o; z. B. gilt: $-0{,}4 < a_n < 1{,}4$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ (Fig. 1).

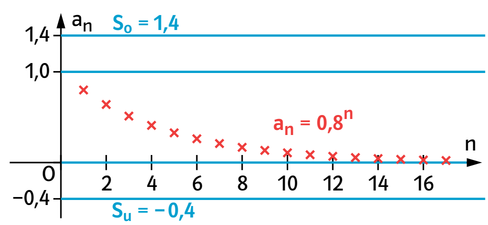


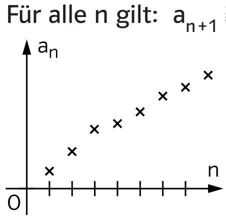
Fig. 1

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl S_o gibt, so dass für alle Folgenglieder $a_n \leqq S_o$ ist, nach **unten beschränkt**,wenn es eine Zahl S_u gibt, so dass für alle Folgenglieder $a_n \geqq S_u$ ist.
S_o nennt man eine **obere Schranke**, S_u eine **untere Schranke** der Folge.
Eine nach oben und unten beschränkte Folge heißt **beschränkte Folge**.

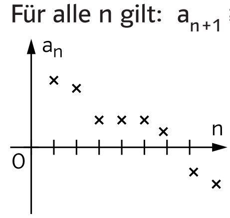
*Eine Zahlenfolge heißt **streng** monoton steigend für $a_{n+1} > a_n$ und **streng** monoton fallend für $a_{n+1} < a_n$.*

Zahlenfolgen als spezielle Funktionen können monoton sein.

Monoton steigend
Für alle n gilt: $a_{n+1} \geqq a_n$



Monoton fallend
Für alle n gilt: $a_{n+1} \leqq a_n$



Ist eine Zahlenfolge nach oben beschränkt und ist sie monoton steigend, dann nähern sich mit wachsendem n die Glieder der Folge der kleinsten oberen Schranke an. Ist eine Zahlenfolge nach unten beschränkt und ist sie monoton fallend, dann nähern sich mit wachsendem n die Glieder der Folge der größten unteren Schranke an.

Eine Zahlenfolge kann höchstens einen Grenzwert besitzen.

Bei einer monoton steigenden, nach oben beschränkten Zahlenfolge nennt man die kleinste obere Schranke **Grenzwert** der Zahlenfolge. Bei einer monoton fallenden, nach unten beschränkten Zahlenfolge nennt man die größte untere Schranke **Grenzwert** der Zahlenfolge.

Folgen, die einen Grenzwert haben, nennt man **konvergente** Folgen. Folgen ohne Grenzwert nennt man **divergente** Folgen.
Hat eine Folge (a_n) den Grenzwert 0, so nennt man (a_n) **Nullfolge**.
Folgen, deren Glieder Brüche mit konstantem Zähler sind und deren Nenner eine Potenz von n mit positivem Exponent ist, sind Nullfolgen, z. B. $\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{3}{n^2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \left(\frac{3}{4n^{\frac{2}{3}}}\right) \dots$.

Um den Grenzwert der Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{2n+10}{5n}$ zu ermitteln, kann man folgendes Verfahren anwenden: Man zerlegt den Funktionsterm in $a_n = \frac{2}{5} + \frac{2}{n}$. Die Folge (a_n) kann somit als Summe der konstanten Folge (b_n) mit $b_n = \frac{2}{5}$ und der Folge (c_n) mit $c_n = \frac{2}{n}$ aufgefasst werden, also $\left(\frac{2n+10}{5n}\right) = \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{n}\right)$. Die Folge (b_n) hat den Grenzwert $\frac{2}{5}$, die Folge (c_n) hat den Grenzwert 0. Von den Grenzwerten der Einzelfolgen kann man auf den Grenzwert der Summenfolge schließen:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+10}{5n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{5} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \frac{2}{5} + 0 = \frac{2}{5}$.
Dieses Vorgehen ist zulässig und lässt sich sogar verallgemeinern:

Statt „die Zahlenfolge (a_n) hat den Grenzwert g" schreibt man kurz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (lies: Limes a_n für n gegen unendlich gleich g) limes (lat.): Grenze

Grenzwertsätze
Sind die Folgen (a_n) und (b_n) konvergent und haben sie die Grenzwerte a und b, so sind auch die Folgen $(a_n \pm b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ und, sofern $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$ sind, auch die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergent. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, \quad b_n \neq 0 \text{ und } b \neq 0$$

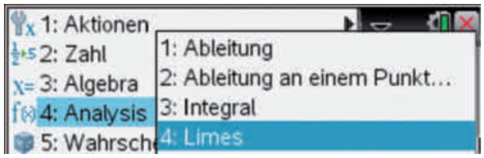
Beispiel 1
Untersuche (a_n) mit $a_n = \frac{3}{n}$ auf Beschränktheit.
Lösung:
$a_1 = 3$ $\quad a_2 = 1{,}5$ $\quad a_3 = 1$ $\quad a_4 = 0{,}75$ $\quad a_5 = 0{,}6$

Vermutung: $S_u = 0$
$a_n \geqq 0$
$\frac{3}{n} \geqq 0 \quad | \cdot n$
$3 \geqq 0$ wahre Aussage, also $S_u = 0$

Vermutung: $S_o = 3$
$a_n \leqq 3$
$\frac{3}{n} \leqq 3 \quad | \cdot n$
$3 \leqq 3n \quad | :3$
$1 \leqq n$ wahre Aussage, also $S_o = 3$

Beispiel 2
Berechne für die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{3n-2}{2+n}$ die ersten 5 Folgenglieder und a_{10}, a_{100} und a_{1000}. Stelle eine Vermutung über den Grenzwert der Zahlenfolge auf und überprüfe mit einem CAS.
Lösung:
$a_1 = \frac{1}{3} \approx 0{,}3$ $\quad a_2 = 1$ $\quad a_3 = 1{,}4$ $\quad a_4 = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$
$a_5 = \frac{13}{7} \approx 1{,}86$ $\quad a_{10} = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$ $\quad a_{100} = \frac{149}{51} \approx 2{,}9$ $\quad a_{1000} = \frac{1499}{501} \approx 2{,}99$

Vermutung: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{2+n}\right) = 3$



mit CAS:

Beispiel 3

Ermittle mithilfe der Grenzwertsätze die Grenzwerte von (a_n) mit $a_n = 5 - \frac{3}{n^2}$ und (b_n) mit $b_n = \frac{5-2n}{3n+6}$.

Lösung:

Erinnere dich:
Folgen, deren Glieder Brüche mit konstantem Zähler sind und deren Nenner eine positive Potenz von n ist, sind Nullfolgen.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}5 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right) = 5 - 0 = 5$$

Termumformung von b_n: $\frac{5-2n}{3n+6} = \frac{n\cdot\left(\frac{5}{n}-\frac{2n}{n}\right)}{n\cdot\left(\frac{3n}{n}+\frac{6}{n}\right)} = \frac{\frac{5}{n}-2}{3+\frac{6}{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5-2n}{3n+6}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{5}{n}-2}{3+\frac{6}{n}}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}\right)-\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6}{n}\right)} = \frac{0-2}{3+0} = -\frac{2}{3}$$

Beispiel 4

Zeige mithilfe der Grenzwertsätze, dass (a_n) mit $a_n = \frac{-n^2}{n+1}$ divergent ist.

Lösung:

Termumformung von a_n: $\frac{-n^2}{n+1} = \frac{n\cdot\left(\frac{-n^2}{n}\right)}{n\cdot\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)} = \frac{-n}{1+\frac{1}{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n^2}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(-n)}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\text{„}-\infty\text{“}}{1+0}$$ $\Rightarrow$ existiert nicht

Aufgaben

1 Untersuche (a_n) auf Beschränktheit.

a) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ b) $a_n = \frac{4}{n+1}$ c) $a_n = 3n - 2$ d) $a_n = \frac{8n}{n^2+1}$

2 Berechne für (a_n) mit a_n die ersten 5 Folgenglieder und a_{10}, a_{100} und a_{1000}. Stelle eine Vermutung über den Grenzwert der Zahlenfolge auf und überprüfe mit einem CAS.

a) $a_n = \frac{1+n}{2n}$ b) $a_n = \frac{n^2-1}{n^2}$ c) $a_n = -7 - \frac{100}{n}$ d) $a_n = \frac{8n}{n^2+1}$

e) $a_n = \frac{4n^2-2}{2-n}$ f) $a_n = \frac{2^{n+1}}{2^n+1}$ g) $a_n = \frac{-\sqrt{2}\cdot n^2+\sqrt{2}}{\sqrt{6}\cdot n^2}$ h) $a_n = \frac{1-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$

3 Untersuche auf Beschränktheit. Gib gegebenenfalls eine Schranke an.

a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ b) $\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$ c) $\left(\frac{1+4n}{3+5n}\right)$ d) $\left(\frac{1+4n}{2n-1}\right)$

4 Gib den Grenzwert von (a_n) an.

a) $a_n = 4 + \frac{1}{n}$ b) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}$ c) $a_n = \frac{1}{n} - 2$ d) $a_n = 5 - \frac{1}{n}$

e) $a_n = \frac{n+1}{n}$ f) $a_n = \frac{2n+1}{n}$ g) $a_n = \frac{1-n}{n}$ h) $a_n = \frac{1-3n}{n}$

5 Zerlege die Folge (a_n) in eine konstante Folge plus eine Nullfolge und gib ihren Grenzwert an.

a) $a_n = \frac{8+n}{4n}$ b) $a_n = \frac{8+\sqrt{n}}{4\sqrt{n}}$ c) $a_n = \frac{8+2^n}{4\cdot 2^n}$ d) $a_n = \frac{6+n^4}{\frac{1}{4}n^4}$ e) $a_n = \frac{4+n^3}{n^3}$

6 Berechne den Grenzwert der Zahlenfolge (a_n) durch Umformen und Anwenden der Grenzwertsätze.

a) $a_n = \frac{1+2n}{1+n}$ b) $a_n = \frac{7n^3+1}{n^3-10}$ c) $a_n = \frac{n^2+2n+1}{1+n+n^2}$ d) $a_n = \frac{n^5-n^4}{6n^5-1}$

e) $a_n = \frac{2+\sqrt{2}\cdot n}{n}$ f) $a_n = \frac{1}{n^2}$ g) $a_n = \frac{1-n^2}{n^2}$ h) $a_n = \frac{2-n^2}{3n^2}$

i) $a_n = \frac{n-3}{4n}$ j) $a_n = \frac{n\cdot(n+1)}{4n^2}$ k) $a_n = \frac{4+3^n}{3^n}$ l) $a_n = \frac{3^n}{4+3^n}$

7 Bestimme den Grenzwert.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-1}{2^{n-1}}\right)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{1+4^n}\right)$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}\right)$

Bist du sicher?

1 Gib den Grenzwert der Zahlenfolge (a_n) an.

a) $a_n = \frac{3}{n}$ b) $a_n = 0{,}5 - \frac{1}{n}$ c) $a_n = \frac{2}{3n} + 7$ d) $a_n = -\frac{10}{n} + \frac{5}{n^2} - 3 + \frac{1}{10n}$

2 Berechne mithilfe der Grenzwertsätze den Grenzwert der Zahlenfolge (a_n).

a) $a_n = \frac{2-n^2}{0{,}3n^2}$ b) $a_n = 5 + \frac{n}{n+1}$ c) $a_n = \frac{1}{n}\cdot(2+n)$ d) $a_n = \frac{2}{n} - 4 + \frac{n^3}{1-n^3}$

3 Untersuche (a_n) auf Beschränktheit.

a) $a_n = 2n+5$ b) $a_n = \frac{3}{n}$ c) $a_n = \frac{n}{n+1}$ d) $a_n = \frac{n\cdot(n+2)}{n^2+2}$

8 Untersuche auf Konvergenz. Gib gegebenenfalls den Grenzwert an.

a) $a_n = \frac{6n-7}{n+1}$ b) $a_n = \frac{1-n^3}{1+n^2}$ c) $a_n = \frac{2n^2-3}{n^2+1}$ d) $a_n = \frac{-3n+2}{-(3n+2)}$

e) $a_n = \frac{(n+3)^2}{n+3}$ f) $a_n = \frac{-3(n+2)(n-2)}{n^2-4}$ g) $a_n = \frac{n(n-4)}{n^4-4}$ h) $a_n = \frac{-5(n+3)}{(n-3)^2}$

9 Gib eine mögliche Bildungsvorschrift für eine Folge (a_n) an, die den gegebenen Grenzwert besitzt.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 2$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 1$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = -2$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = -3$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0{,}5$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = -0{,}10$ g) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \frac{2}{3}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = -\frac{5}{8}$

10 Zeige mithilfe der Grenzwertsätze die Richtigkeit der Gleichung.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+15}{5n}\right) = 0{,}8$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-18}{3n^2}\right) = \frac{2}{3}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{12n^2+3}{(2n+1)^2}\right) = 3$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 3^n+1}{3^{n-1}}\right) = 6$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(1-n)\cdot(1+n)}{n^2}\right) = -1$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)(n+3)}{3n^2+6n}\right) = \frac{1}{3}$

11 Untersuche, ob (a_n) konvergent ist. Verwende ein CAS.

a) $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$ b) $a_n = \frac{\cos(n)-1}{n}$ c) $a_n = 2^{-n}\sin(n)$ d) $a_n = n + \cos(n)$

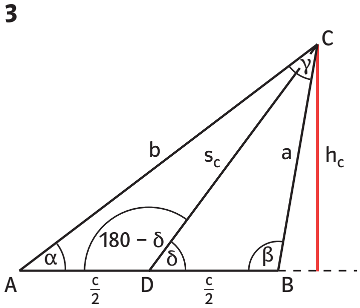
e) $a_n = n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ f) $a_n = n(2+\sin(n))$ g) $a_n = \sin(n)$ h) $a_n = n\cdot\sin(n)$

12 Ermittle mithilfe der Grenzwertsätze die Grenzwerte der Zahlenfolgen (a_n), (b_n), $(c_n) = (a_n + b_n)$, $(d_n) = (a_n - b_n)$ und $(e_n) = (a_n \cdot b_n)$, wenn für a_n und b_n gilt:

a) $a_n = 6;\ b_n = \frac{6}{n}$ b) $a_n = -\frac{1}{n};\ b_n = 2 + \frac{2}{n}$

c) $a_n = 4 - \frac{1}{n};\ b_n = 3 + \frac{1}{n}$ d) $a_n = \frac{2}{n} + 1;\ b_n = -\frac{3}{n} - 5$

3



a) Erst sind die Winkel β und δ mit dem Kosinussatz im Dreieck DBC zu bestimmen. Danach können im Dreieck ADC mit dem Kosinussatz die Seite b und mit dem Sinussatz der Winkel α bestimmt werden.
$\delta \approx 57{,}5°$; $\beta \approx 92{,}5°$
$b \approx 6{,}0\,cm$; $\alpha \approx 39{,}1°$
also: $\gamma \approx 48{,}4°$
b) $h_c \approx 3{,}8\,cm$

4

a) $b \approx 12{,}5\,cm$; also $u \approx 25{,}8\,cm$
$h_b = c \cdot \sin(\alpha)$; $h_b \approx 2{,}2\,cm$;
also $A \approx 13{,}8\,cm^2$
b) $s_b \approx 2{,}7\,cm$

5

a) $\overline{BC} \approx 505\,m$
b) $\sphericalangle ABC \approx 41{,}5°$
$\sphericalangle BCA \approx 65{,}5°$

6

a) $d = 3{,}78\,cm$; $f = 4{,}95\,cm$; $A = 18{,}72\,cm^2$
b) $\varphi = 66{,}7°$

7

a) $h \approx 10{,}52\,m$; $d \approx 11{,}18\,m$; $c \approx 8{,}69\,m$; $A \approx 172\,m^2$
$P = 172\,m^2 \cdot 85\frac{€}{m^2} \cdot 1{,}19 = 17\,397{,}80\,€$
Das Grundstück kostet ca. 17 400 €.
b) $c + d \approx 8{,}7\,m + 11{,}2\,m \approx 19{,}9\,m$
Die Länge des Zaunes beträgt ca. 20 Meter.

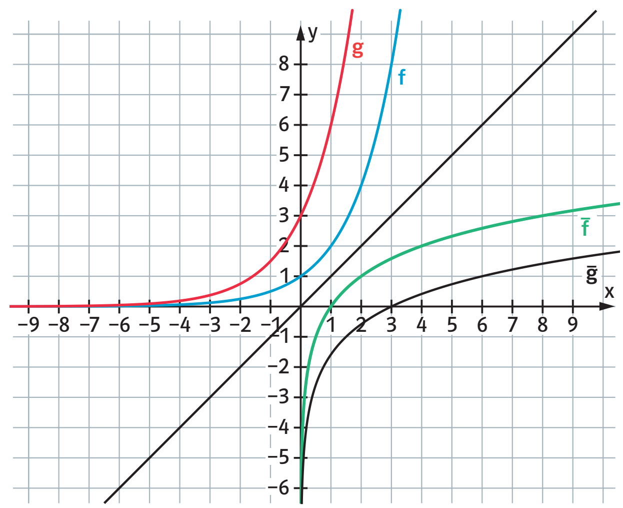
Kapitel V, Bist du sicher, Seite 142

1

a) $\log_a(9) = 3 \rightarrow a^3 = 9 \rightarrow a = \sqrt[3]{9} \approx 2{,}08$
b) $a = \sqrt{100} = 10$
c) $a = \sqrt[9]{3} \approx 1{,}13$
d) $a^{-1} = 0{,}5 \rightarrow a = 2$
e) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \rightarrow a = 2$
f) $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4} \rightarrow a = 2$

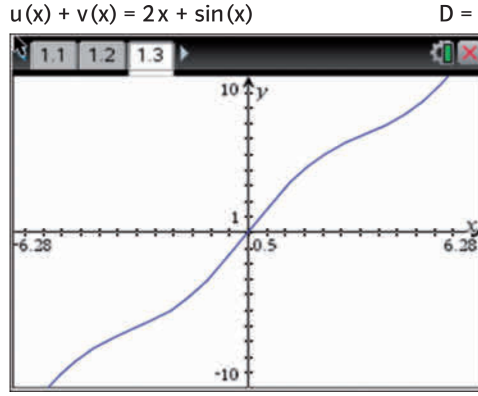
2

Der Graph von $\bar{g}$ ist gegenüber demjenigen von $\bar{f}$ parallel zur y-Achse verschoben.
Verschiebungszahl $\log_2\left(\frac{x}{3}\right) = \log_2(x) - \log_2(3)$
Der Graph von $\bar{g}$ entsteht, wenn man den Graphen von $\bar{f}$ um $\log_2(3)$ nach unten verschiebt.

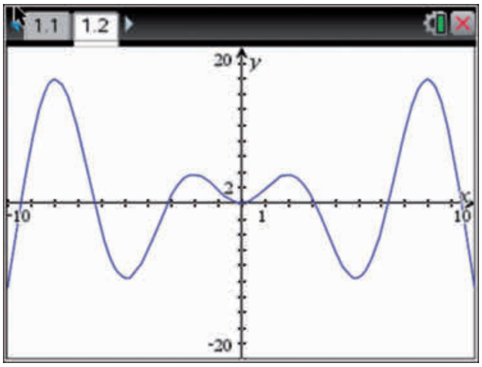


Kapitel V, Bist du sicher?, Seite 146

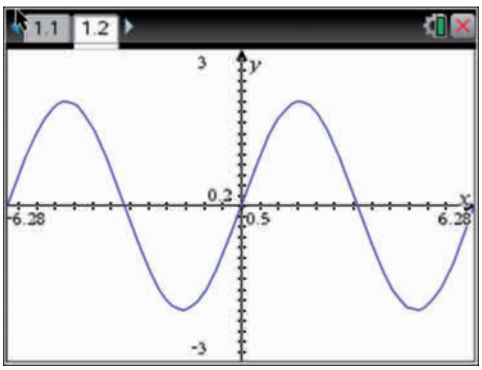
a) b)
$u(x) + v(x) = 2x + \sin(x)$ $\qquad D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$



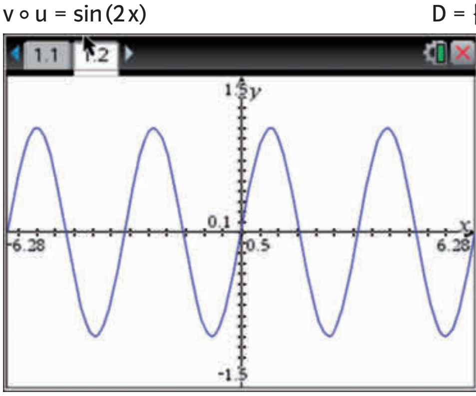
$u(x) \cdot v(x) = 2x \cdot \sin(x)$ $\quad D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$



$u \circ v = 2 \cdot (\sin(x))$ $\quad D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$



$v \circ u = \sin(2x)$ $\quad D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$



Kapitel V, Bist du sicher, Seite 150

1

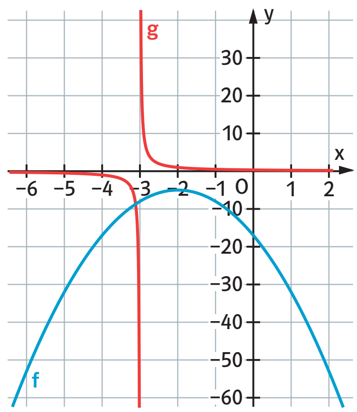
a) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

b) $f(9) = -368$; $f(0{,}25) = -\frac{323}{16}$; $g(9) = \frac{1}{12}$;

$g(0{,}25) = \frac{4}{13} \approx 0{,}3077$

c) $W_f = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ und } y < -5\}$

$W_g = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ und } y \neq 0\}$



2

$A(x) = x(500 - 0{,}5x)$; $D_A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1000\}$

Kapitel V, Bist du sicher?, Seite 153

1

a) $a_1 = 1$	$a_2 = \frac{4}{3}$	$a_3 = \frac{3}{2}$	$a_4 = \frac{8}{5}$	$a_5 = \frac{5}{3}$
b) $a_1 = 0$	$a_2 = -2$	$a_3 = -6$	$a_4 = -14$	$a = -30$
c) $a_1 = 2$	$a_2 = 2$	$a_3 = 2$	$a_4 = 2$	$a_5 = 2$

2

$a_n = 200\,000 \cdot 0{,}98^{n-1}$

Kapitel V, Bist du sicher?, Seite 157

1

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3}{n} = 0$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} 0{,}5 - \frac{1}{n} = 0{,}5$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2}{3n} + 7 = 7$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} -\frac{10}{n} + \frac{5}{n^2} - 3 + \frac{1}{10n} = -3$

2

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2 - n^2}{0{,}3n^2}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2\left(\frac{2}{n^2} - 1\right)}{n^2 \cdot 3} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{2}{n^2} - 1}{0{,}3} = -\frac{10}{3}$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(5 + \frac{n}{n+1}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(5 + \frac{n}{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^6$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot (2 + n) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2}{n} + 1\right) = 1$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} - 4 + \frac{n^3}{1-n^3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} - 4 + \frac{n^3}{n^3\cdot\left(\frac{1}{n^3}-1\right)}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} - 4 + \frac{1}{\frac{1}{n^3}-1}\right) = -5$

3

a) nach unten beschränkt
b) nach unten beschränkt
c) nach oben und unten beschränkt
d) nach oben und unten beschränkt

Kapitel V, Training, Seite 163

1

a) Ja, da jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet wird.
b) Nein, da allen x-Werten außer den x-Werten 0 und 8 zwei y-Werte zugeordnet werden.
c) Nein, da dem x-Wert 3 unendlich viele y-Werte zugeordnet werden.
d) Ja, da jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet wird.

2

a) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \{y \text{ mit } y \geqq -7\}$
b) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \{y \text{ mit } y \leqq 3\}$
c) $D_f = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 4\}$, $W_f = \{y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$
d) $D_f = \{x \in \mathbb{R}, x \neq \pm 3\}$, $W_f = \{y \in \mathbb{R}, y < \frac{5}{18}\}$

3

a) $\bar{f}(x) = \sqrt{2x}$; $P(2|2)$
b) $\bar{f}(x) = \frac{1}{2}x^4$; $P\left(\sqrt[3]{2}\,|\,\sqrt[3]{2}\right)$
c) $\bar{f}(x) = \sqrt{x} - 4$; kein gemeinsamer Punkt (Die Gleichung $(x+4)^2 = x$ hat keine Lösung)
d) $\bar{f}(x) = \sqrt[3]{x+6}$; $P(2|2)$ (Die Gleichung $x^3 - 6 = x$ hat die Lösung $x = 2$)

4

a) $\bar{f}(x) = \log_{\frac{5}{4}}(x)$
b) $\bar{f}(x) = 2^{\frac{x}{3}}$
c) $\bar{f}(x) = 3^{x-1}$
d) $\bar{f}(x) = \log_3(x) + 1$

5

a) individuelle Lösungen möglich, z. B. $s(x) = f(x) + g(x)$; $d(x) = g(x) - h(x)$; $p(x) = g(x)\cdot h(x)$

Verknüpfung	$s(x) = e^x + x^2 + 1$	$d(x) = x^2 + 3x - 4$	$p(x) = -3x^3 + 5x^2 - 3x + 5$
Definitionsbereich D	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$
Wertebereich W	$y \in \mathbb{R}$ und $y \geqq 1{,}827$	$y \in \mathbb{R}$ und $y \geqq -6{,}25$	$y \in \mathbb{R}$
Symmetrie	keine	keine (Parabel symmetrisch zu $x = -1{,}5$)	keine
Achsenschnittpunkte	S_x keinen, $S_y(0\|2)$	$S_{x_1}(-4\|0)$, $S_{x_2}(1\|0)$, $S_y(0\|-4)$	$S_x\left(\frac{5}{3}\|0\right)$, $S_y(0\|5)$
Extrema	$E_{Min}(-0{,}352\|1{,}827)$	$E_{Min}(-1{,}5\|-6{,}25)$	keine
Monotonie	$x < -0{,}352$: fallend $x > -0{,}352$: steigend	$x < -1{,}5$: fallend $x > -1{,}5$: steigend	fallend im geseamten Definitionsbereich
Asymptoten	keine	keine	keine

b) individuelle Lösungen möglich, z. B. $s(x) = f(x) \circ g(x)$; $d(x) = g(x) \circ h(x)$; $p(x) = h(x) \circ f(x)$

Verknüpfung	$s(x) = e^{x^2+1}$	$d(x) = (-3x+5)^2 + 1$	$p(x) = -3e^x + 5$
Definitionsbereich D	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$
Wertebereich W	$y \in \mathbb{R}$ und $y \geqq e$	$y \in \mathbb{R}$ und $y \geqq 1$	$y \in \mathbb{R}$ und $y > 5$
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-Achse	keine (Parabel symmetrisch zu $x = \frac{5}{3}$)	keine
Achsenschnittpunkte	S_x keinen, $S_y(0\|e)$	S_x keinen, $S_y(0\|26)$	$S_x(0{,}511\|0)$, $S_y(0\|2)$
Extrema	$E_{Min}(0\|e)$	$E_{Min}\left(\frac{5}{3}\|1\right)$	keine
Monotonie	$x < 0$: fallend $x > 0$: steigend	$x < \frac{5}{3}$: fallend $x > \frac{5}{3}$: steigend	fallend im geseamten Definitionsbereich
Asymptoten	keine	keine	waagerecht: $y = 5$

Vernetzung Zinsrechnung

Angeblich verkauften 1662 die Indianer die etwa 60 km^2 große Insel Manhattan für einen Betrag von 24 Dollar an einen Siedler namens Minuit.
Auf welchen Betrag wären diese 24 Dollar bis heute angewachsen, wenn die Indianer damals diese Summe zu einem gleichbleibenden Jahreszins von 5 % angelegt hätten?
Welche Summe würde sich bei einem Jahreszins von 10 % ergeben?

Wer Geld auf ein Sparkonto einzahlt, erhält dafür **Zinsen**. Dieser Zins entspricht einem gewissen Bruchteil des eingezahlten Geldbetrages, des sogenannten **Kapitals**. Der Prozentsatz, nach dem der **nach einem Jahr** fällige Zins (Jahreszins) berechnet wird, heißt **Zinssatz**.
Leiht man sich dagegen Geld bei einer Sparkasse oder Bank aus, so nennt man den geliehenen Betrag **Kredit**. Für einen Kredit muss man Zinsen zahlen.

Wenn jemand auf einem Sparbuch zu Jahresbeginn eine Summe von 1400 € stehen hat und die Bank garantiert ihm 1,5 % Zinsen auf die Spareinlage, dann kann er mithilfe der Prozentrechnung berechnen, wie hoch sein Guthaben auf diesem Sparbuch am Ende des Jahres sein wird:

100 % → 1400 €		Kapital zu Jahresbeginn (Anfangskapital)
1 % → 14 €		
1,5 % → 21 €		Jahreszins
101,5 % → 1421 €		Kapital zum Jahresende (Endkapital)

Die Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung. Dabei entspricht
das **Kapital** dem **Grundwert**,
der **Jahreszins** dem **Prozentwert**,
der **Zinssatz** dem **Prozentsatz**.

Bei der Zinsrechnung sind vor allem folgende Fragestellungen von Interesse:
(1) Über welche Geldsumme kann ich verfügen, wenn ich eine bestimmte Summe bei einer Bank für ein Jahr angelegt habe? *(Zinsen für ein Jahr)*
(2) Welche Geldsumme erhalte ich, wenn ich meine Geldanlage nach kürzerer Zeit auflöse? *(Zinsen für Teile eines Jahres)*
(3) Welche Summe steht mir zur Verfügung, wenn ich mein Kapital längere Zeit anlege? *(Zinsen für mehrere Jahre, Zinseszins)*

Zinsen für ein Jahr

Beispiel
Herr Schmidt hat bei einer Bank Wertpapiere für 4500 € erworben, für die er nach Ablauf eines Jahres jeweils 3,8 % Zinsen ausgezahlt bekommt. Welchen Gewinn bringt ihm diese Geldanlage im Verlauf eines Jahres?
Lösung:
Das Produkt aus Kapital (4500 €) und Zinssatz (3,8 %) ergibt die Jahreszinsen Z.
Z = 4500 € · 3,8 % = 4500 € · 0,038 = 171 €

Aufgaben

1 Sven hat vor einem knappen Jahr ein Sparkonto eröffnet und damals auf dieses Konto eine Summe von 950 € eingezahlt. Die Bank gibt auf das Sparkonto 2,6 % Zinsen. Wie viel Euro Zinsen erhält er nach Ablauf des Jahres?

2 Herr Eisolt hat am 15. Mai 2013 für 3750 € Aktien von einem Unternehmen erworben. Am 15. Mai 2014 besaßen diese Aktien einen Wert von 3982,50 €. Um wie viel Prozent ist der Wert seiner Aktien in diesem Jahr gestiegen?

3 Die nebenstehende Tabelle stellt den Verzinsungsplan für eine Kapitalanlage mit jährlicher Ausschüttung dar.

1. Jahr 1%	2. Jahr 2%	3. Jahr 3%
4. Jahr 4%	5. Jahr 5%	6. Jahr 6%
7. Jahr 7%	8. Jahr 8%	9. Jahr 9%

a) Um wie viel Prozent hat sich das Kapital in den neun Jahren vermehrt?
b) Lilo fragt: „Warum geben die nicht gleich 5 % Zinsen in jedem der neun Jahre? Wie kommt sie auf 5 %? Was ist deiner Meinung nach der Grund für diese Staffelung?

4 Jonas hatte zu seiner Jugendweihe eine Reihe Geldgeschenke bekommen. Diese legte er auf einem neu eingerichteten Sparbuch an, auf das er 3,2 % Zinsen bekommt. Nach einem Jahr erhielt er 14,40 € Zinsen. Wie hoch war der von Jonas auf dieses Sparbuch eingezahlte Betrag?

5 Berechne für jede Spalte den fehlenden Wert.

Kapital	1500 €		550 €	16 500 €	960 €
Zinssatz		1,85 %	2,3 %		
Jahreszins	33 €	46,25 €		536,25 €	22,08 €

6 Zwei Personen legen bei verschiedenen Banken den gleichen Betrag an. Die erste Person erhält 4 % Jahreszinsen, die zweite 4,5 %. Nach einem Jahr stellen sie fest, dass das Konto der zweiten Person 2,30 € mehr aufweist, als das der ersten.
Wie hoch ist die Summe, die die beiden angelegt hatten?

7 Silvio hatte zu Beginn eines Jahres bei einer Bank ein Sparkonto mit einem Guthaben von 760 €. Am Jahresende werden ihm dafür 34,20 € als Zinsen ausgezahlt. Für das Folgejahr hat die Bank einen um 0,5% höheren Zinssatz festgelegt. Welche Zinsen bekommt er dann in diesem Jahr?

Zinsen für Teile eines Jahres

Zu beachten ist, dass die Bank jeden Monat mit 30 Tagen rechnet. Das „Bankjahr" hat daher 360 Tage.

Der Jahreszins gibt an, um wie viel Prozent ein Bankguthaben wächst, wenn man es ein volles Jahr der Bank zur Verfügung stellt. Nun kann man aber auch während des Jahres sein Konto auflösen oder von seinem Konto Geld abheben. Auch dann zahlt die Bank den Kunden Zins. Will man ein in diesem Jahr mit 2,15 % verzinstes Guthaben von 2000 € am 4. April abheben, so hat man sein Geld in dem Jahr ja 94 Tage zur Verfügung gestellt. Durch die Bank werden dann in folgender Weise die für das Guthaben zu zahlenden Zinsen berechnet:

2000 € ergeben bei einem Jahreszins von 2,15 % in 360 Tagen $2000 \cdot \frac{2{,}15}{100}$ € Zinsen.

2000 € ergeben bei einem Jahreszins von 2,15 % pro Tag $2000 \cdot \frac{2{,}15}{100} \cdot \frac{1}{360}$ € Zinsen.

2000 € ergeben bei einem Jahreszins von 2,15 % in 94 Tagen $2000 \cdot \frac{2{,}15}{100} \cdot \frac{94}{360}$ € Zinsen.

Mann nennt das eine unterjährige Verzinsung.

Ein Kapital K bringt bei einem Zinssatz von p in t Tagen ($0 \leqq t \leqq 360$) einen Zins Z von $Z = K \cdot p \cdot \frac{t}{360}$.

Beispiel

Herr Meyer hat bei seiner Hausbank am 12. 04. 2015 eine Summe von 6000 € auf ein Konto angelegt, für das er einen Jahreszins von 1,75 % erhält und das er täglich auflösen kann. Als er im November des gleichen Jahres zu günstigen Konditionen einen Gebrauchtwagen erwerben kann, löst er am 23.11. sein Konto auf. Welchen Betrag muss die Bank ihm zahlen?

Lösung:

Gegeben sind K = 6000 €, p = 1,75 % und t = 222 (19 Tage im April, 180 Tage für die Monate Mai bis Oktober und 23 Tage im November). Gesucht ist die Auszahlsumme, also die Summe aus Kapital K und Zins Z.

$Z = 6000\,€ \cdot \frac{1{,}75}{100} \cdot \frac{222}{360} = 64{,}75\,€$

Die Auszahlsumme für Herrn Meyer am 23.11.2015 beträgt 6064,75 €.

Aufgaben

1 Ein Betrag von 1800 € wurde am 1. Januar 2015 mit einem Zinssatz von 2 % angelegt. Über welche Summe kann man verfügen, wenn man das Konto zum genannten Datum auflöst?

a) 31. März 2015 b) 16. August 2015 c) 29. November 2015
d) 11. Februar 2015 e) 23.Mai 2015 d) 29. Oktober 2015

Jede Bank legt fest, welchen Zinssatz Ihre Kunden zu zahlen haben, wenn sie ihr Konto überziehen.

2 Kunden einer Bank erhalten oftmals die Möglichkeit, ihr Konto um eine bestimmte Summe zu überziehen. Für die von der Bank „geliehene" Summe ist allerdings ein hoher Sollzins zu zahlen.

Familie Winter kauft sich am 19. Februar ein neues Doppelbett und muss dazu auf die von der Bank eingeräumte Überziehungsmöglichkeit von 2000 € zurückgreifen. Mit der nächsten Lohnzahlung am 15. März zahlen sie die Summe zurück. Welchen Betrag müssen sie überweisen, wenn der Sollzinssatz bei Überziehung 12 % beträgt?

3 Herr Baumann hat sein Haus renovieren lassen. Nebenstehende Rechnungen sind ihm gleichzeitig zugegangen.
a) Welche Summe muss er bezahlen, wenn er die Rechnung sofort begleicht?
b) Herr Baumann hätte die erforderliche Summe verfügbar, hat sie jedoch günstig mit 10 % angelegt. Was ist nun für ihn günstiger: Soll er das Geld abheben und die Handwerker sofort (das bedeutet mit Skonto) bezahlen oder soll er die Zahlungsfrist von 8 Wochen nutzen und erst bei ihrem Ablauf die volle Rechnungssumme ohne Skonto überweisen?

Maurer:
18 456 € 2 % Skonto bei Sofortzahlung

Fliesenleger:
12 123 € 3 % Skonto bei Sofortzahlung

Zimmermann:
25 456 € 2 % Skonto bei Sofortzahlung

Dachdecker:
17 789 € 2 % Skonto bei Sofortzahlung

Maler:
9876 € 2 % Skonto bei Sofortzahlung

„Skonto" bedeutet Preisnachlass bei sofortiger Zahlung.

Zinsen für mehrere Jahre, Zinseszins

Legt man Geld an, dann geschieht das oftmals langfristig. So können Großeltern oder Eltern schon für Kleinkinder eine als Zielsparen (z. B. ein mit dem 18. Geburtstag fälliges Führerscheinsparen) bezeichnete Sparform wählen, bei dem die erzielten Zinsen dem Kapital hinzugefügt und dann mit verzinst werden. Bei dieser Form der Geldanlage spricht man vom Zinseszinseffekt.

Frau Mayer hat bei einem Glücksspiel 10 000 € gewonnen, die sie zu einem Zinssatz von 4 % anlegt. Schauen wir uns an, was sich aus diesem Anfangskapital K (0) von 10 000 € in drei Jahren entwickelt:

Kapital **K (1)** in € nach dem 1. Jahr:

$$\begin{aligned} \mathbf{K(1)} &= 10\,000 + 10\,000 \cdot 4\,\% \\ &= 10\,000 \cdot (1 + 0{,}04) \\ &= 10\,000 \cdot 1{,}04 \\ &= \mathbf{10\,400} \end{aligned}$$

Kapital **K (2)** in € nach dem 2.Jahr:

$$\begin{aligned} \mathbf{K(2)} &= 10\,400 + 10\,400 \cdot 4\,\% \\ &= 10\,400 \cdot (1 + 0{,}04) \\ &= 10\,400 \cdot 1{,}04 \\ &= 10\,000 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 \\ &= 10\,000 \cdot 1{,}04^2 \\ &= \mathbf{10\,816} \end{aligned}$$

Kapital **K (3)** in € nach dem 3. Jahr

$$\begin{aligned} \mathbf{K(3)} &= 10\,816 + 10\,816 \cdot 4\,\% \\ &= 10\,816 \cdot (1 + 0{,}04) \\ &= 10\,816 \cdot 1{,}04 \\ &= 10\,000 \cdot 1{,}04^2 \cdot 1{,}04 \\ &= 10\,000 \cdot 1{,}04^3 \\ &= \mathbf{11\,248{,}64} \end{aligned}$$

Bei jährlicher Auszahlung hätte Frau Mayer in den 3 Jahren insgesamt 1200 € Zinsen erhalten.

Wird ein **Anfangskapital** K (0) mit einem Zinssatz p % verzinst, so erhält man nach n Jahren ein **Endkapital** K (n) und es gilt die **Zinseszinsformel**:

$$K(n) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K(0) \cdot q^n$$

Dabei nennt man den Faktor $q = 1 + \frac{p}{100}$ auch **Aufzinsfaktor**.

Beispiel
Als Einleitung zum Thema Zinsrechnung wurde erwähnt, dass die Indianer 1662 die Insel Manhattan für 24 Dollar an einen Siedler verkauft haben. Es wurde die Frage aufgeworfen, über welche Summe seine Nachfahren jetzt (wir nehmen als Beispiel das Jahr 2016) verfügen könnten, wenn er diese 24 Dollar damals zu einem Jahreszinssatz von 5% (oder von 10%) so angelegt hätte, dass die Verzinsung mit Zinseszinseffekt erfolgt wäre. Diese Summe ist zu ermitteln.
Lösung:
Das Anfangskapital K(0) ist 24 Dollar. Von 1662 bis 2016 sind 354 Jahre vergangen, also gilt n = 354. Bei einer Verzinsung mit dem Zinssatz von 5% würde sich als Endkapital K(354) ergeben:
$K(354) = 24\,\$ \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{354} \approx 760\,716\,984\,\$$
Bei einem Zinssatz von 10% wäre ein auch im Vergleich mit dem Endkapital beim Zinssatz von 5% in diese Höhe sicher unerwartetes, auf volle 100 Millionen gerundetes, Endkapital von $K(354) = 24\,\$ \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^{354} \approx 10\,794\,978\,650\,000\,000\,\$$ zustande gekommen.

Aufgaben

Online-Link
Entwicklung von Zinsen
734101-1841

1 Zur Geburt von Simon legt ihm seine Oma Brigitte ein Sparbuch an, auf das sie 2000 € einzahlt und für das ein jährlicher Festzinssatz von 2,5% vereinbart wird. Es wird festgelegt, dass Simon erst zu seinem 18. Geburtstag über das Geld verfügen kann. Über welche Geldsumme kann er dann verfügen?

Online-Link
Bundesschatzbriefe
734101-1842

2 Herr Sonntag hat im Lotto gewonnen und legt mit 180 000 € den Großteil des Gewinns zu einem Jahreszins von 3,5% an. Nach 20 Jahren wird er in Rente gehen und hat dann vor, jährlich die anfallenden Zinsen abzuheben und als „Zusatzrente“ zu seinem Lebensunterhalt einzusetzen. Über welche Summe kann er dann jährlich verfügen?

Online-Link
Sparen und Tilgen
734101-1843

3 Bestimme jeweils den fehlenden Wert:

	Anfangskapital	Zinssatz	Laufzeit	Endkapital
(1)	12 000 €	2,3%	10 Jahre	
(2)	8500 €		15 Jahre	11 439,88 €
(3)	15 000 €	3,5%		16 882,63 €
(4)		4%	12 Jahre	800,52 €
(5)	80 000 €	3,2%		205 816,84 €

4 Ein Geschäftsmann will bei seiner Hausbank 200 000 € langfristig anlegen. Es wird ein Zinssatz von 4,8% vereinbart.
a) Nach wie viel Jahren hat sich das angelegte Kapital bei diesem Zinssatz verdoppelt?
b) Wie viele Jahre dauert es, bis seine Einlage mehr als 600 000 € wert ist?
c) Nach welcher Zeit wird sein Jahreszins erstmals höher als 30 000 € sein?

5 Bei Mietverträgen gibt es die Möglichkeit, eine feste jährliche Mietsteigerung im Voraus festzulegen. Familie Scholz bezieht eine neue Wohnung. Im Mietvertrag sind als monatliche Kaltmiete 550 € und eine jährliche Mietsteigerung von 2% festgelegt. Welche Kaltmiete hat Familie Scholz nach 10 Jahren zu zahlen?

6 Pauls Eltern haben für ihren Sohn an seinem 8. Geburtstag ein „Führerscheinsparen" abgeschlossen, bei dem sie 10 Jahre lang jeweils zu Monatsbeginn 25 € auf ein Konto einzahlen, das mit 4,2 % verzinst wird und bei dem die Auszahlung dann nach 10 Jahren an Paul erfolgt. Sie überschlagen: Da nach einem Jahr 300 € angespart sind, ist in diesem Jahr der durchschnittliche Betrag auf dem Konto 150 € und deshalb sind 6,30 € Zinsen zu erwarten. Auf dem Kontoauszug lesen sie aber dann, dass die Bank geringfügig höhere Zinsen gezahlt hat. Was ist die Ursache für diese Unstimmigkeit?

7 Herr Wolf hatte seiner Frau zu ihrem 30. Geburtstag ihren Geburtstagswunsch erfüllt und ihr ein Gemälde eines jungen Malers geschenkt, das er für 180 € erworben hatte. 35 Jahre später war dieser Maler einer der Großen seiner Zunft und seine Bilder sehr begehrt. Wolfs boten das Gemälde einer Galerie an und diese kaufte es für 2500 €. Wie hoch hätte der Jahreszins sein müssen, damit eine Anlage der 180 € bei einer Bank in diesen 35 Jahren den gleichen Gewinn erbracht hätte?

8 Mit welchem Jahreszinssatz müsste ein Geldbetrag angelegt werden damit er nach 12 Jahren auf den gleichen Betrag anwächst, den diese Geldsumme bei einem Jahreszins von 5 % in 20 Jahren erreichen würde.

9 Ein mit Zinseszins angelegter Betrag verdoppelt sich in 16 Jahren. Wie hoch muss dann der Zinssatz sein? Bei welchen Zinssätzen würde es zu einer Verdopplung in 10 bzw. in 20 Jahren kommen?

10 Ein Betrag von 25 000 € wurde am 01.01.2002 zu einem Zinssatz von 6 % fest angelegt. Ab dem 01.01.2004 wurde das Kapital nur noch mit 5 % und ab dem 01.01.2008 nur noch mit 4 % verzinst. Mit dem 01.01.2013 sank der Zinssatz auf 2 %. Die Anlage endet am 31.12.2016. Mit welchem Auszahlungsbetrag darf der Anleger dann rechnen?

11 Ein Baugrundstück wird zum Preis von 140 000 € zum Kauf angeboten. Dabei bietet der Verkäufer folgende zwei Abzahlungsvarianten an:
(1) Der Käufer zahlt nach vier Jahren einen Betrag von 80 000 € und nach sechs Jahren den Restbetrag von 60 000 €.
(2) Der Käufer zahlt 35 000 € beim Kauf und jeweils 35 000 € nach drei, nach sechs und nach sieben Jahren.
a) Welche Variante ist für einen Käufer, der die Kaufsumme verfügbar hat und sein Geld zu einem Zinssatz von 5 % anlegen kann, die günstigere?
b) Wie viel Euro kann er durch die Wahl der für ihn günstigeren Abzahlungsvariante einsparen?

12 In einem Werbeprospekt einer Bank steht: „Wer früh spart, braucht weniger Kapital und hat am Ende mehr als derjenige, der spät mit dem Sparen anfängt."
Nutze den GTR oder ein Tabellenkalkulationsprogramm, um dich fundiert zu dieser Aussage positionieren zu können.

13 Ein Immobilienmakler bietet einem an einer Wohnung interessierten Kunden einen Staffelmietvertrag an. Als Anfangsmiete sind 520 € festgelegt. Bei der zukünftigen Steigerung kann der Kunde zwischen einer jährlichen Mietsteigerung um 22 € oder einer jährlichen Mietsteigerung um 3 % wählen. Was würdest du als weitere Information für wichtig erachten, um den Kunden gut beraten zu können?

Textquellen

10 Stromausfall legt größtes Riesenrad der Welt lahm AFP/cn; **73** Dieser Fluss ist fast vollständig mit Wasserhyazinthen zugewachsen… Projektwerkstatt, Gesellschaft für kreative Ökonomie mbH; **73** Großes Schädlinge in fremden Biotopen… Frankfurter Runschau, 12.5.01; **73** Die Wasserhyazinthe breitet sich mit einem Tempo aus… Projektwerkstatt, Gesellschaft für kreative Ökonomie mbH; **78** Die wichtigste Zahl dabei ist die Halbwertszeit von Plutonium 29.07.1998 Badische Zeitung; **148** Ausschnitt aus „Die Blechtrommel", Verlag Steidl; **Kapitel VI** Besondere Leistungsfeststellung Gymnasium, Klassenstufe 10, Mathematik Sächsisches Staatsministerium für Kultus

Bildquellennachweis

U1.1 Getty Images RF (PhotoDisc/Reese), München; **U1.2** Getty Images (Neleman), München; **4.1** Fotolia.com (Christopher Kirk), New York; **4.2** Bildagentur-online (Begsteiger), Burgkunstadt; **4.3** TV-yesterday (Weber), München; **5.1** Blume, Bernd, Klitzschen; **5.2** Corbis (Kennedy), Berlin; **5.3** Alamy Images (Andy Day), Abingdon, Oxon; **8.1** phæno gGmbH, Wolfsburg; **8.2** Corbis (Karl Weatherly), Berlin; **9.2** Getty Images (Arnulf Husmo), München; **10.1** Getty Images (AFP/Roslan Rahman), München; **11.1** Klett-Archiv (Inga Surrey), Stuttgart; **13.1** Keil, Prof. Dr. Manfred, Neckargemünd; **14.1** Fotolia.com (Martina Berg), New York; **16.1** Klett-Archiv (Ulrich Schönbach), Stuttgart; **21.1** Getty Images (Arnulf Husmo), München; **28.1** shutterstock.com (Sybille Yates), New York, NY; **34.1** Klett-Archiv (Erwin Spehr), Stuttgart; **39.1** Fotolia.com (Christopher Kirk), New York; **40.1** Corel Corporation Deutschland, Unterschleissheim; **44.1** Fotolia.com (Sylvie Bigoni), New York; **44.1** Picture-Alliance (dpa/epa/Filip Singer), Frankfurt; **44.2** akg-images (Erich Lessing), Berlin; **44.5** iStockphoto (HagenFoto), Calgary, Alberta; **44.6** iStockphoto (Aleaimage), Calgary, Alberta; **50.1** Mauritius Images (George Mattei), Mittenwald; **51.1** Bildagentur-online (Begsteiger), Burgkunstadt; **51.2** Okapia (Claude Cortier), Frankfurt; **51.3** Okapia (Claude Cortier), Frankfurt; **52.1** Corbis RF (RF), Düsseldorf; **54.1** Fotolia.com (Angela Cable), New York; **57.1** shutterstock.com (Adam Bies), New York, NY; **62.1** Getty Images (FoodPix), München; **64.1** Artothek (Hans Hinz), Weilheim; **65.1** gemeinfrei (NASA/Apollo 8 crewmember Bill Anders); **73** Okapia (Konrad Wothe), Frankfurt; **73.2** Fotolia.com (Visions-AD), New York; **75.1** iStockphoto (Jeroen Peys), Calgary, Alberta; **76.1** Stadtbibliothek, Nürnberg; **76.2** Deutsches Museum, München; **76.3** Deutsches Museum, München; **77.1** Deutsches Museum, München; **77.2** Klett-Archiv (Cira Moro), Stuttgart; **78.1** Corbis (Anatoli Kliashchuk/Sygma), Berlin; **79.1** South Tyrol Museum of Archaeology, Bolzano, Italy/Wolfgang Neeb/The Bridgeman Art Library; **79.2** Hecker, Ruth, Singhofen; **79.3** Hecker, Ruth, Singhofen; **81.1** Keystone (Volkmar Schulz), Hamburg; **82.1** shutterstock.com (Marzolino), New York, NY; **82.2** Bridgeman Images (France Lauros/Giraudon), Berlin; **82.3** Bridgeman Images, Berlin; **82.4** gemeinfrei; **83.1** Imago (Arnulf Hettrich), Berlin; **84.1** Mauritius Images (Phototake), Mittenwald; **85.1** Fotolia.com (emeraldphoto), New York; **85.2** Thinkstock (John Foxx), München; **86.1** TV-yesterday (Weber), München; **87.1** VISUM Foto GmbH (Philip Quirk/Wildlight), Hamburg; **87.2** Universität Ulm Vorlesungssammlung Physik (Reiner Keller), Ulm; **87.2** Corbis (Alan Schein Photography), Berlin; **91.1** Fotolia.com (M. Schuppich), New York; **93.1** dreamstime.com (Blue2008), Brentwood, TN; **94.1** Thinkstock (Jeff Clow), München; **98.1** dreamstime.com (Rainer Plendl), Brentwood, TN; **101.1** Thinkstock (Cheryl Casey), München; **103.1** Fotolia.com (Cpro), New York; **104.1** Thinkstock (Eyecandy Images), München; **104.2** Klett-Archiv (KD Busch Fotostudio GmbH), Stuttgart; **104.3** EZB, Frankfurt; **107.1** Getty Images (Sean Gallup), München; **109.1** MEV Verlag GmbH, Augsburg; **110.1** iStockphoto (Buxton), Calgary, Alberta; **111.1** Blume, Bernd, Klitzschen; **111.2** iStockphoto (Guenther Dr. Hollaender), Calgary, Alberta; **111.3** iStockphoto (fotoVoyager), Calgary, Alberta; **112.1** gemeinfrei; **123.1** Picture-Alliance (dpa/Jens Trenkler), Frankfurt; **131.1** akg-images, Berlin; **134.1** Corbis (Kennedy), Berlin; **135.1** Imago (blickwinkel), Berlin; **135.2** Corbis (Van der Wal), Berlin; **135.3** PhotoDisc; **135.4** Astrofoto (Shigemi Numazawa), Sörth; **135.5** FOCUS (Lambert/SPL), Hamburg; **135.6** Corbis (Erik P./Zefa), Berlin; **137.1** Fotolia.com (Andrea Wilhelm), New York; **138.1** Fotosearch Stock Photography (Stock Disc), Waukesha, WI; **144.1** Picture-Alliance (dpa/Jerzy Dabrowski), Frankfurt; **144.2** Getty Images (Image Source), München; **147.1** MEV Verlag GmbH, Augsburg; **154.1** iStockphoto (vandervelden), Calgary, Alberta; **164.1** Bryan Berg Cardstacker, Santa Fe; **165.1** Pack, Danny, ..; **165.2** Alamy Images (Andy Day), Abingdon, Oxon; **180.1** iStockphoto (FrankvandenBergh), Calgary, Alberta; **183.1** Fotolia.com (spectrumblue), New York; **186.1** shutterstock.com (Curioso), New York, NY; **186.2** gemeinfrei; **189.1** gemeinfrei; **189.2** CC-BY-SA-3.0 (Brunswyk), siehe *3; **191.1** Thinkstock (Photos.com), München; **K07S185.1** dreamstime.com (Zhovba), Brentwood, TN; **K07S185.1** Fotolia.com (vvoe), New York

Mathematik ist mehr als Rechnen. Mit Mathematik kann man die Welt um uns herum beschreiben und verstehen, Probleme in ihr lösen und Vermutungen aufstellen und begründen. Hierzu benötigt man verschiedene Fähigkeiten, die durch die acht Symbole dargestellt sind. Diese begleiten dich durch dein Schulbuch und weisen darauf hin, welche Schwerpunkte im jeweiligen Kapitel eine Rolle spielen. Du lernst zum Beispiel:

Argumentieren / Kommunizieren
Wie man zeigt, dass ein Glücksspiel unfair ist.

Problemlösen
Dass man Streckenlängen im Dreieck auch ohne rechten Winkel berechnen kann.

Modellieren
Dass man man Wachstum unterschiedlich modellieren kann und bei einigen Modellierungen Bäume in den Himmel wachsen.

Werkzeuge
Dass der Taschenrechner beim Ermitteln von Funktionsgleichungen hilfreich sein kann.

Arithmetik / Algebra
Dass die Ermittlung von Lösungsmengen eine ganz schön komplexe Sache sein kann.

Funktionen
Dass man Funktionen verknüpfen und verketten kann, diese aber trotzdem unbeschränkt bleiben können.

Geometrie
Wie von zwei Punkten aus die Entfernung zu einem dritten berechnet werden kann.

Stochastik
Wie man bei Glücksspielen zu erwartende Gewinne und deren Schwankungsbreite berechnet.

ISBN 978-3-12-**734101**-0