



Lambacher Schweizer 8:
Auszug aus dem Schulbuch
zum Nachholen in Klasse 9

Lambacher Schweizer

Mathematik für Gymnasien

8

Sachsen



Klett

Begleitmaterial

Zu diesem Buch gibt es ergänzend:

- Lösungsheft (ISBN 978-3-12-734183-6)
- Arbeitsheft mit zahlreichen Übungen plus Lösungsheft (ISBN 978-3-12-734184-3)
- Arbeitsheft mit zahlreichen Übungen plus Lösungsheft und Lernsoftware (ISBN 978-3-12-734186-7)
- Kompakt, Klasse 7/8, die wichtigsten Formeln und Merksätze mit Beispielen (ISBN 978-3-12-734375-5)

1. Auflage

1 5 4 3 2 1 | 2017 16 15 14 13

Alle Drucke dieser Auflage sind unverändert und können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

Die letzten Zahlen bezeichnen jeweils die Auflage und das Jahr des Druckes.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Fotomechanische oder andere Wiedergabeverfahren nur mit Genehmigung des Verlages.

Auf verschiedenen Seiten dieses Heftes befinden sich Verweise (Links) auf Internet-Adressen. Haftungshinweis: Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle wird die Haftung für die Inhalte der externen Seiten ausgeschlossen. Für den Inhalt dieser externen Seiten sind ausschließlich die Betreiber verantwortlich. Sollten Sie daher auf kostenpflichtige, illegale oder anstößige Inhalte treffen, so bedauern wir dies ausdrücklich und bitten Sie, uns umgehend per E-Mail davon in Kenntnis zu setzen, damit beim Nachdruck der Verweis gelöscht wird.

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2013. Alle Rechte vorbehalten. www.klett.de

Autorinnen und Autoren: Manfred Baum, Martin Bellstedt, Dr. Dieter Brandt, Heidi Buck, Günther Dopfer, Dr. Detlef Dornieden, Christina Drüke-Noe, Prof. Rolf Dürr, Prof. Hans Freudigmann, Dieter Greulich, Prof. Dr. Heiko Harborth, Dr. Frieder Haug, Edmund Herd, Prof. Dr. Stephan Hußmann, Thomas Jörgens, Thorsten Jürgensen-Engl, Andreas König, Prof. Dr. Timo Leuders, Prof. Dr. Detlef Lind, Rainer Mavoska, Achim Olpp, Jutta Parkan, Rainer Pongs, Rolf Reimer, Dr. Günther Reinelt, Kathrin Richter, Dr. Wolfgang Riemer, Hartmut Schermuly, Reinhard Schmitt-Hartmann, Ulrich Schönbach, Raphaela Sonntag, Claus Stöckle, Andrea Stühler, Inga Surrey, Dr. Heike Tomaschek, Heiko Wontroba, Dr. Peter Zimmermann

Für das Bundesland Sachsen bearbeitet von: Jens Negwer, Peter Neumann, Antje Nothnagel, Dr. Manfred Schwier, Prof. Dr. Hartmut Wellstein

Redaktion: Andreas Marte, Anke Schmucker

Mediengestaltung: Ulrike Glauner

Zeichnungen/Illustrationen: Uwe Alfer, Waldbreitbach; Jochen Ehmann, Stuttgart; Christine Lackner-Hawighorst, Ittlingen; Helmut Holtermann, Dannenberg; Dorothee Wolters, Köln

Bildkonzept Umschlag: Soldan Kommunikation, Stuttgart

Satz: imprint, Zusmarshausen

Reproduktion: Meyle + Müller Medien-Management, Pforzheim

Druck: Firmengruppe APPL, aprinta druck, Wemding



Lambacher Schweizer

Mathematik für Gymnasien

8

Sachsen

bearbeitet von

Jens Negwer, Grimma
Peter Neumann, Markkleeberg
Antje Nothnagel, Grimma
Manfred Schwier, Dresden
Hartmut Wellstein, Würzburg

Ernst Klett Verlag
Stuttgart · Leipzig

Inhaltsverzeichnis



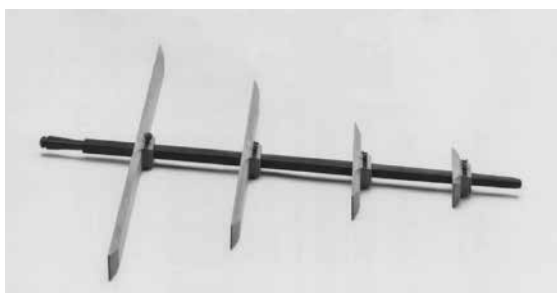
Lernen mit dem Lambacher Schweizer	6
I Terme und Gleichungen	8
Erkundungen	10
1 Terme und Termstruktur	12
2 Vereinfachen von Summen und Differenzen	15
3 Multiplikation und Division von Produkten	17
4 Ausklammern/Faktorisieren	19
5 Multiplikation von Summen	21
6 Binomische Formeln	23
7 Vereinfachen von Bruchtermen	25
8 Lineare Gleichungen	27
9 Lineare Ungleichungen	31
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen	35
Rückblick	38
Training	39
Wahlpflichtthema Algorithmen	40
II Zufallsversuche	46
Erkundungen	48
1 Zufallsexperimente und Prognosen	50
2 Von der Versuchsreihe zur Wahrscheinlichkeit	53
3 Laplace-Experimente	56
4 Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeit	58
5 Baumdiagramme und Pfadregeln	60
6 Ziehen mit und ohne Zurücklegen	63
7 Umgang mit Wahrscheinlichkeiten	65
8 Sinnvolles Arbeiten mit dem Baumdiagramm	69
9 Verknüpfen von Ereignissen	73
10 Wahrscheinlichkeiten bestimmen durch Simulation	76
11 Unabhängige Ereignisse	80
12 Produktregel zur Anzahlbestimmung	83
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen	86
Exkursion Das Ziegenproblem	90
Rückblick	92
Training	93
Wahlpflichtthema Simulation mit Zufallszahlen	94
III Lineare Funktionen	100
Erkundungen	102
1 Funktionsbegriff	104
2 Darstellung von Funktionen	107
3 Eigenschaften von Funktionen	112
4 Lineare Funktionen	118
5 Aufstellen von Gleichungen linearer Funktionen	123
6 Weitere Eigenschaften linearer Funktionen	127
7 Schnittpunkt der Graphen zweier linearer Funktionen	130
8 Anwendungen	132
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen	135
Exkursion Verschiedene Lagen von Geraden	138
Exkursion Mit dem GPS in der Straßenbahn	139
Rückblick	140
Training	141

IV Lineare Gleichungssysteme	142
Erkundungen	144
1 Lineare Gleichungen mit zwei Variablen	146
2 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	149
3 Gleichsetzungs- und Einsetzungsverfahren	152
4 Additionsverfahren	156
5 Lineare Gleichungssysteme und CAS	159
6 Anwendungen	161
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen	165
Exkursion Drei Gleichungen, drei Variablen – das geht auch	168
Rückblick	170
Training	171
Wahlpflichtthema Lineare Optimierung	172
V Ähnlichkeit	178
Erkundungen	180
1 Maßstäblich vergrößern und verkleinern – Ähnlichkeit	182
2 Zentrische Streckungen	186
3 Flächeninhalte und Volumina	190
4 Strahlensätze	194
5 Erweiterung der Strahlensätze	197
6 Ähnlichkeitsabbildungen	200
7 Ähnliche Dreiecke	202
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen	206
Exkursion Ähnlichkeit mit DGS	210
Rückblick	212
Training	213
Vernetzung Heuristische Strategien	214
Selbsttraining	218
Lösungen	224
Selbsttraining – Lösungen	240
Anhang: Tabelle von Zufallszahlen	243
Anhang: Die wichtigsten Befehle für den CAS-Rechner TI-Nspire	244
Anhang: Die wichtigsten Befehle für den CAS-Rechner CASIO ClassPad	245
Register	246
Bild- und Textquellennachweis	248



Das sieht euch ähnlich

Ob Dinge sich ähneln, erkennen wir schnell, auch wenn sie nicht gleich sind. Es kommt auf Form und Größe an.



Jakobstab

Das kannst du schon

- Kongruenzen von Figuren nachweisen
- Mit Größen rechnen
- Konstruktionen durchführen

$$\frac{x+y}{2}$$

Arithmetik/
Algebra



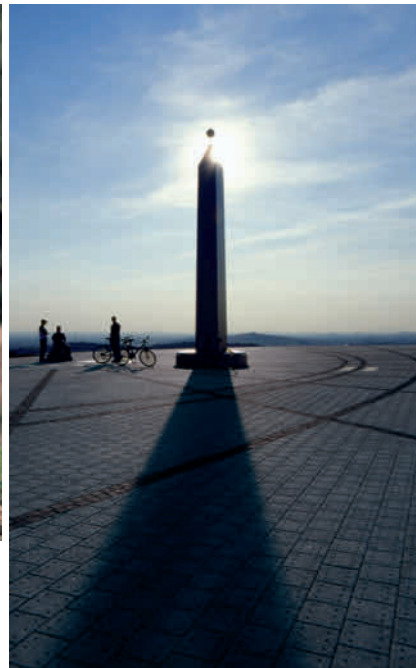
Funktionen



Geometrie



Stochastik



Das kannst du bald

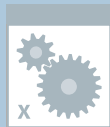
- Ähnliche Figuren untersuchen
- Figuren vergrößern und verkleinern
- Mit Strahlensätzen Längen berechnen



Argumentieren /
Kommunizieren



Problemlösen



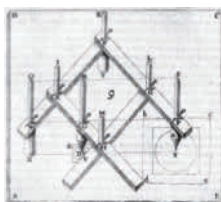
Modellieren



Werkzeuge

1. Mit dem Pantograph vergrößern

In Fig. 1 ist ein **Pantograph** abgebildet. Das Gerät, das auch als Storchenschnabel bezeichnet wird, ist ein Instrument zum Vergrößern oder Verkleinern von Zeichnungen. Es wurde im Jahr 1603 von Christoph Scheiner erfunden.



Historische Darstellung des Aufbaus und der Wirkungsweise eines Pantographen.

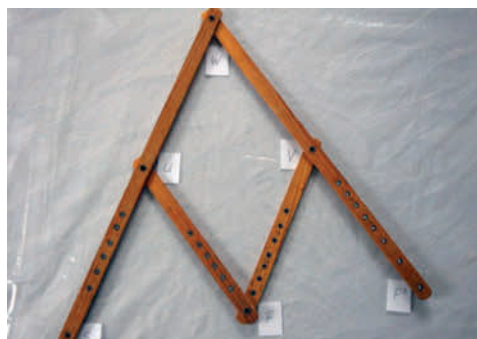


Fig. 1

Der Pantograph besteht aus vier Leisten, die in den Punkten U, W, F, und V durch Gelenke beweglich miteinander verbunden sind. Der Punkt S bleibt fest – um ihn dreht sich der Pantograph. Der Punkt F beinhaltet einen Fahrstift, mit dem die Vorlage „abgefahren“ werden kann, im Punkt F' wird ein Zeichenstift befestigt, der dann die Vergrößerung erzeugt. Für den Zusammenbau der vier Leisten gelten folgende Regeln:

- (1) $\overline{SW} = \overline{WF'}$
- (2) $\overline{UF} = \overline{WV} = \overline{SU}$
- (3) $\overline{UW} = \overline{FV}$

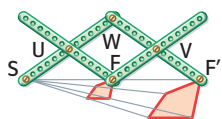


Fig. 2

Zum Bauen eines eigenen Pantographen könnt ihr für die Leisten Teile eines Metallbaukastens nutzen, aus Holz Stäbe zurecht sägen oder dicke Pappe passend schneiden. Verschiedene Anleitungen dazu findet ihr auch im Internet. Stellt ein arbeitsfähiges Modell eines Pantographen her. Wählt zunächst $\overline{SU} = \overline{UW}$.

Beobachtet, wie sich die Leiste mit den Punkten W und V bei der Bewegung des Pantographen zur Leiste mit den Punkten U und F verhält. Begründet eure Beobachtung mittels der Regeln zum Zusammenbau des Pantographen. Beobachtet auch die Lage des Punktes F in Bezug auf die Lage der Punkte S und F'. Ergänzt im Heft folgenden Satz: S, F und F' liegen auf ...

Wird eine Strecke $\overline{AB}$ (Originalstrecke) vergrößert, nennt man den Quotienten aus $\frac{\text{Länge der Bildstrecke } \overline{A'B'}}{\text{Länge der Originalstrecke } \overline{AB}} = k$ auch Streckungsfaktor.

- Ermittelt den Streckungsfaktor für euren Pantographen.
- Misst die Längen der Strecken $\overline{SU}$ und $\overline{SW}$ und bildet den Quotienten $\frac{\overline{SW}}{\overline{SU}}$. Vergleicht euer Ergebnis mit dem ermittelten Streckungsfaktor aus der vorherigen Teilaufgabe.

Die Ergebnisse der Untersuchungen lassen einen Zusammenhang zwischen dem Aufbau des Pantographen und der Größe des Streckungsfaktors vermuten.

Mit welchem Streckungsfaktor müsste das Modell in Fig. 3 arbeiten? Überprüft eure Vermutung in der Praxis. Verändert weiterhin die Lage der Punkte U und V und untersucht die zugehörigen Streckungsfaktoren.

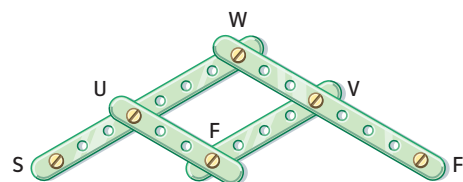


Fig. 3

2. Flächen vergrößern

Zeichnet Figuren, deren Flächeninhalt ihr berechnen könnt. Vergrößert die Figuren mithilfe des Pantographen und berechnet den Flächeninhalt der erhaltenen Bilder. Messt dafür benötigte Strecken am Bild. Wiederholt diese Verfahrensweise mit anderen Streckungsfaktoren. Stellt eure Ergebnisse übersichtlich in einer Tabelle wie in Fig. 1 zusammen.

Figur	Streckungsfaktor	Flächeninhalt der	
		Ausgangsfigur	Bildfigur
Dreieck			
Quadrat			
...			

Fig. 1

Versucht einen Zusammenhang zwischen Flächeninhalt der Ausgangsfigur und Flächeninhalt der Bildfigur in Abhängigkeit des Streckungsfaktors zu erkennen. Formuliert den Zusammenhang in Form einer Gleichung.

3. Mit dem Pantograph zum Strahlensatz

Ihr habt bereits Erkenntnisse einerseits über die Lage der Leisten mit den Punkten W und V sowie U und F, andererseits auch über die Lage der Punkte S, F und F' gewonnen. Nun sollen speziell die Entfernungen der Strecken $\overline{SF}$ und $\overline{SF'}$ untersucht werden.

Wählt zunächst wieder einen Pantographen, für den gilt: $\overline{SU} = \overline{UW}$. Das Verhältnis $\frac{\overline{SW}}{\overline{SU}}$ ist hier offensichtlich $\frac{2}{1}$. Notiert für verschiedene Stellungen des Pantographen die Längen der Strecken $\overline{SF}$ und $\overline{SF'}$ und berechnet das Verhältnis $\frac{\overline{SF'}}{\overline{SF}}$. Was stellt ihr fest?

Verwendet Pantographen mit verschiedenen Streckenverhältnissen $\frac{\overline{SW}}{\overline{SU}}$ und wiederholt eure Untersuchungen aus der vorherigen Aufgabenstellung.

Betrachtet man die Leisten des Pantographen und die gedachte Linie zwischen S und F' als Strecken, entsteht eine Figur wie in Fig. 2.

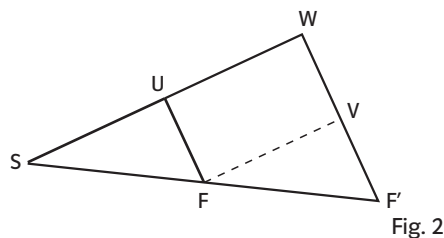


Fig. 2

Versucht mit den bisher gewonnenen Erkenntnissen den folgenden Satz in eurem Heft zu vervollständigen:

Für eine Figur wie in Fig. 2, bei der $\overline{UF}$ und $\overline{WF'}$... verlaufen, gilt folgende Verhältnisgleichung: ...

Die obige Vermutung ist ein Teil des ersten Strahlensatzes. Informiert euch in mathematischen Nachschlagewerken über seine exakte Formulierung.

1 Maßstäblich vergrößern und verkleinern – Ähnlichkeit



Vergrößerte oder verkleinerte Bilder haben Gemeinsamkeiten und sind doch unterschiedlich.

Ob Modelleisenbahn, Foto, Landkarte oder Kopierer – maßstäbliche Vergrößerungen oder Verkleinerungen sind jedem schon begegnet. Um zu erkennen, was sich beim maßstäblichen Vergrößern und Verkleinern verändert und was unverändert bleibt, werden ein Dreieck (Original) und seine mit dem Kopierer erzeugte Vergrößerung (Bild) betrachtet.



Die Winkelgrößen wurden durch das Vergrößern nicht verändert, nur die Seiten sind länger geworden. Misst man die Längen der Seiten, so wird ein Zusammenhang deutlich.

	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{AC}$
kleines Dreieck	3 cm	2 cm	1,4 cm
großes Dreieck	4,5 cm	3 cm	2,1 cm
Längenverhältnis	$4,5 \text{ cm} : 3 \text{ cm} = \frac{3}{2} = 3 : 2$	$3 \text{ cm} : 2 \text{ cm} = \frac{3}{2} = 3 : 2$	$2,1 \text{ cm} : 1,4 \text{ cm} = \frac{3}{2} = 3 : 2$

Bei einer Vergrößerung sind die Quotienten entsprechender Seitenlängen größer als 1. Sind die Quotienten kleiner als 1, so liegt eine Verkleinerung vor.

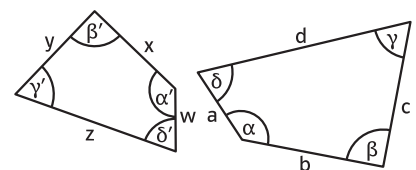
Das Zeichen $\sim$ für ähnlich ist aus dem umgekehrt liegenden S, dem Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes „similis“ (ähnlich), entstanden.

Dividiert man jeweils die Länge einer Seite des größeren Dreiecks durch die Länge der entsprechenden Seite im kleineren Dreieck, so erhält man stets den gleichen Quotienten $k = \frac{3}{2}$. Man sagt: Die Längen entsprechender Seiten stehen in einem festen Längenverhältnis zueinander. Das Verhältnis aus Länge der Bildstrecke zur Länge der zugehörigen Originalstrecke heißt **Maßstab**. Im angegebenen Beispiel beträgt er 3:2 oder auch 1,5:1.

Diese Überlegungen kann man auf beliebige Figuren übertragen. Gehen zwei Figuren F_1 und F_2 durch eine maßstäbliche Vergrößerung oder Verkleinerung auseinander hervor, stimmen sie in einander entsprechenden Winkeln und den Längenverhältnissen einander entsprechender Seiten überein. Man nennt dann die Figuren zueinander **ähnlich** und schreibt kurz $F_1 \sim F_2$. Den Quotienten k nennt man deshalb auch **Ähnlichkeitsfaktor**.

Zwei Figuren heißen ähnlich, wenn die Längenverhältnisse einander entsprechender Strecken und einander entsprechende Winkel gleich groß sind.

$$\frac{a}{w} = \frac{b}{x} = \frac{c}{y} = \frac{d}{z} \quad \text{und} \quad \alpha = \alpha'; \quad \beta = \beta'; \quad \gamma = \gamma'; \quad \delta = \delta'$$



Beispiel 1

In Fig. 1 sieht man einen Ausschnitt des Nationalparks Sächsische Schweiz auf einer Autokarte. Auf dieser Karte beträgt die Entfernung zwischen den Orten Wehlen und Rathen 1,7cm. In Wirklichkeit sind die Orte Luftlinie aber 3,4km entfernt.



Fig. 1

- Berechne den Maßstab der Autokarte.
- Wie weit ist Bad Schandau Luftlinie von Königstein entfernt, wenn auf der Karte der Abstand beider Orte 2,5cm beträgt?

Lösung:

a) $k = \frac{\text{Bildstreckenlänge}}{\text{Originalstreckenlänge}} = \frac{1,7 \text{ cm}}{3,4 \text{ km}} = \frac{1,7 \text{ cm}}{340\,000 \text{ cm}} = \frac{1}{200\,000}$ Der Maßstab beträgt 1:200 000.

b) Es gilt: $\frac{1}{200\,000} = \frac{2,5 \text{ cm}}{x}$, damit $x = 500\,000 \text{ cm}$. Beide Orte sind Luftlinie 5 km entfernt.

Beispiel 2

- Untersuche, ob je zwei der Vierecke in Fig. 2 ähnlich sind.
- Zeichne ein zum Viereck EFGH ähnliches Viereck E'F'G'H' mit dem Ähnlichkeitsfaktor 3.

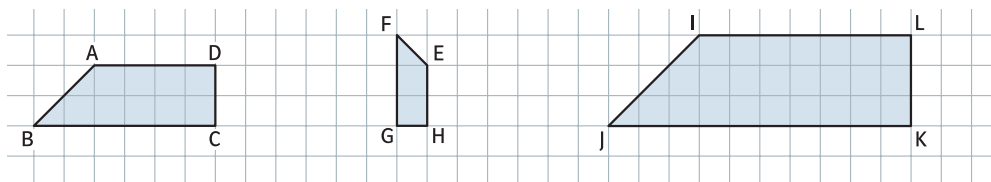


Fig. 2

Lösung:

- Vergleich der Winkel: Einander entsprechende Winkel in den drei Vierecken sind gleich groß.

Die Vierecke haben jeweils zwei rechte Winkel, einen Winkel von 45° und einen Winkel von 135° . Dies erkennt man daran, dass $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ und $\overline{IJ}$ jeweils diagonal durch die quadratischen Kästchen verlaufen.

Vergleich der Seitenverhältnisse (Vierecke ABCD und EFGH): $\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{HE}}{\overline{DA}} = \frac{1}{2}$

Die Quotienten aller einander entsprechender Seitenlängen sind gleich groß. Die Vierecke ABCD und EFGH sind also ähnlich.

Bei den Vierecken ABCD und IJKL ergeben sich verschiedene Seitenverhältnisse:

$\frac{\overline{IJ}}{\overline{AB}} = \frac{3}{2}$, $\frac{\overline{JK}}{\overline{BC}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$. Also sind die Vierecke ABCD und IJKL nicht ähnlich.

- Siehe Fig. 3.

Die Winkel im Viereck E'F'G'H' sind jeweils genauso groß wie die in EFGH. Die Seitenlängen sind jeweils verdreifacht.

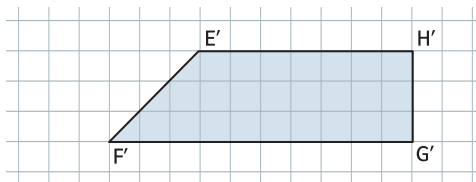


Fig. 3

Die Vierecke ABCD und IJKL in Fig. 2 sind nicht ähnlich, obwohl alle vier einander entsprechenden Winkel jeweils gleich groß sind!

Aufgaben

- Die Spurweite der Deutschen Bahn beträgt 1435 mm. Welche Spurweite hat eine H0-Modellbahn (Maßstab 1:87) und eine N-Modellbahn (Maßstab 1:160)?

2 Übertrage die Tabelle in dein Heft und fülle sie aus.

Maßstab	1:8	1:20	15:1	1:50 000		
Bildlänge		45 cm		1,3 mm	2 cm	3 cm
Originallänge	12 m		2 mm		4 km	0,5 mm



3 Mit einem Fotokopierer können Zeichnungen maßstäblich vergrößert bzw. verkleinert werden. Dabei ist anzugeben, wie viel Prozent der Originallänge die Bildlänge auf der Fotokopie haben soll.

a) Berechne, auf wie viel Prozent der Kopierer einzustellen ist, wenn das Original im Maßstab 1:4 verkleinert werden soll.

b) Ein Brief ist in Perlschrift (1,88 mm hoch) geschrieben. Er wird mit 120 % kopiert. Ermittle die Höhe der Schrift in der Kopie.

4 Besorgt euch einen Stadtplan oder eine entsprechende Karte eurer Gemeinde.

a) Übertragt mit Pergamentpapier den Ausschnitt in euer Heft, in den ihr euren Schulweg eintragen könnt.

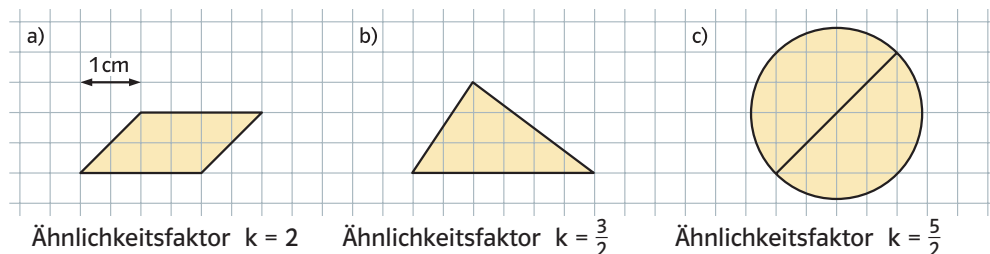
b) Zeichnet euren Schulweg ein und messt die Länge des Streckenzuges.

c) Berechne die wirkliche Länge mit Hilfe des angegebenen Maßstabs.

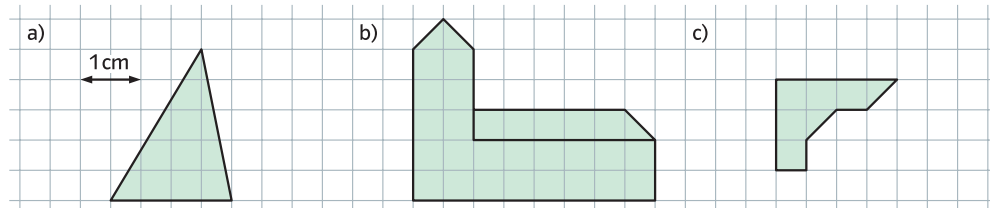
Überlegt, warum diese Länge nur ein Näherungswert für die wirkliche Länge sein kann.

5 Das Leipziger Völkerschlachtdenkmal besitzt eine Gesamthöhe von 91 m, der Berliner Fernsehturm von 368 m. Welcher Maßstab müsste gewählt werden, damit diese Bauwerke in ein DIN-A4-Heft gezeichnet werden können?

6 Zeichne auf kariertem Papier eine ähnliche Figur unter Verwendung des angegebenen Ähnlichkeitsfaktors.



7 Zeichne ab und vergrößere zu einer ähnlichen Figur, die gerade noch in ein Quadrat der Kantenlänge 10 cm hineinpasst. Welcher Ähnlichkeitsfaktor ist zu wählen?



8 Gespräch beim Betrachten des Fotoalbums: „Sieh mal Tina, Christina sieht ihrer Schwester ganz schön ähnlich!“

Was ist gemeint? Vergleiche mit dem Begriff der Ähnlichkeit in der Mathematik.

9 Prüfe, ob je zwei der drei übereinanderliegenden Rechtecke in Fig. 1 ähnlich sind. Bestimme gegebenenfalls den Maßstab.

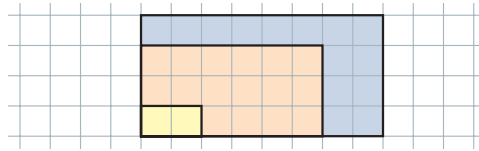
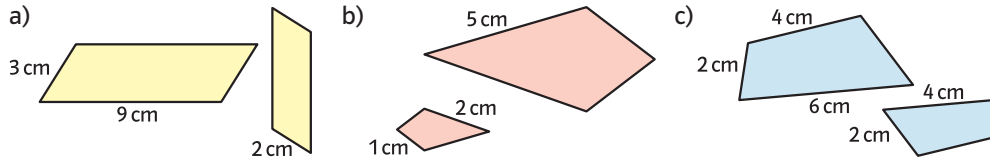


Fig. 1

10 Berechne die fehlenden Seitenlängen der ähnlichen Figuren.



Bist du sicher?

1 Untersuche die Sechsecke in Fig. 2 auf Ähnlichkeit.

2 Ein Viereck ABCD ist durch die Punkte A(1|1), B(4|1), C(2|3) und D(2|2) gegeben. Zeichne das Viereck ABCD und mit dem Ähnlichkeitsfaktor 4 ein zu ABCD ähnliches Viereck A'B'C'D'.

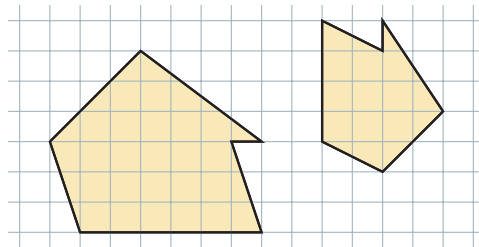
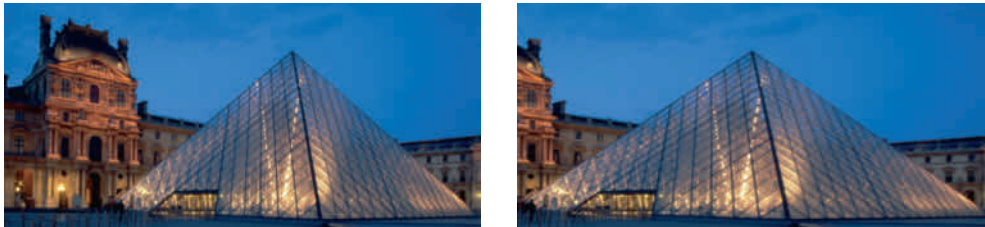


Fig. 2

11 Auf den Bildern ist jeweils die Pyramide vor dem Louvre in Paris zu sehen. Um das Foto rechts zu erhalten, wurde das linke Foto mithilfe eines Computers bearbeitet.



- Beschreibe die Veränderungen, die sich durch die Bildbearbeitung ergeben haben.
- Wie kann man mit dem Computer eine maßstabsgerechte Vergrößerung erreichen?

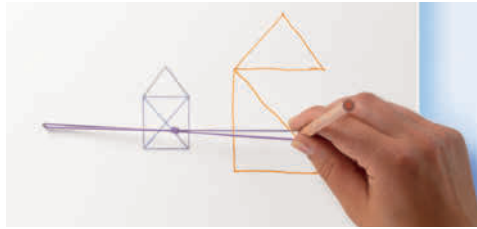
12 Ein Dia des Brandenburger Tores hat die Größe $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$. Davon sollen Abzüge auf Fotopapier bestellt werden, die in den Formaten 9×13 , 10×15 oder 13×18 angeboten werden (alle Angaben in cm).

- Welche der Fotoformate sind zum Format des Dias ähnlich? Nenne weitere Formate, die zum Format des Dias ähnlich sind.
- Welche Folgen kann es haben, wenn das Fotoformat nicht ähnlich zum Diaformat ist?



13 Zeichnet eine Figur auf eine Folie. Legt die Folie auf den Overheadprojektor und richtet diesen so ein, dass eine maßstabsgerechte Vergrößerung mit dem Ähnlichkeitsfaktor 6 (10; 15) entsteht. Auf welche Einstellungen des Overheadprojektors müsst ihr achten, damit die Figuren auf der Folie und an der Wand ähnlich sind?

2 Zentrische Streckungen



Mit einem verknoteten Gummiband und einem Stift wird ein Bild vergrößert. Befestige dazu das Gummiband an einem Punkt und bewege den Stift so, dass sich der Knoten über die Linien der Vorlage bewegt.

Bei einem Diaprojektor wird durch Lichtstrahlen, die von einer zentralen Lichtquelle ausgehen, ein vergrößertes Bild erzeugt. Nach einem ganz ähnlichen Prinzip kann auch in der Ebene zu einer Ausgangsfigur (Original) eine vergrößerte Bildfigur konstruiert werden. Dazu legt man einen Punkt S fest und zeichnet Geraden durch S und geeignete Punkte des Originals.

Verlängert man alle Strecken von S zu den Endpunkten des Originals, z. B. auf das Doppelte, so erhält man die Eckpunkte einer vergrößerten Bildfigur. Das blau gezeichnete Viereck in Fig. 1 wird auf diese Weise auf das rot gezeichnete abgebildet. Diese Abbildung nennt man **zentrische Streckung** mit dem **Streckungszentrum S** und dem **Streckungsfaktor $k = 2$** .

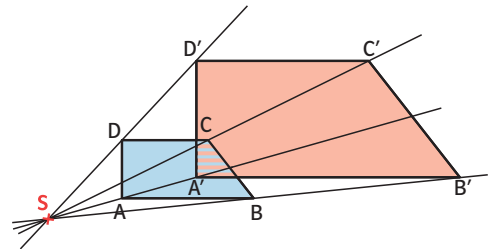


Fig. 1

In Fig. 2 ist ein Dreieck an einem Streckungszentrum S zentrisch gestreckt. Wie in Fig. 1 sind die Eckpunkte der roten Bildfigur jeweils doppelt so weit vom Streckungszentrum S entfernt wie die entsprechenden Eckpunkte der blauen Originalfigur.

Im Gegensatz zu Fig. 1 liegen hier jedoch Bild- und zugehörige Originalpunkte jeweils auf verschiedenen Seiten von S .

Dieser Sachverhalt wird durch das Vorzeichen des Streckungsfaktors berücksichtigt: Man sagt, dass das blaue Dreieck durch eine zentrische Streckung mit dem **negativen Streckungsfaktor $k = -2$** auf das rote Dreieck abgebildet wird.

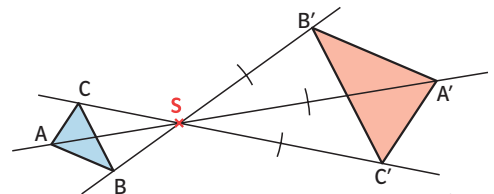
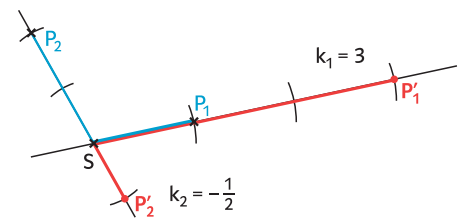


Fig. 2

Das Streckungszentrum S ist einziger Fixpunkt einer Streckung mit dem Streckungsfaktor $k \neq 1$. Für $k = 1$ sind alle Punkte Fixpunkte (identische Abbildung). Eine zentrische Streckung mit dem Streckungsfaktor $k = -1$ ist gleichbedeutend mit einer Punktspiegelung an S .

Bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckungszentrum S und dem Streckungsfaktor k ($k \in \mathbb{R}$) wird jeder Punkt P auf einen Punkt P' wie folgt abgebildet:

- (1) P' liegt auf der Geraden durch P und S .
- (2) Es gilt: $\overline{SP'} = |k| \cdot \overline{SP}$.
- (3) Für $k > 0$ liegen P und P' auf derselben Seite von S , für $k < 0$ auf verschiedenen Seiten von S . Der Punkt S wird auf sich selbst abgebildet (Fixpunkt).



Vergleicht man bei einer zentrischen Streckung die Originalfigur mit der Bildfigur, so stellt man folgende Eigenschaften fest:

- (1) Original- und zugehöriger Bildwinkel sind gleich groß (Winkeltreue).
- (2) Jede Bildstrecke ist $|k|$ -mal so lang wie die zugehörige Originalstrecke.
- (3) Jede Bildstrecke verläuft zur zugehörigen Originalstrecke parallel.

Aus den Eigenschaften (1) und (2) folgt insbesondere:

Eine Figur und die durch zentrische Streckung erzeugte Bildfigur sind einander ähnlich.

Die Eigenschaften der zentrischen Streckungen werden hier der Anschauung entnommen, auf eine Begründung im Sinne eines mathematischen Beweises wird verzichtet.

Beispiel 1 Zentrische Streckungen eines Dreiecks

Bilde das Dreieck ABC mit $A(4|-2)$, $B(8|-2)$ und $C(4|4)$ durch eine zentrische Streckung ab.

a) Streckungszentrum: $O(0|0)$;

Streckungsfaktor: $k = 1,5$

b) Streckungszentrum: $C(4|4)$;

Streckungsfaktor: $k = -0,5$

Lösung:

a) Dreieck ABC und Geraden OA, OB und OC zeichnen; $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ und $\overline{OC}$ von O aus auf das 1,5-Fache verlängern (Fig. 1), um die Bildpunkte A'_1 , B'_1 , C'_1 von A, B und C zu erhalten.

b) C ist Fixpunkt. Der Bildpunkt A'_2 von A liegt auf der Verlängerung von $\overline{AC}$ über C hinaus und ist halb so weit von C entfernt wie A. Entsprechend liegt der Bildpunkt B'_2 von B auf der Verlängerung von $\overline{BC}$ über C hinaus und ist halb so weit von C entfernt wie B (Fig. 2).

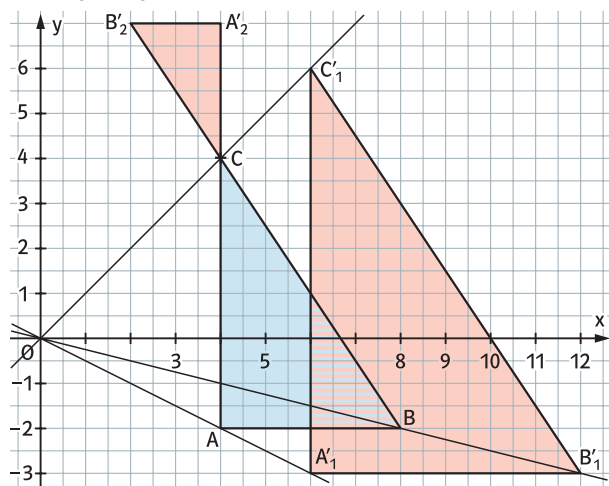


Fig. 1

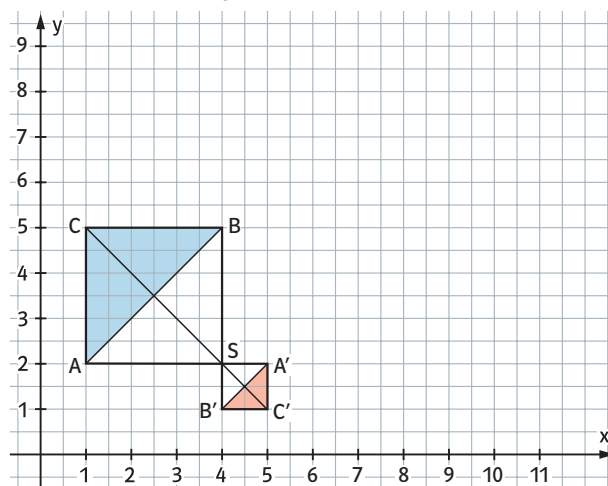


Fig. 2

Beispiel 2 Bestimmung von Streckungszentrum und Streckungsfaktor

Untersuche, ob das Dreieck A'B'C' in Fig. 2 durch eine zentrische Streckung aus dem Dreieck ABC entstanden sein kann.

Lösung:

Die Geraden durch einander entsprechende Punkte schneiden sich in einem Punkt (Fig. 2).

Die Längen entsprechender Seiten verhalten sich jeweils wie 1:3.

Das Dreieck ABC kann durch eine zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum $S(4|2)$ und dem Streckungsfaktor $k = -\frac{1}{3}$ auf das Dreieck A'B'C' abgebildet werden.

Beispiel 3 Berechnen und Anwenden des Streckungsfaktors

Eine zentrische Streckung bildet das Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$ und $c = 7 \text{ cm}$ auf ein Dreieck $A'B'C'$ mit $b' = A'C' = 4 \text{ cm}$ ab. Wie groß kann der Streckungsfaktor sein? Wie lang sind die Seiten $a' = B'C'$ und $c' = A'B'$ des Bilddreiecks?

Lösung:

Es gilt: $|k| = \frac{b'}{b} = \frac{4 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0,8$. Der Streckungsfaktor kann 0,8 oder auch $-0,8$ sein.

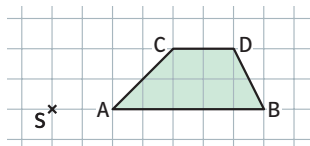
In beiden Fällen gilt: $a' = 0,8 \cdot 4 \text{ cm} = 3,2 \text{ cm}$ und $c' = 0,8 \cdot 7 \text{ cm} = 5,6 \text{ cm}$.

Aufgaben

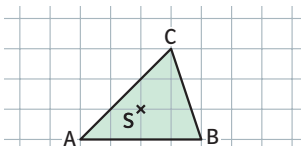
Für $|k| > 1$ wird eine Figur vergrößert, für $0 < |k| < 1$ verkleinert.

1 Übertrage ins Heft und strecke am Streckungszentrum S mit dem Streckungsfaktor k.

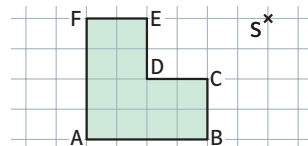
a) $k = 3$



b) $k = -2$



c) $k = 0,5$



2 Zeichne das Dreieck ABC mit $A(2|1)$, $B(4|-1)$ und $C(5|3)$. Bilde das Dreieck durch die zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum S und dem Streckungsfaktor k ab.

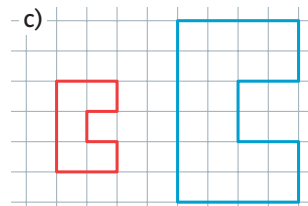
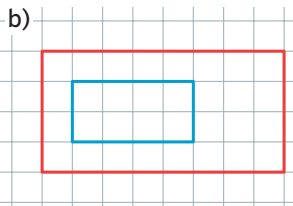
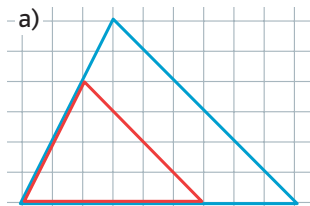
a) $S(1|1)$; $k = 2$

b) $S(4|1)$; $k = -0,5$

c) $S(3|2)$; $k = 3$

d) $S = B$; $k = -1,5$

3 Die rote Figur ist durch eine zentrische Streckung aus der blauen Figur entstanden. Wo befindet sich das Streckungszentrum? Wie groß ist der Streckungsfaktor?



4 Kann die rote Figur Bild der blauen Figur bei einer zentrischen Streckung sein? Begründe.

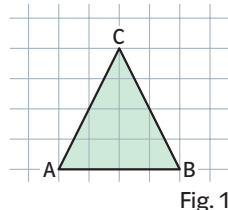
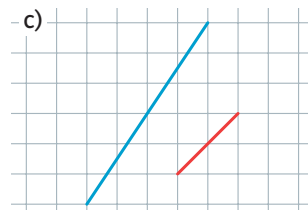
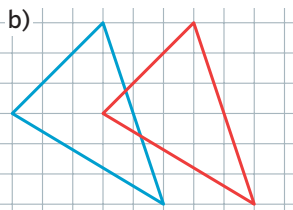
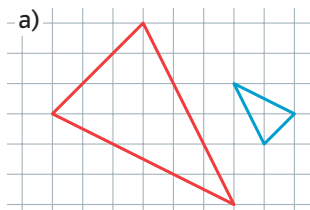


Fig. 1

Aufgabe 5 lässt sich besonders anschaulich mit einer DGS lösen.

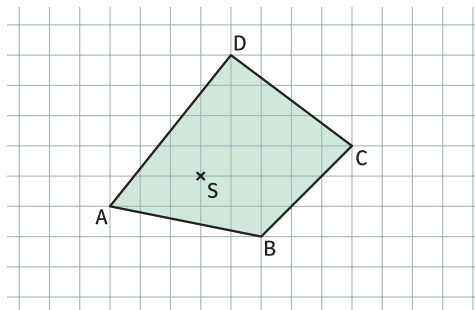
5 a) Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck wie in Fig. 1 und bilde es durch zentrische Streckungen mit dem Streckungsfaktor $k = 2$ ab. Wähle verschiedene Lagen für das Streckungszentrum und beobachte die Lage des Bilddreiecks.

b) Wie beeinflusst die Lage des Streckungszentrums die Lage des Bilddreiecks? Versucht, das Streckungszentrum so zu platzieren, dass das Bilddreieck mit dem Ausgangsdreieck keinen Punkt (genau einen Punkt) gemeinsam hat.

Bist du sicher?

1 Übertrage die Figur in dein Heft und führe eine zentrische Streckung an S mit dem Streckungsfaktor $k = -2$ durch.

2 Prüfe, ob sich das Dreieck ABC mit $A(2|1)$, $B(5|2)$ und $C(1|3)$ durch eine zentrische Streckung auf das Dreieck mit $A'(6|3)$, $B'(15|6)$ und $C'(3|9)$ abbilden lässt. Gib gegebenenfalls das Streckungszentrum S und den Streckungsfaktor k an.



6 Ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 3\text{ cm}$ und $b = 5\text{ cm}$ wird durch eine zentrische Streckung auf ein Rechteck abgebildet, dessen eine Seite $7,5\text{ cm}$ lang ist. Wie lang kann die andere Seite des Bildrechtecks sein?

7 Übertrage die Figuren in dein Heft. Bestimme das Streckungszentrum und den Streckungsfaktor der zentrischen Streckung.

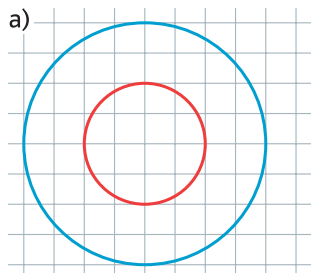


Fig. 1

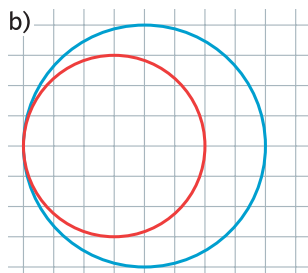


Fig. 2

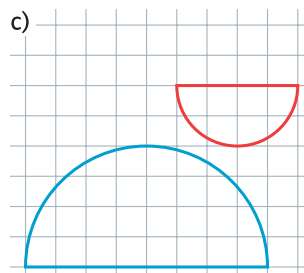


Fig. 3

8 Zeichne mit einer DGS ein Dreieck ABC und einen Punkt S außerhalb des Dreiecks.

a) Bilde das Dreieck durch eine zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum S und dem Streckungsfaktor $k = 2$ auf das Bilddreieck $A'B'C'$ ab. Überprüfe mithilfe der Messwerkzeuge der DGS die Eigenschaften einer zentrischen Streckung.

b) Wähle andere Streckungsfaktoren und bearbeite nochmals die Teilaufgabe a).

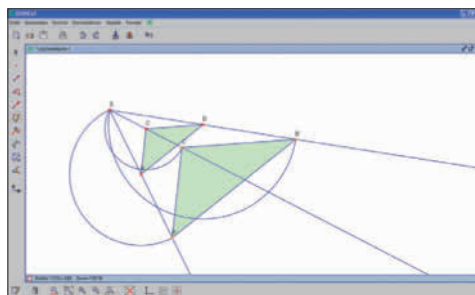


Fig. 4

9 In Fig. 5 wurde begonnen, eine Figur und deren zentrisch gestrecktes Bild zu zeichnen. Sowohl die Original- als auch die Bildfigur sind noch unvollständig.

a) Übertrage Fig. 5 in dein Heft und vervollständige Original- und Bildfigur.

b) Ermittle die Lage des Streckungszentrums. Wie groß ist der Streckungsfaktor?

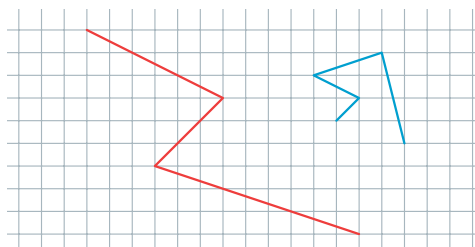
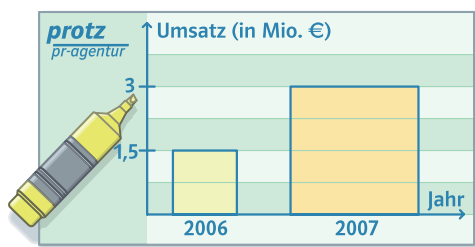


Fig. 5

3 Flächeninhalte und Volumina



Stolz präsentiert Herr Protz die Bilanz seiner Firma: „In nur einem Jahr haben wir unseren Umsatz verdoppelt. Die Grafik belegt dies mehr als deutlich!“

In Fig. 1 wurde ein Dreieck zentrisch gestreckt. Das Ausgangsdreieck hat den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}gh$, das Bilddreieck den Flächeninhalt $A' = \frac{1}{2}g'h'$. Wie die Streckenlängen stehen auch die Flächeninhalte in einem festen Verhältnis zueinander.

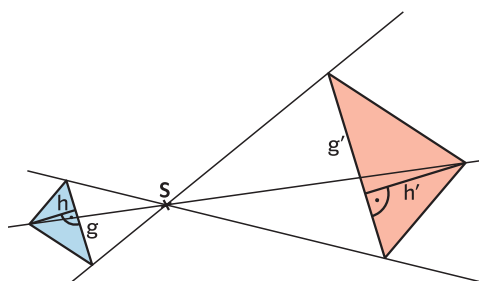


Fig. 1

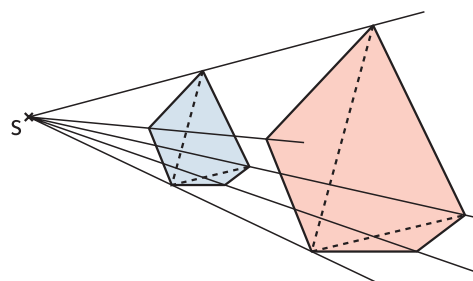


Fig. 2

Wird ein Dreieck mit der Grundseite g und der zugehörigen Höhe h durch eine zentrische Streckung abgebildet, so ändern sich die Größen der Winkel nicht. Im Bilddreieck verläuft h' senkrecht zu g' und ist damit Höhe auf g' (Fig. 1). Mit dem Streckungsfaktor k lassen sich im Bilddreieck die Längen der Grundseite g' und der Höhe h' berechnen. Es gilt $g' = |k| \cdot g$ und $h' = |k| \cdot h$. Damit erhält man

$$A' = \frac{1}{2}g'h' = \frac{1}{2}(|k| \cdot g) \cdot (|k| \cdot h) = \frac{1}{2}|k|^2 \cdot gh = k^2 \cdot \frac{1}{2}gh = k^2 \cdot A.$$

Da sich jedes Vieleck in Dreiecke zerlegen lässt (Fig. 2), gilt dieser Zusammenhang für jedes Vieleck.

In gleicher Weise wie Figuren in der Ebene können Körper im Raum mit einem Streckungsfaktor k zentrisch gestreckt werden. Das bedeutet, dass auch im Raum Strecken auf parallele Strecken der $|k|$ -fachen Länge abgebildet werden und Größen von Winkeln erhalten bleiben.

Aufgrund dieser Eigenschaften können die obigen Gedanken zu den Flächeninhalten der zentrisch gestreckten Figuren in der Ebene auch auf Begrenzungsflächen von Körpern im Raum übertragen werden.

Wird zum Beispiel ein Würfel mit der Kantenlänge a und dem Streckungsfaktor k zentrisch gestreckt, gilt für das Volumen V' des Bildwürfels

$$V' = (a')^3 = (|k| \cdot a)^3 = |k|^3 \cdot a^3.$$

Mit der Beziehung $V' = a^3$ ergibt sich $V' = |k|^3 \cdot V$.

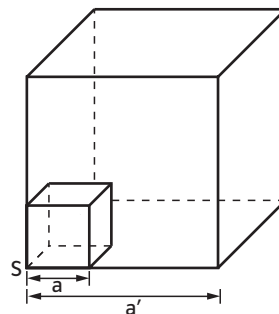


Fig. 3

Überlege, warum $|k^2| = k^2$ ist.

Allgemein kann man feststellen:

Wird eine Fläche mit dem Flächeninhalt A zentrisch gestreckt mit einem Streckungsfaktor k , gilt für den Flächeninhalt der zugehörigen Bildfläche: $A' = k^2 \cdot A$.
 Wird ein Körper mit dem Volumen V zentrisch gestreckt mit einem Streckungsfaktor k , gilt für das Volumen des zugehörigen Bildkörpers: $V' = |k|^3 \cdot V$.

Beispiel 1 Streckung einer Fläche

Ein Dreieck mit dem Umfang $u = 16 \text{ cm}$ und dem Flächeninhalt $A = 12 \text{ cm}^2$ wird zentrisch gestreckt. Das Bilddreieck hat einen Umfang $u' = 12 \text{ cm}$. Bestimme den Flächeninhalt A' des Bilddreiecks.

Lösung:

Zunächst berechnet man den Betrag des Streckungsfaktors und anschließend den Flächeninhalt.

$$\text{Mit } |k| = \frac{u'}{u} = \frac{12 \text{ cm}}{16 \text{ cm}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \text{ folgt } A' = k^2 \cdot A = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 12 \text{ cm}^2 = \frac{9 \cdot 12}{16} \text{ cm}^2 = 6,75 \text{ cm}^2.$$

Beispiel 2 Streckung eines Körpers

Von einer geraden quadratischen Pyramide mit der Grundkantenlänge $a_1 = 40 \text{ cm}$ und der Seitenkantenlänge $m_1 = 50 \text{ cm}$ wird parallel zur Grundfläche eine kleine Pyramide so abgeschnitten, dass die Seitenkantenlänge der kleinen Pyramide $m_2 = 18 \text{ cm}$ beträgt (Fig. 1). Berechne die Kantenlänge a_2 der Deckfläche des verbleibenden Pyramidenstumpfes sowie den prozentualen Anteil des Volumens der kleinen Pyramide am Volumen der Ausgangspyramide.

Lösung:

Die Restpyramide ist das Bild der Ausgangspyramide bei einer zentrischen Streckung mit dem Faktor $k = \frac{m_2}{m_1} = \frac{18 \text{ cm}}{50 \text{ cm}} = \frac{9}{25}$. Damit ergibt sich $a_2 = |k| \cdot a_1 = \frac{9}{25} \cdot 40 \text{ cm} = 14,4 \text{ cm}$.

Wegen $V' = |k|^3 \cdot V$ und damit $\frac{V'}{V} = |k|^3 = \left(\frac{9}{25}\right)^3 \approx 0,047$ beträgt der prozentuale Anteil 4,7%.

Der Umfang u einer Figur ist die Summe aller Seitenlängen. Es ist $u' = |k| \cdot u$.

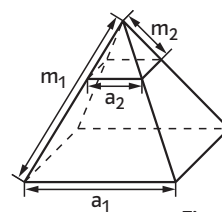


Fig. 1

Aufgaben

1 Das Rechteck mit den Seitenlängen a und b wird mit dem Streckungsfaktor k gestreckt. Berechne den Flächeninhalt des Bildrechtecks auf zwei verschiedene Arten.

a) $a = 4,5 \text{ cm}$; $b = 8 \text{ cm}$; $k = 2$

b) $a = 10 \text{ cm}$; $b = 5,5 \text{ cm}$; $k = -0,8$

2 Ergänze die folgenden Sätze in deinem Heft.

a) Wenn eine Strecke mit der Länge 3 cm mit dem Streckungsfaktor -2 zentrisch gestreckt wird, dann ist die zugehörige Bildstrecke ... cm lang.

b) Die Bildstrecke bei einer zentrischen Streckung ist 6 cm , die zugehörige Originalstrecke 4 cm lang. Der Streckungsfaktor beträgt ... oder ...

c) Ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $A = 10 \text{ cm}^2$ wird mit einem Streckungsfaktor $k = 4$ zentrisch gestreckt. Das Bilddreieck besitzt einen Flächeninhalt von ... cm^2

d) Ein Quader mit dem Volumen $V = 2 \text{ cm}^3$ wird auf ein Volumen von $V' = 54 \text{ cm}^3$ zentrisch gestreckt. Der Streckungsfaktor beträgt entweder $k = \dots$ oder $k = \dots$. Eine Seitenfläche des Bildquaders ist ... mal so groß wie die zugehörige Seitenfläche des ursprünglichen Quaders.

3 Strecke mit dem angegebenen Streckungsfaktor k und dem eingezeichneten Streckungszentrum S . Ermittle die Flächeninhalte von Original- und Bildfigur.

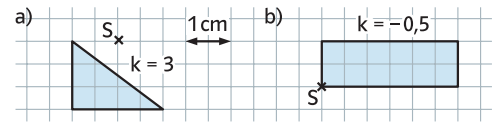


Fig. 1

4 Zeichne ein Dreieck ABC mit $A(3|1)$, $B(6|1)$, $C(5|3)$ und den Punkt $S(1|2)$. Strecke das Dreieck ABC zentrisch am Punkt S mit dem Streckungsfaktor $k = -2$. Bestimme die Flächeninhalte von Original- und Bilddreieck.



5 Wie ändern sich Flächeninhalt und Umfang eines Vielecks bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckungsfaktor

a) $k = 5$, b) $k = -\frac{1}{2}$, c) $k = \frac{4}{3}$?

6 Ein Fotolabor bietet Abzüge in verschiedenen Formaten an (Tab. 1). Vergleiche die Preise derjenigen Formate, die einander ähnlich sind, mit dem jeweiligen Bedarf an Fotopapier.

Format	Preis (in €)
7×10	0,09
9×13	0,19
10×15	0,29
13×18	0,44
20×30	0,99
40×60	2,19

Tab. 1

7 a) Ein Vieleck wird zentrisch gestreckt. Alle Längen werden dabei um 25% verlängert. Berechne, um wie viel Prozent sich sein Flächeninhalt vergrößert hat.

b) Durch eine zentrische Streckung wird das Volumen eines dreiseitigen Prismas verdoppelt. Welche Aussagen kannst du über den Streckungsfaktor machen?

	Original	Bild
k	1,6 cm	
A	2 cm^2	32 cm^2
V		320 cm^3

Tab. 2

8 Übertrage Tab. 2, die für eine zentrische Streckung einer Pyramide gilt, in dein Heft und fülle sie aus. Dabei sei k die Länge einer Seitenkante, A der Flächeninhalt der Grundfläche und V das Volumen der Pyramide.

Bist du sicher?

1 Ein Würfel mit einem Volumen von 27 cm^3 wird mit einem Streckungsfaktor $k = 2$ zentrisch gestreckt. Berechne vom Bildwürfel

a) das Volumen,

b) den Flächeninhalt einer Seitenfläche.

9 „Fish&Fun“ bietet quaderförmige Aquarien an (Fig. 2), deren Kantenlängen sich jeweils wie $6:2:3$ verhalten.

a) Welche zentrische Streckung bildet den kleinsten Quader auf jeweils einen der größeren Quader ab? Was kannst du über den jeweiligen Streckungsfaktor aussagen?

b) Wie lang, wie breit und wie hoch sind die Aquarien in Fig. 2? Berechne.

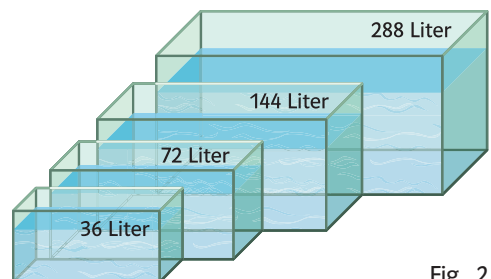
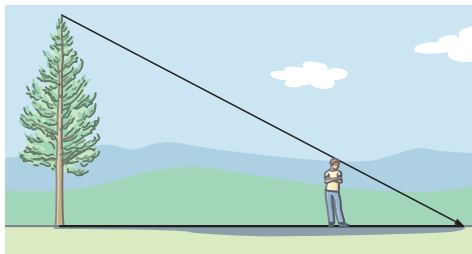


Fig. 2

10 Durch den Mittelpunkt einer Seitenkante einer Pyramide verläuft parallel zur Grundfläche der Pyramide ein ebener Schnitt. Dieser zerlegt die Pyramide in eine kleine Pyramide und einen Pyramidenstumpf. Zeige, dass das Volumen des Pyramidenstumpfes 87,5% des Volumens der Ausgangspyramide beträgt.

4 Strahlensätze

Wenn man sich geschickt im Sonnenlicht aufstellt, fällt der Endpunkt des Körperschattens mit dem Endpunkt des Baumschattens zusammen. Um die Baumhöhe berechnen zu können, müsste man noch Längen messen ...



Viele nicht direkt messbare Strecken lassen sich bestimmen, wenn andere Längen bekannt sind. Oft kann man die Berechnung auf eine so genannte **Strahlensatzfigur** (Fig. 1) zurückführen. In ihr werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt S von zwei parallelen Geraden g und g' geschnitten.

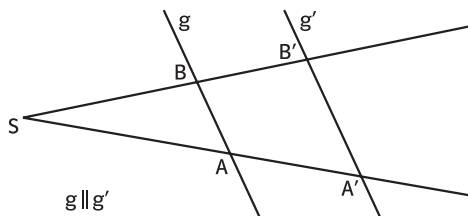


Fig. 1

Da g' zu g parallel ist, gibt es eine zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum S und einem Streckungsfaktor k ($k > 1$), sodass g' das Bild von g ist. Dabei sind A' und B' die Bildpunkte von A und B . Für die Längen der Strecken $\overline{SA'}$ und $\overline{SB'}$ gilt $\overline{SA'} = k \cdot \overline{SA}$ und $\overline{SB'} = k \cdot \overline{SB}$. Wegen $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = k$ und $\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = k$ folgt für die Abschnitte auf den Strahlen $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}$. Auch die Streckenverhältnisse $\frac{\overline{AA'}}{\overline{SA}}$ und $\frac{\overline{BB'}}{\overline{SB}}$ stimmen überein, denn mit $\overline{AA'} = \overline{SA'} - \overline{SA}$ und $\overline{BB'} = \overline{SB'} - \overline{SB}$ folgt $\frac{\overline{AA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SA'} - \overline{SA}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} - \frac{\overline{SA}}{\overline{SA}} = k - 1$ und $\frac{\overline{BB'}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SB'} - \overline{SB}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} - \frac{\overline{SB}}{\overline{SB}} = k - 1$.

Dieser Sachverhalt wird auch als **1. Strahlensatz** bezeichnet.

Wegen $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$ ist $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k$, und das Verhältnis der Parallelenabschnitte stimmt mit den Streckenverhältnissen $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = k$ und $\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = k$ überein. Es gilt also $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ und $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}$. Dieser Sachverhalt wiederum wird als **2. Strahlensatz** bezeichnet.

1. Strahlensatz

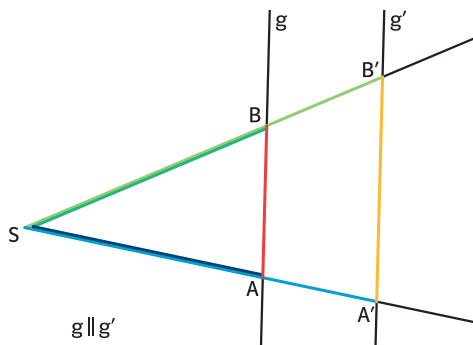
In jeder Strahlensatzfigur verhalten sich die **Abschnitte auf einem Strahl** wie die **entsprechenden Abschnitte auf dem**

anderen: $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}$ und $\frac{\overline{AA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{SB}}$.

2. Strahlensatz

In jeder Strahlensatzfigur verhalten sich die **Abschnitte auf den Parallelen** wie die **von S aus gemessenen entsprechenden Abschnitte auf jedem Strahl:**

$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ und $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}$.



Beachte beim 2. Strahlensatz: Die zu einem Parallelenabschnitt gehörenden Strahlenabschnitte werden stets jeweils von S aus gemessen!

Beispiel 1

In Fig. 1 sind die Geraden g und h parallel. Berechne die Längen der Strecke a und der Strecke b.

Lösung:

Man berechnet a mit dem 1. Strahlensatz:

$$\frac{3+a}{3} = \frac{6}{4}, \text{ also } 3+a = 4,5 \text{ und } a = 1,5.$$

Man berechnet b mit dem 2. Strahlensatz:

$$\frac{b}{2,4} = \frac{6}{4}, \text{ also } b = 3,6.$$

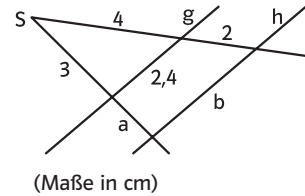


Fig. 1

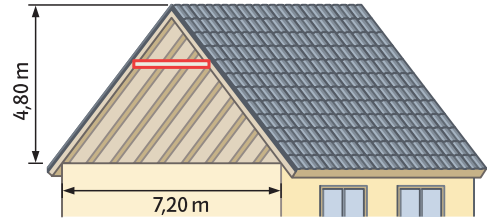
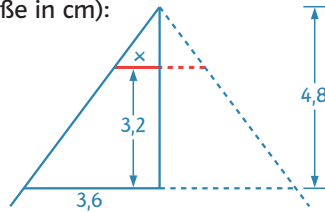
Weiterer möglicher Ansatz zur Berechnung der Strecke a im Beispiel 1:
 $\frac{a}{3} = \frac{2}{4}$

Beispiel 2

In ein Dachgeschoss mit einer Höhe von 4,80 m soll in einer Höhe von 3,20 m eine Decke eingezogen werden. Wie lang muss ein durchgängiger Deckenbalken sein?

Lösung:

Skizze (Maße in cm):



Decke und Boden sind parallel.

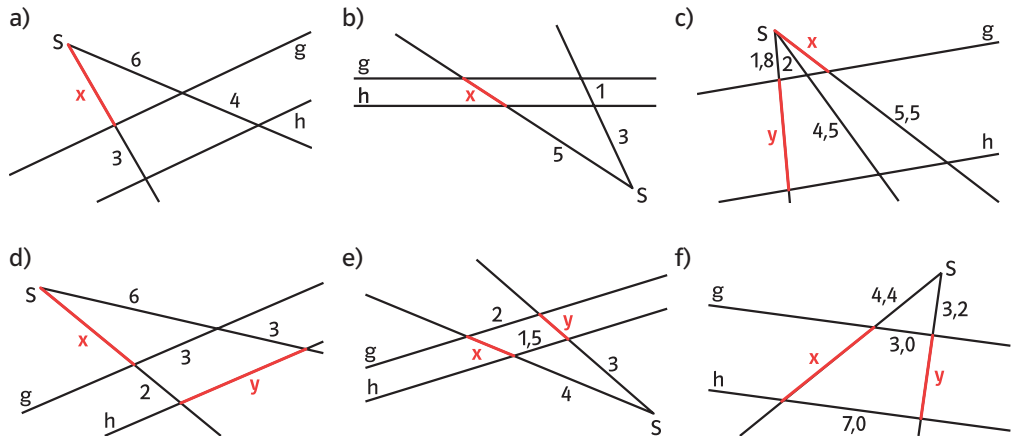
Ansatz mit 2. Strahlensatz:

$$\frac{x}{3,6} = \frac{4,8 - 3,2}{4,8} \text{ und } x = \frac{1,6 \cdot 3,6}{4,8} = 1,2$$

Der Deckenbalken muss 2,40 m lang sein.

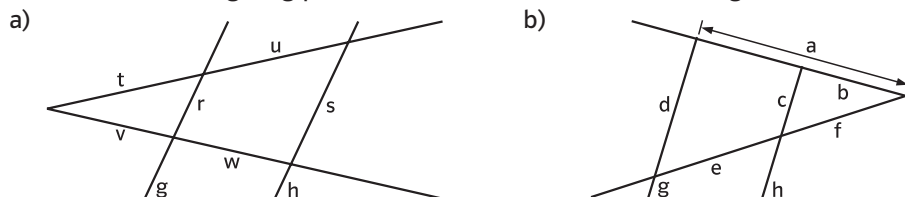
Aufgaben

1 In der Zeichnung ist g parallel zu h. Berechne die fehlenden Längen (Maße in cm).

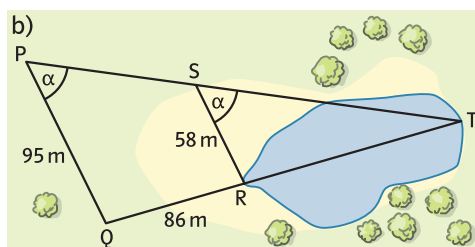
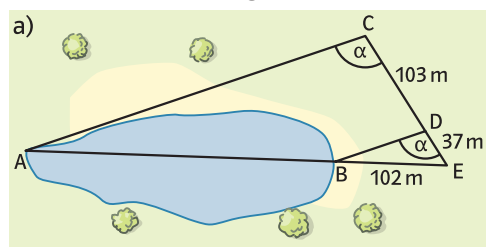


Tipp zum Lösen von Verhältnismäßigkeiten:
Multipliziere „über Kreuz“!

2 In der Zeichnung ist g parallel zu h. Welche Verhältnisse sind gleich?

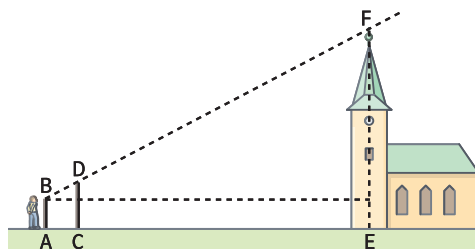


3 Berechne die Länge der Strecke über dem See.



Begründe, warum in Aufgabe 3 jeweils eine Strahlensatzfigur vorliegt.

4 Um die Höhe des Kirchturmes zu ermitteln, werden zwei Stäbe AB und CD mit den Längen 1,4 m und 2,1 m so aufgestellt, dass über sie die Spitze des Kirchturmes angepeilt werden kann. Die Abstände AC = 1,5 m und CE = 200 m wurden gemessen. Wie hoch ist der Kirchturm?



Bist du sicher?

1 Die Geraden g und h in Fig. 1 sind parallel. Berechne die Längen a und b.

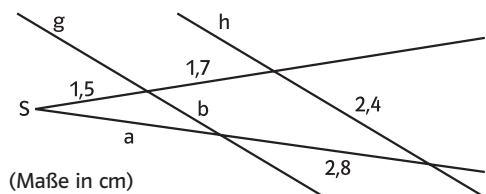


Fig. 1

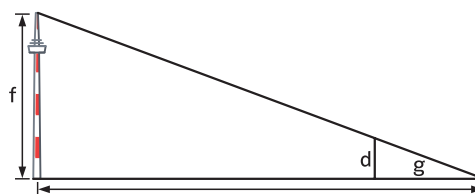
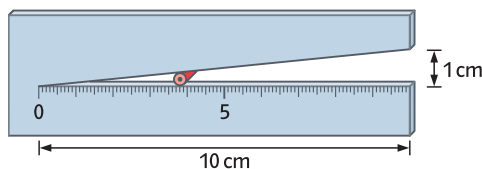
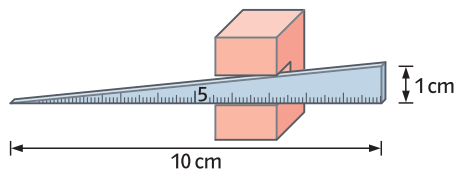


Fig. 2

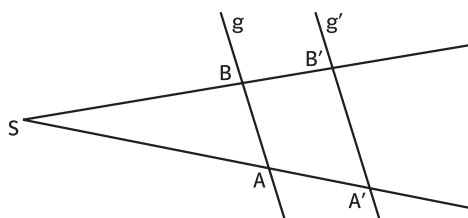
5 Mit Messkeil und Messlehre kann man kleine Öffnungen und kleine Dicken messen. Bestimme die Weite der Öffnung des Werkstücks und die Dicke des Drahtes.

Beschreibe Aufbau und Wirkungsweise von Messkeil und Messlehre.



6 Begründe oder widerlege die folgenden Aussagen.

- In jeder Strahlensatzfigur gilt $\frac{AA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB}$.
- In jeder Strahlensatzfigur gilt $\frac{A'B'}{SA} = \frac{AB}{SA}$.
- In einer Figur sind stets entweder beide Strahlensätze anwendbar oder keiner.



Info

Ein mathematischer Satz ist umkehrbar, wenn man beim Vertauschen von Voraussetzung und Behauptung eine wahre Aussage erhält. Sind die Strahlensätze umkehrbar, müsste aus den entsprechenden Verhältnisgleichungen die Parallelität von g' und g folgen.

Informiere dich über die Vorgehensweise beim **indirekten Beweis**.

Begründe mit Fig. 2, dass der 2. Strahlensatz nicht umkehrbar ist.

Umkehrbarkeit der Strahlensätze

Man nimmt an, dass $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB}$ gilt und g' nicht parallel zu g ist (indirekter Beweis). Dann existiert eine Gerade h' durch A' mit $h' \parallel g$ (Fig. 1).

Nach dem 1. Strahlensatz würde gelten: $\frac{SA'}{SA} = \frac{SC'}{SB}$. Das heißt aber, dass

$C' = B'$ und damit ist g' doch parallel zu g . Damit ist gezeigt, dass der

1. Strahlensatz umkehrbar ist.

Dagegen folgt aus $\frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB}$ nicht, dass

g' parallel zu g sein muss (Fig. 2). Der

2. Strahlensatz ist nicht umkehrbar.

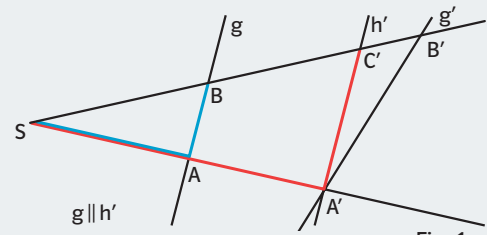


Fig. 1

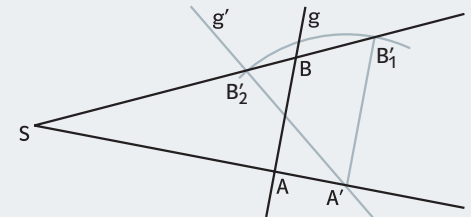


Fig. 2

7 Prüfe rechnerisch, welche der Geraden g , h , k in Fig. 3 zueinander parallel sind.

8 a) Begründe mithilfe eines Strahlensatzes, dass die Rechtecke $ABCD$ und $AB'C'D'$ in Fig. 4 den gleichen Flächeninhalt haben.

b) Verwandle wie in Fig. 4 ein Rechteck mit $a = 4\text{ cm}$ und $b = 6\text{ cm}$ in ein flächengleiches Rechteck, bei dem eine Seite 3 cm lang ist.

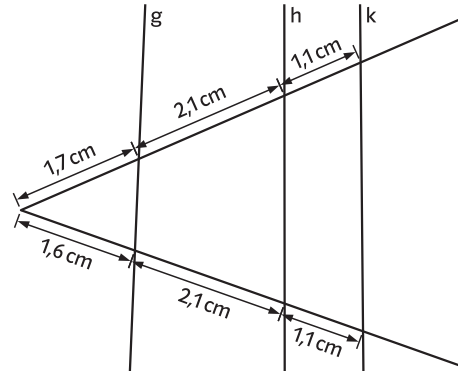


Fig. 3

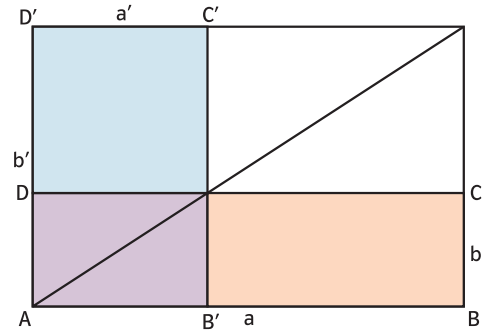


Fig. 4

9 Zeige: Wenn die Geraden g und h in Fig. 5 zueinander parallel sind, so gilt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Skizziere dir den Sachverhalt in Aufgabe 10.

10 Ein Mast steht in 90 m Entfernung von einer 8 m hohen Mauer. Steht man 15 m weit hinter der Mauer, so sieht man einen kleinen Teil des Masts über die Mauer ragen. Steht man 45 m weit hinter der Mauer, sieht man doppelt so viel vom Mast. Berechne die Höhe des Masts.

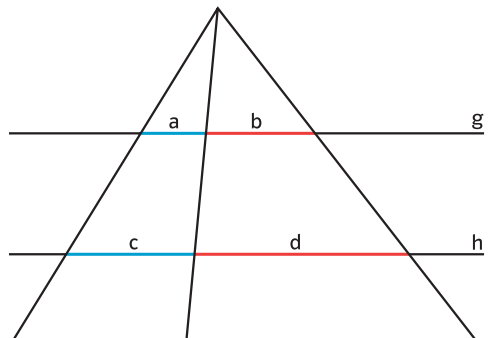
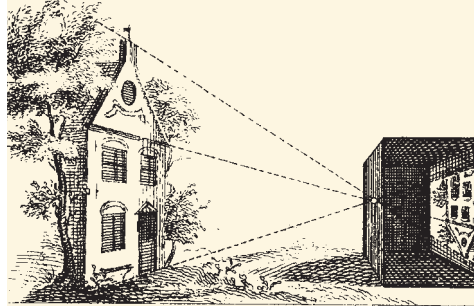


Fig. 5

5 Erweiterung der Strahlensätze

Mithilfe von sogenannten Lochkameras wurden bereits im 16. Jahrhundert Landschaften und Gegenstände exakt verkleinert gezeichnet.



In Fig. 1 werden zwei Geraden, die sich im Punkt S schneiden, von parallelen Geraden g und g' geschnitten. A' und B' können als Bildpunkte von A und B bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckungszentrum S aufgefasst werden. Der Streckungsfaktor k ist dabei negativ, und es gilt:

$$\overline{SA'} = k \cdot \overline{SA}, \text{ also } \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = k \text{ sowie } \overline{SB'} = k \cdot \overline{SB},$$

$$\text{also } \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = k \text{ und damit } \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}};$$

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SA'} + \overline{SA}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} + \frac{\overline{SA}}{\overline{SA}} = k + 1 \text{ sowie}$$

$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SB'} + \overline{SB}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} + \frac{\overline{SB}}{\overline{SB}} = k + 1 \text{ und damit } \frac{\overline{AA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{SB}}.$$

Da bei dieser zentrischen Streckung außerdem $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$ und damit $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k$ gilt, ergeben sich auch hier die Gleichungen $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ und $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}$.

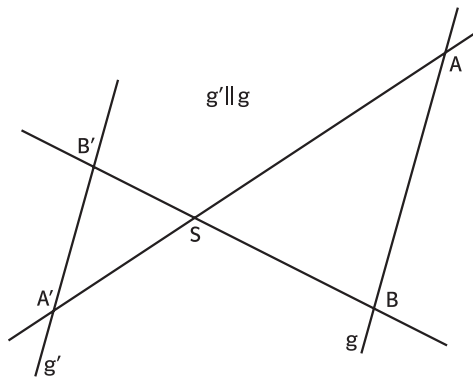


Fig. 1

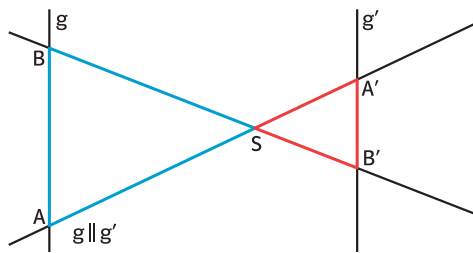
Damit können in der Definition der Strahlensatzfigur die zwei Strahlen mit gemeinsamen Anfangspunkt auch durch zwei sich schneidende Geraden ersetzt werden.

Strahlensätze

Werden zwei Geraden mit dem Schnittpunkt S von zwei Parallelen geschnitten, so gelten die Strahlensätze.

1. Strahlensatz: $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}$ und $\frac{\overline{AA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{SB}}$.

2. Strahlensatz: $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ und $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}$.



Beispiel 1

In der Figur ist $a \parallel b$. Berechne x und y .

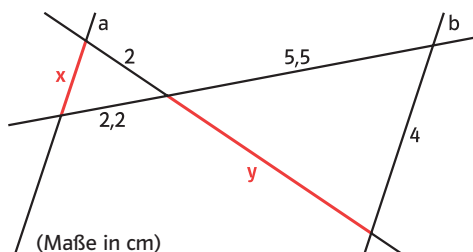
Lösung:

Nach dem 1. Strahlensatz gilt

$$\frac{y}{2} = \frac{5,5}{2,2}, \text{ also } y = \frac{5,5 \cdot 2}{2,2} = 5.$$

Nach dem 2. Strahlensatz gilt

$$\frac{x}{4} = \frac{2,2}{5,5}, \text{ also } x = \frac{2,2 \cdot 4}{5,5} = 1,6.$$



(Maße in cm)

Beispiel 2

Die beiden Geländepunkte A und B sind durch einen See getrennt. Um die Entfernung zu bestimmen, wurde gepeilt und gemessen.

Berechne die Entfernung von A nach B.

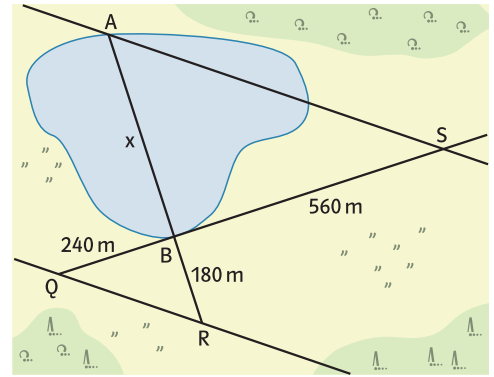
Lösung:

Man erkennt eine Strahlensatzfigur mit dem Schnittpunkt B.

Nach dem 1. Strahlensatz gilt:

$$\frac{x}{180} = \frac{560}{240}, \text{ also } x = \frac{560 \cdot 180}{240} = 420.$$

Die Entfernung zwischen den Geländepunkten A und B beträgt 420 m.



Aufgaben

- 1 Stelle mithilfe der Strahlensätze Verhältnisgleichungen für Fig. 1 auf.

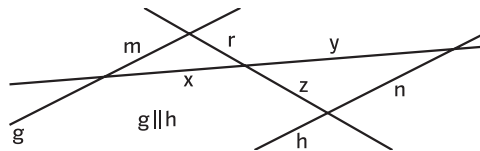


Fig. 1

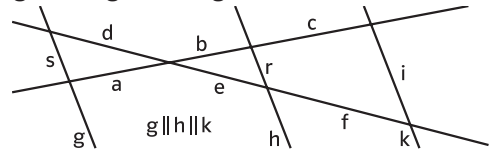
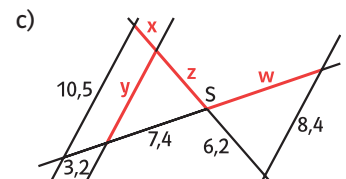
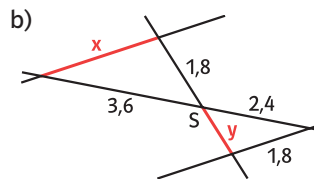
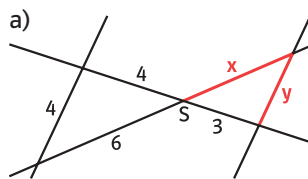


Fig. 2

- 2 Ergänze so, dass die Verhältnisgleichung für Fig. 2 erfüllt ist.

a) $\frac{a}{b} = \frac{\square}{e}$ b) $\frac{s}{i} = \frac{d}{\square}$ c) $\frac{a+b}{c} = \frac{\square}{f}$ d) $\frac{b}{\square} = \frac{r}{i}$ e) $\frac{a+b}{\square} = \frac{\square}{d}$ f) $\frac{b+c}{d} = \frac{i}{\square}$

- 3 Die Parallelen werden von zwei Geraden geschnitten. Berechne die fehlenden Längen (Maße in cm).



Leonardo da Vinci (1452–1519), italienischer Künstler, Architekt, Anatom, Mechaniker und Ingenieur

- 4 Leonardo da Vinci (1452–1519) schlug vor, die Breite eines Flusses wie in der nebenstehenden Zeichnung zu bestimmen. Erläutere das Verfahren, mit dem man die Breite berechnen kann, und bestimme die Flussbreite, wenn die folgenden Größen gemessen werden:

$$\overline{BC} = 1 \text{ m}, \overline{AB} = 20 \text{ cm}, \overline{AD} = 1,5 \text{ m}.$$

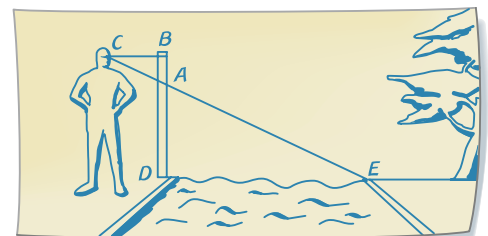


Fig. 3

- 5 Bestimmt mit dem Verfahren aus Fig. 3 Abstände in eurer Umgebung wie Schulhoflänge, Straßenbreiten und Sportplatzmaße. Ihr benötigt dazu eine Messlatte, zum Beispiel einen Hochsprungständer, ein Maßband und – die Strahlensätze. Überlegt auch, wie ihr den in Fig. 3 mit A bezeichneten Punkt möglichst genau bestimmen könnt.

6 Die Punkte A und B liegen am Rand einer Schlucht (Fig. 1). Um den Abstand $\overline{AB}$ bestimmen zu können, werden in ebenem Gelände folgende Längen gemessen: $\overline{QA} = 500\text{ m}$; $\overline{QS} = 200\text{ m}$; $\overline{RS} = 240\text{ m}$. Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$. Erläutere deine Vorgehensweise.

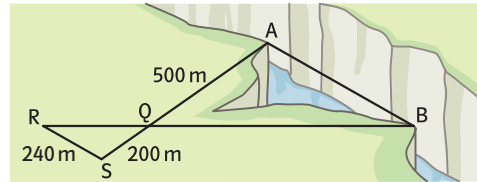


Fig. 1

Bist du sicher?

1 Berechne x , y und z in Fig. 2 (Maße in cm).

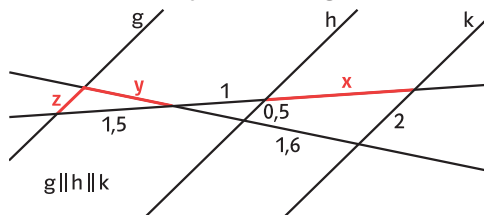


Fig. 2

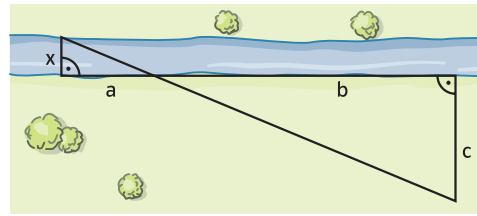


Fig. 3

2 Um die Breite eines Flusses von einer Uferseite aus zu bestimmen (Fig. 3), werden die Strecken $a = 15\text{ m}$; $b = 60\text{ m}$ und $c = 48\text{ m}$ gemessen. Bestimme die Flussbreite.

7 In Fig. 4 ist die Wirkungsweise einer Lochkamera schematisch dargestellt. Mit G und B werden die Gegenstandsgröße und die Bildgröße bezeichnet, mit g und b die Gegenstandsweite und Bildweite. Wie groß wird ein 114 m hoher Turm in 180 m Entfernung abgebildet, wenn die Bildweite 45 cm beträgt?

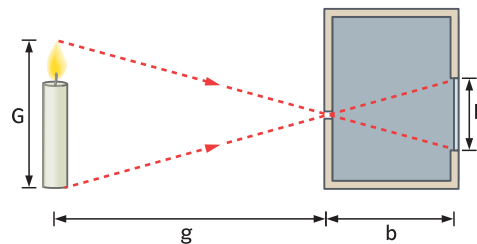


Fig. 4

8 Entfernungen im Gelände können mit dem so genannten Daumensprung abgeschätzt werden. Dabei peilt man einen Gegenstand nacheinander mit dem linken und dem rechten Auge an. Ist eine Größe im Gelände bekannt, lässt sich die zweite mittels Augenabstand und Armlänge abschätzen.

a) Wie weit steht Anke vom Dorf entfernt, wenn sie es mit einem Daumensprung abdeckt?

Augenabstand $a = 6\text{ cm}$

Armlänge $l = 58\text{ cm}$

Dorfbreite $z = 0,7\text{ km}$

b) Miss deine Armlänge und deinen Augenabstand und schätze Entfernungen im Gelände.

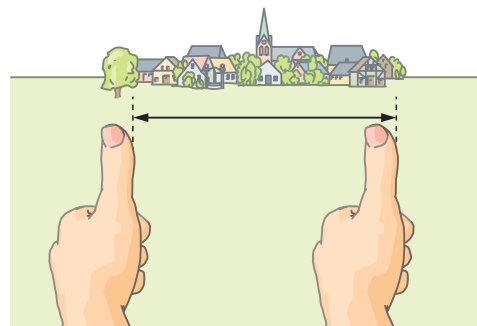


Fig. 5

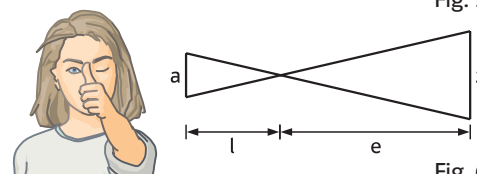
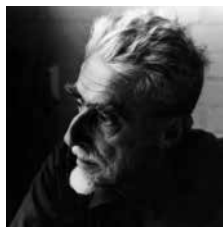


Fig. 6

6 Ähnlichkeitsabbildungen



Maurits Cornelis Escher, (1898 – 1972), niederländischer Künstler



Im Bild von M. C. Escher ist nur für Rochen Platz, die sich untereinander auch noch sehr ähnlich sehen.

Das sieht Escher mal wieder ähnlich.

Bildet man eine Figur durch eine Achsenspiegelung, Punktspiegelung, Drehung oder Verschiebung ab, so bleiben die Größen der Winkel und die Seitenlängen der Figur unverändert. Dabei entsteht eine deckungsgleiche, also kongruente Bildfigur. Diese Abbildungen heißen deshalb auch **Kongruenzabbildungen**. Zwei kongruente Figuren lassen sich immer durch Kongruenzabbildungen aufeinander abbilden.

Sind zwei ähnliche Figuren gegeben, so kann man stets eine der beiden Figuren durch eine zentrische Streckung so vergrößern oder verkleinern, dass das Bild zur anderen gegebenen Figur kongruent ist. Die gestreckte Figur lässt sich dann wie oben beschrieben durch eine Kongruenzabbildung auf die zweite Figur abbilden.

Bei einer Verkettung von Abbildungen werden mehrere Abbildungen nacheinander ausgeführt.

Durch zentrische Streckungen und ihre Verkettungen mit Kongruenzabbildungen werden stets Bildfiguren erzeugt, die zur jeweiligen Originalfigur ähnlich sind. Zentrische Streckungen und ihre Verkettungen mit Kongruenzabbildungen heißen **Ähnlichkeitsabbildungen**.

Bemerkung:

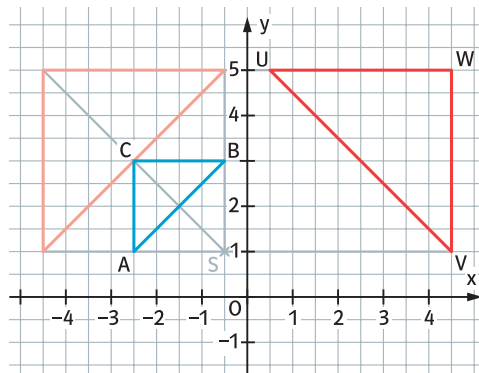
Das Verketteten einer zentrischen Streckung und einer Kongruenzabbildung ist nicht kommutativ, das heißt: Vertauscht man die Reihenfolge der Abbildungen, so ergeben sich im Allgemeinen unterschiedliche Bilder.

Beispiel 1

Beschreibe, wie man das Dreieck ABC durch eine Ähnlichkeitsabbildung auf U VW abbilden kann.

Lösung:

Streckt man das Dreieck ABC vom Zentrum $S(-0,5|1)$ aus mit dem Streckungsfaktor $k = 2$ und spiegelt anschließend das Zwischenbild an der y-Achse, so erhält man das Dreieck U VW.



Beispiel 2

Zeichne das Dreieck ABC mit $A(-2|-2)$; $B(0|0)$; $C(-3|3)$ sowie $M(4|1)$ und $S(5|4)$. Bilde das Dreieck durch folgende Ähnlichkeitsabbildung ab: zentrische Streckung mit Streckungszentrum S und $k = 0,5$, anschließende Drehung um 45° um M .

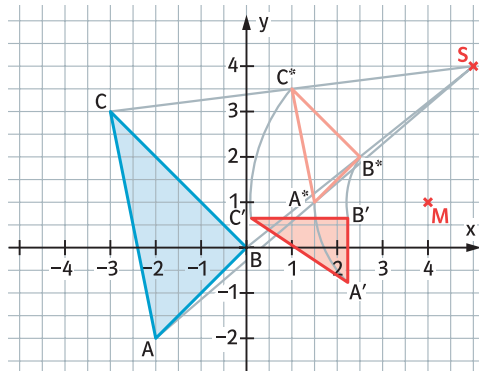
Beschreibung der Konstruktion:

1. Zeichne das Dreieck ABC und die Punkte M und S .

2. Strecke ABC von S aus mit $k = \frac{1}{2}$.
Man erhält ein Dreieck $A^*B^*C^*$.

3. Drehe $A^*B^*C^*$ um 45° um den Punkt M .
Man erhält das Bilddreieck $A'B'C'$.

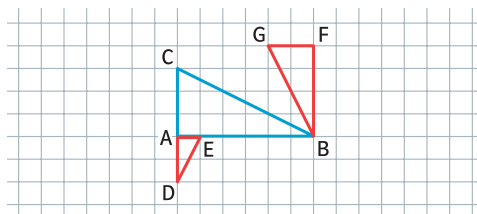
Lösung:



Aufgaben

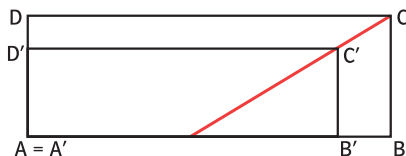
1 Gib jeweils an, wie man das Dreieck ABC durch eine Ähnlichkeitsabbildung

- auf das Dreieck ADE,
- auf das Dreieck BFG abbilden kann.



2 Begründe: Es gibt keine Ähnlichkeitsabbildung, die

- a) das Rechteck ABCD auf das Rechteck $A'B'C'D'$ abbildet,
- b) ein Dreieck mit den Winkeln 32° und 68° auf ein rechtwinkliges Dreieck abbildet.



3 Zeichne das Dreieck ABC mit $A(4|4)$; $B(6|5)$ und $C(4|8)$ in ein Koordinatensystem. Bilde das Dreieck ABC durch folgende Ähnlichkeitsabbildung ab.

- a) zentrische Streckung mit $S(2|5)$ und $k = 2$, Spiegelung an der Geraden durch A und C
- b) zentrische Streckung mit Streckungszentrum A und $k = \frac{1}{2}$, Drehung um A um 90°
- c) Wie verhalten sich die Flächeninhalte der Bildfiguren aus a) und b) zueinander?
- d) Welche Ähnlichkeitsabbildung bildet die Bildfigur aus b) direkt auf die aus a) ab?

4 a) Wie kann man durch eine Ähnlichkeitsabbildung das grüne Quadrat in Fig. 1 auf das rote bzw. das rote Quadrat auf das blaue abbilden?

b) Wie lässt sich das grüne Quadrat unmittelbar auf das blaue abbilden?

c) Wie verhalten sich die Flächeninhalte der drei Quadrate zueinander? Begründe.

d) Das grüne Quadrat ist 2 cm^2 groß. Welchen Flächeninhalt hat das 10. Quadrat, wenn man die Figur in gleicher Weise durch weitere Quadrate fortsetzt?

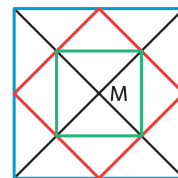
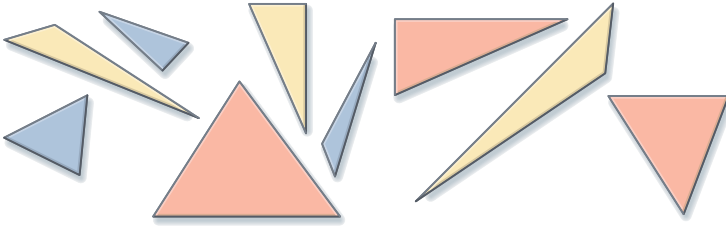


Fig. 1

5 Begründe oder widerlege die folgenden Aussagen:

- a) Zwei kongruente Figuren sind stets ähnlich.
- b) Jede Ähnlichkeitsabbildung ist eine Kongruenzabbildung.
- c) Durch Ähnlichkeitsabbildungen werden die Seitenlängen einer Figur immer verändert.

7 Ähnliche Dreiecke



Bei der Suche nach ähnlichen Dreiecken ist die Gleichfarbigkeit nicht wirklich eine Hilfe.

Um die Ähnlichkeit zweier Figuren zu überprüfen, müssen sowohl die Winkelgrößen als auch die Verhältnisse der Seitenlängen verglichen werden. Bei Dreiecken ist ein solcher großer Aufwand nicht nötig.

Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in Fig. 1 stimmen in den Winkelgrößen aller drei Winkel überein. Sind sie damit auch ähnlich?

Man streckt das Dreieck ABC so, dass zum Beispiel $\overline{A''B''}$ als Bildstrecke von $\overline{AB}$ genauso lang ist wie $\overline{A'B'}$. In Fig. 1 ist A als Streckungszentrum gewählt, für den Streckungsfaktor k gilt: $\overline{A''B''} = k \cdot \overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Da die Winkelgrößen bei einer zentrischen Streckung unverändert bleiben, stimmen die Dreiecke $A''B''C''$ und $A'B'C'$ in einer Seitenlänge und ihren zugehörigen Winkelgrößen überein. Nach dem Kongruenzsatz wsw sind sie damit kongruent. Damit existiert eine **Ähnlichkeitsabbildung**, die das Dreieck ABC auf das Dreieck $A'B'C'$ abbildet. Also sind zwei Dreiecke, die in ihren Winkelgrößen übereinstimmen, zueinander ähnlich. Wegen der bei Dreiecken konstanten Innenwinkelsumme von 180° genügt zur Feststellung der Ähnlichkeit schon die Übereinstimmung in zwei Winkelgrößen (**Hauptähnlichkeitssatz**).

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha' \\ \beta &= \beta' \\ \gamma &= \gamma'\end{aligned}$$

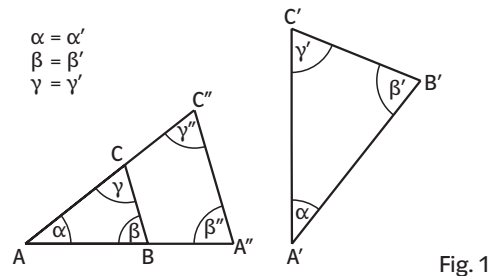
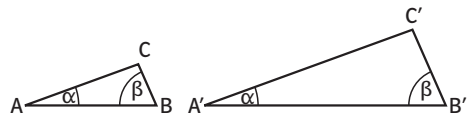


Fig. 1

Kongruenzsatz wsw:
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seitenlänge und zwei Winkelgrößen übereinstimmen.

Hauptähnlichkeitssatz für Dreiecke (ww)

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in der Größe zweier Winkel übereinstimmen.



*Informiere dich im
Tafelwerk über den
Wortlaut der Kongruenzsätze sss, sws und SsW.*

Bemerkung:

Mithilfe der Eigenschaften der zentrischen Streckung und der Anwendung der Kongruenzsätze sss, sws und SsW lassen sich in Anlehnung an die obigen Überlegungen noch drei weitere Ähnlichkeitssätze begründen.

Zwei Dreiecke sind außerdem zueinander ähnlich, wenn sie

- in den allen Verhältnissen einander entsprechender Seiten übereinstimmen oder
- in einem Winkel und den Verhältnissen einander entsprechender am Winkel anliegender Seiten übereinstimmen oder
- in den Verhältnissen je zweier entsprechender Seiten und dem Gegenwinkel der jeweils größeren Seite übereinstimmen.

Beispiel 1 Überprüfen von Dreiecken auf Ähnlichkeit

a) Prüfe, ob ein Dreieck mit Winkeln der Größe 35° und 100° und ein Dreieck mit Winkeln der Größe 35° und 45° ähnlich sind.

b) Prüfe, ob ein Dreieck mit den Seitenlängen 3 cm; 4 cm; 5 cm und ein Dreieck mit den Seitenlängen 4,5 cm; 7,5 cm; 6 cm ähnlich sind.

Lösung:

a) Mit dem Winkelsummensatz ergibt sich für die jeweils dritte Winkelgröße

$$180^\circ - (35^\circ + 100^\circ) = 45^\circ; \quad 180^\circ - (35^\circ + 45^\circ) = 100^\circ.$$

Damit stimmen die beiden Dreiecke in allen drei Winkelgrößen überein und sind ähnlich.

b) Um die einander entsprechenden Seiten zu finden, ordnet man die Seitenlängen jeweils der Größe nach. Der Vergleich der entsprechenden Längenverhältnisse er-

gibt $\frac{7,5 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \frac{6 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = \frac{4,5 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = 1,5$. Damit sind die beiden Dreiecke ähnlich zueinander.

Beispiel 2 Anwenden der Ähnlichkeit bei Beweisen

Es ist zu beweisen, dass die Dreiecke BCE und AED in Fig. 1 zueinander ähnlich sind.

Lösung:

Voraussetzung: A, B, C und D liegen auf ein und demselben Kreis k.

Behauptung: $\triangle BCE \sim \triangle AED$

Beweis: (1) $\alpha = \beta$ (Scheitelwinkelsatz)

(2) $\gamma = \delta$ (Peripheriewinkelsatz)

Aus (1) und (2) folgt nach dem Haupt-ähnlichkeitssatz: $\triangle BCE \sim \triangle AED$ w.z.b.w.

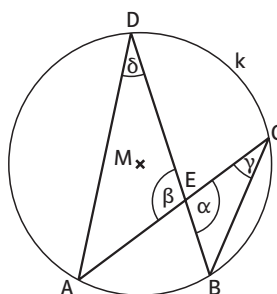


Fig. 1

Erinnere dich:

Wenn die Dreiecke ABC und DEF ähnlich sind, schreibt man kurz $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Beispiel 3 Anwenden der Ähnlichkeit bei Konstruktionen

Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c:b = 2:1$; $\alpha = 50^\circ$; $s_a = 3 \text{ cm}$.

Lösung:

Vorüberlegungen: Man konstruiert zunächst eine **Hilfsfigur** derart, dass in der Hilfsfigur und der gesuchten Figur entsprechende Seiten parallel sind und dasselbe Längenverhältnis haben. Danach streckt man die Hilfsfigur geeignet zentrisch. Man wählt im Beispiel z.B. eine Hilfsfigur $\triangle AB'C'$ mit $c' = 2 \text{ cm}$; $b' = 1 \text{ cm}$; $\alpha = 50^\circ$.

Beschreibung:

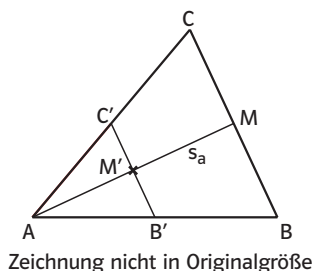
1. Zeichne c' mit den Endpunkten A und B'.

2. Trage Winkel α und an dessen freiem Schenkel b' ab. Man erhält $\triangle AB'C'$.

3. Konstruiere die Seitenhalbierende $s_{a'}$ der Hilfsfigur und verlängere sie über M' hinaus.

4. Trage s_a von A aus ab. Man erhält M.

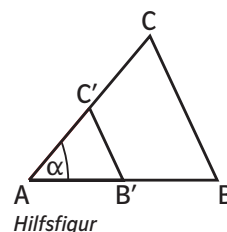
5. Zeichne die Parallele zu $B'C'$ durch M und man erhält B und C.



Zeichnung nicht in Originalgröße

Fig. 2

s_a : Seitenhalbierende der Seite a



Aufgaben

1 Prüfe, ob das Dreieck mit den angegebenen Winkeln zu einem Dreieck mit Winkeln von 55° und 30° ähnlich ist.

a) $\alpha = 75^\circ$; $\beta = 55^\circ$

b) $\beta = 30^\circ$; $\gamma = 95^\circ$

c) $\alpha = 55^\circ$; $\gamma = 105^\circ$

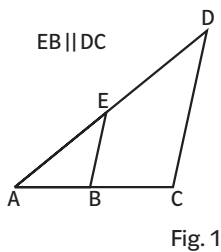


Fig. 1

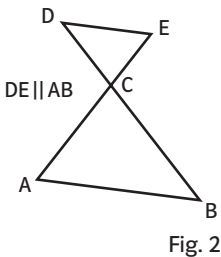


Fig. 2

2 Prüfe, ob das Dreieck mit den angegebenen Seitenlängen zu einem Dreieck mit den Seitenlängen 3 cm; 6 cm und 5 cm ähnlich ist.

- a) 4 cm; 6 cm; 7 cm b) 10 cm; 6 cm; 12 cm c) 9 cm; 15 cm; 12 cm

3 Suche in den Fig. 1 und 2 ähnliche Dreiecke. Begründe deine Entscheidung. Nenne einander entsprechende Seiten in den Dreiecken.

4 Konstruiere ein Dreieck ABC, das den gegebenen Bedingungen genügt.

- a) $a:b = 4:5$; $\gamma = 80^\circ$; $s_c = 4$ cm b) $\beta = 55^\circ$; $c = 5,2$ cm; $a:c = 3:4$
 c) $\alpha = 119^\circ$; $w = 2,4$ cm; $b:c = 9:7$ d) $a:b:c = 2:3:4$; $s_c = 3$ cm
 e) $a:b:c = 5:3:6$; $h_c = 3$ cm f) $\beta = 53^\circ$; $\gamma = 85^\circ$; $s_a = 5$ cm

5 Konstruiere ein Rechteck mit der Diagonalenlänge $e = 5$ cm, dessen Seitenlängen sich wie 3:2 verhalten.

6 Die Dreiecke ABC und ABD in Fig. 3 sind gleichschenkelig mit $\overline{AC} = \overline{BC} = 4,1$ cm und $\overline{AB} = \overline{AD} = 2,9$ cm.

- a) Zeige, dass die Dreiecke ABC und ABD ähnlich sind.
 b) Wie lang ist die Strecke BD?

7 Zeichne ein Dreieck ABC mit $a = 6$ cm; $b = 4$ cm und $c = 7$ cm. Konstruiere über der Seite $\overline{AC}$ ein ähnliches Dreieck ACD, sodass der Seite $\overline{AB}$ im Dreieck ABC die Seite $\overline{AC}$ im Dreieck ACD entspricht. Mit welchem Ähnlichkeitsfaktor wird das Dreieck ACD gezeichnet? Wie verhalten sich die Flächeninhalte der beiden Dreiecke?

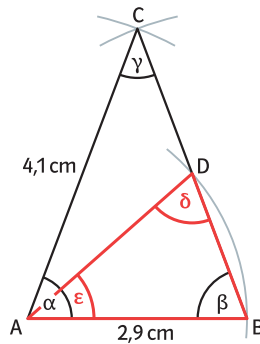


Fig. 3

8 Beweise.

- a) Zwei rechtwinklig gleichschenkelige Dreiecke sind stets ähnlich zueinander.
 b) Zwei gleichseitige Dreiecke sind stets ähnlich zueinander.

9 a) Beweise, dass für jedes Trapez ABCD ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$) mit dem Diagonalschnittpunkt S gilt: $\triangle ABS \sim \triangle DSC$.

b) Begründe.

In einem Trapez teilen sich die Diagonalen im Verhältnis der Grundseiten.

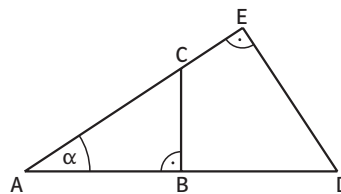


Fig. 4

10 Beweise die Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und ADE in Figur 4.

Bist du sicher?

1 a) Begründe, dass die Dreiecke ACB und CDE ähnlich sind.

b) Berechne die fehlenden Seitenlängen für $\overline{AB} = 7,5$ cm; $\overline{BC} = 19,5$ cm; $\overline{CD} = 10,8$ cm und $\overline{DE} = 4,5$ cm.

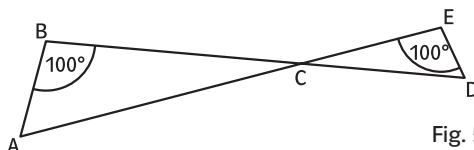


Fig. 5

11 a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $a = 4\text{ cm}$; $b = 6\text{ cm}$; $\gamma = 80^\circ$ und ein zweites Dreieck DEF, in dem bei F ein Winkel von 80° von einer $5,2\text{ cm}$ langen und einer $7,8\text{ cm}$ langen Seite eingeschlossen wird. Begründe mithilfe einer zentrischen Streckung und eines Kongruenzsatzes, dass die Dreiecke ABC und DEF ähnlich sind.

b) Begründe nun allgemein den folgenden Ähnlichkeitssatz: Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in den Verhältnissen zweier einander entsprechender Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

*Hinweis:
Orientiere dich am
Lehrtext auf Seite 202.*

12 Gegeben ist ein Rechteck ABCD. Fällt man wie in Fig. 1 von A und von C aus jeweils das Lot auf die Diagonale $\overline{BD}$, so ergeben sich verschiedene Dreiecke.

a) Welche Dreiecke sind ähnlich? Beweise.

b) Es gelte: $a = 8\text{ cm}$ und $b = 6\text{ cm}$. Berechne die Längen der Seiten der Dreiecke ABE und AED.

c) Zeige durch Vergleich geeigneter Streckenverhältnisse, dass $\overline{AE}^2 = \overline{ED} \cdot \overline{BE}$.

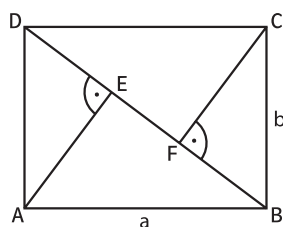


Fig. 1

13 Im Dreieck ABC (Fig. 2) schneiden sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt S. Beweise, dass $\overline{AS} : \overline{SD} = \overline{BS} : \overline{SE} = 2:1$ gilt.

(Hinweis: Zeige zunächst, dass gilt: $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$.)

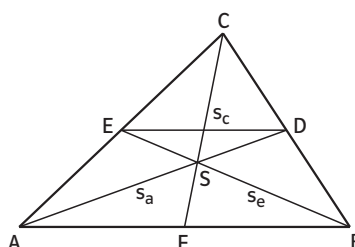


Fig. 2

Die in Aufgabe 13 nachgewiesene Beziehung führt zu folgendem Satz:

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks teilen einander im Verhältnis 2:1, wobei die längere Teilstrecke von der jeweiligen Ecke des Dreiecks ausgeht.

14 Förster bestimmen die Höhen von Bäumen mithilfe eines Dreiecks, zum Beispiel eines Geodreiecks (Fig. 3 und Fig. 4).

a) Überlege, worauf das Messverfahren beruht. Erkläre auch das Verfahren gegenseitig.

b) Bestimme die Baumhöhe für das Messbeispiel in Fig. 3.

c) Bestimme mit der „Förstermethode“ Höhen von Bäumen, Türmen und Gebäuden in eurer Umgebung.

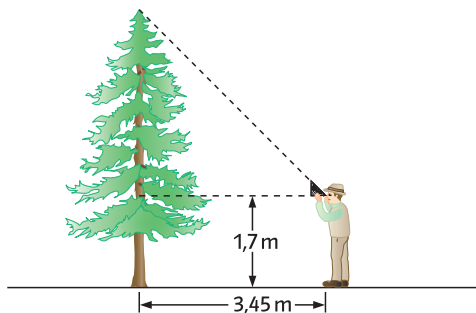


Fig. 3

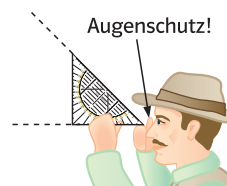


Fig. 4

15 Kann man bei der Methode aus Aufgabe 14 anstelle des Geodreiecks auch ein Zeichendreieck wie in Fig. 5 verwenden?

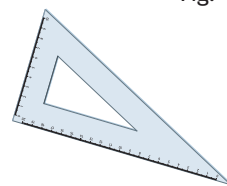


Fig. 5

Kannst du das noch?

16 Bestimme die Lösungen des linearen Gleichungssystems.

a) $3x - 2 = 2y$

b) $x - 2y - 3 = 0$

c) $\frac{3}{4}x - y = \frac{1}{2}$

$-2x + 1 = y$

$2x + 2y + 1 = 0$

$2x + \frac{1}{3}y = 2$

17 Auf sechs Kugeln sind die Buchstaben des Wortes ANANAS verteilt. Von den sechs Kugeln werden zufällig vier Kugeln gezogen (Fig. 6) und hintereinander auf den Tisch gelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entsteht das Wort ANNA?

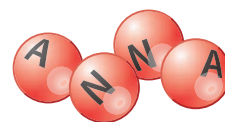
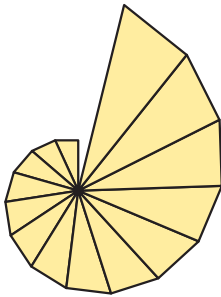


Fig. 6

- 1** Zu Fotos kann man Vergrößerungen herstellen (Fig. 1).
- Bestimme den Maßstab, mit dem die Blüte in Fig. 1 vergrößert wurde.
 - Vergrößere oder verkleinere Bilder mit einem Kopierer. Wie kann man aus Original und Kopie den Maßstab ermitteln, ohne die Einstellung des Kopiergerätes zu kennen?



Fig. 1



13-mal wird mit $k = 1,1$ vergrößert. Wird insgesamt mit $13 \cdot 1,1$ vergrößert?

- 2** Gegeben sind die Punkte $A(-1|-1)$, $B(3|-1)$, $C(-1|1)$, $O(0|0)$ und $P(5|0)$.
- Zeichne das Dreieck ABC und strecke es von O aus mit dem Streckungsfaktor $k_1 = 3$. Gib die Koordinaten der Eckpunkte des entstehenden Bilddreiecks $A'B'C'$ an. Berechne, auf welches Vielfache des Flächeninhalts des Originaldreiecks ABC der Flächeninhalt des Bilddreiecks wächst.
 - Strecke nun das in a) erhaltene Bilddreieck $A'B'C'$ an P mit dem Streckungsfaktor $k_2 = -0,5$. Gib die Koordinaten der Eckpunkte des entstandenen Bilddreiecks $A''B''C''$ an.
 - Begründe: Das Dreieck ABC lässt sich durch eine einzige Streckung direkt auf das Dreieck $A''B''C''$ abbilden. Wie groß ist der Streckungsfaktor? Gib die Koordinaten des Streckungszentrums an.
 - Wo liegt das Zweitbild R'' des Punktes $R(3|0)$, wenn man eine zentrische Streckung an O mit dem Streckungsfaktor $k_1 = 3$ und danach eine Streckung an P mit dem Streckungsfaktor $k_2 = -0,5$ durchführt? Deute das Ergebnis.

- 3** Bei einer zentrischen Streckung wird das Dreieck ABC mit $a = 6$ cm und $h_a = 4$ cm auf das Dreieck $A'B'C'$ mit dem Flächeninhalt $A = 18$ cm² abgebildet.

- Wie groß ist der Streckungsfaktor?
- Welchen Umfang hat das Dreieck ABC , wenn $A'B'C'$ einen Umfang von 24 cm besitzt?

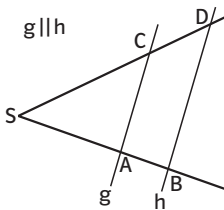


Fig. 2

- 4** Übertrage die Tabelle in dein Heft. Berechne für die Fig. 2 jeweils die Länge der fehlenden Strecken und trage diese in die Tabelle ein.

$\overline{SA}$	$\overline{SB}$	$\overline{AB}$	$\overline{SC}$	$\overline{SD}$	$\overline{CD}$	$\overline{AC}$	$\overline{BD}$
12 cm	18 cm		15 cm				
		7 mm	9 mm	15 mm			
				3,5 cm		4,5 cm	5,5 cm

- 5** Ein Baum wirft im Sonnenlicht einen 4,80 m langen Schatten. Die danebenstehende Person ist 1,80 m groß, ihr Schatten ist 1,50 m lang. Berechne die Höhe des Baumes. Nutze dabei Fig. 3 und beschreibe zwei unterschiedliche Lösungswege.



Fig. 3

6 a) In Fig. 1 sind M_1 und M_2 jeweils die Seitenmitten. Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt 5 cm^2 . Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks CM_1M_2 ?

b) Zeichne ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ und $h_c = 4 \text{ cm}$. Welchen Abstand von der Seite $\overline{AB}$ hat eine Parallele zu $\overline{AB}$, die den Flächeninhalt des Dreiecks halbiert? Zeichne die Parallele ein.

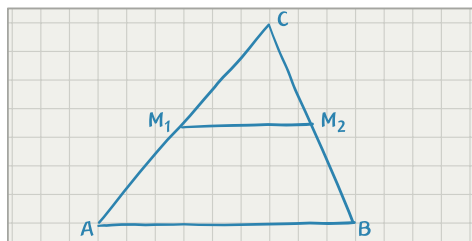
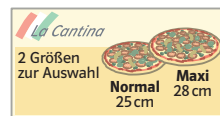


Fig. 1

7 Eine Pizza „Italia“ mit 25 cm Durchmesser kostet 5,80 €. Die gleiche Pizza kann man auch mit einem Durchmesser von 28 cm bestellen. Welchen Preis sollte diese Pizza haben? Begründe deine Antwort.



8 In „Gullivers Reisen“, dem bekanntesten Werk des irischen Schriftstellers Jonathan Swift reist Gulliver im Teil 1 nach Lilliput ins Land der Zwerge. In diesem klettern u.a. die sechs Zoll kleinen Winzlinge auf seinem Körper herum. In Gullivers zweiter Reise nach Brobdingnag wird er dagegen von einem Riesen verfolgt und flüchtet in ein Feld, dessen Gerste vierzig Fuß hoch ist.

a) Versucht mithilfe der obigen Informationen Näherungswerte für die Größe der Lilliputaner und der Riesen zu ermitteln.

b) Wie schwer ist etwa ein Bewohner des Landes Lilliput und ein Riese? Nimm an, dass Gulliver ca. 80 kg wiegt.

c) Zum Schneidern von Gullivers Hose wurde ein Stück Stoff mit den Maßen $1,40 \text{ m} \times 1,20 \text{ m}$ benötigt. Ermittelt grob den Stoffbedarf für eine Hose eines Lilliputaners und eines Riesen in cm^2 bzw. m^2 .

d) Denkt euch weitere Fragen zur Welt der Zwerge und Riesen aus und versucht sie zu beantworten.



$1 \text{ ft} = 30,48 \text{ cm}$ (1 Fuß)
 $1,54 \text{ cm}$ (1 Zoll)

9 a) In Fig. 2 ist M der Seitenmittelpunkt der Quadratseite. Welcher Bruchteil ist nicht schraffiert? Begründe rechnerisch.

b) In Fig. 3 ist M der Mittelpunkt der Rechteckseite a. Welcher Bruchteil der gesamten Rechteckfläche ist schraffiert? Berechne.

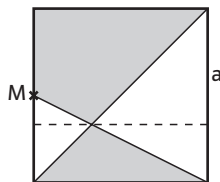


Fig. 2

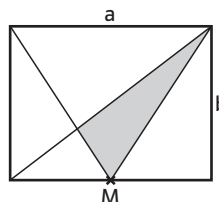


Fig. 3

10 Von einer Pyramide soll durch einen ebenen Schnitt parallel zur Grundfläche eine kleine Pyramide so abgetrennt werden, dass ihr Volumen nur noch $\frac{1}{27}$ des Ausgangsvolumens der Pyramide beträgt. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der Grundflächen beider Pyramiden zueinander?

11 a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $\beta = 60^\circ$, $s_b = 5 \text{ cm}$ und $c:a = 3:2$.

b) Konstruiere zum Dreieck ABC mit $a = 5,3 \text{ cm}$, $b = 3,2 \text{ cm}$ und $c = 5,8 \text{ cm}$ ein ähnliches Dreieck mit einem Umkreisradius von 4 cm.

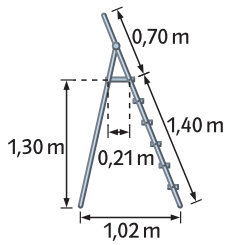


Fig. 1

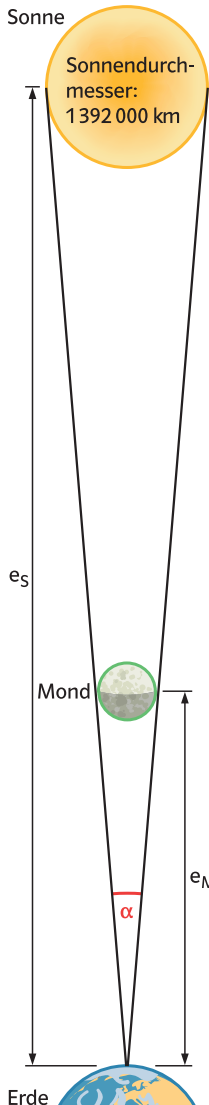


Fig. 5

12 Eine Trittleiter (Fig. 1) soll im Keller eingesetzt werden. Berechne, wie hoch der Keller mindestens sein muss, damit die Leiter aufgestellt werden kann. Ermittle, in welcher Höhe sich die vierte Stufe über dem Boden befindet.

13 Der **Jakobsstab** (Fig. 2) ist ein einfaches Winkelmessgerät, das aus einem mit einer Skala versehenen Längsstab besteht, auf dem ein kürzerer, senkrecht dazu gerichteter Querstab verschoben werden kann. Auf dieses um 1300 erfundene Instrument stützte sich die Seefahrt des Mittelalters bei der Schiffsortbestimmung. Auf dem Land wurde der Jakobsstab zur Bestimmung von Höhen und Entfernungen benutzt. Berechne die Höhe $\overline{FC}$ eines Turms, wenn die Augenhöhe $\overline{SE}$ 1,6 m und die Entfernung $\overline{EF}$ zum Fuß des Turms 56 m beträgt und am Jakobsstab $\overline{SB} = 24$ cm und $\overline{AB} = 18$ cm abgelesen werden (Fig. 3).

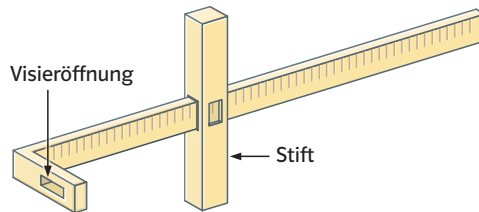


Fig. 2

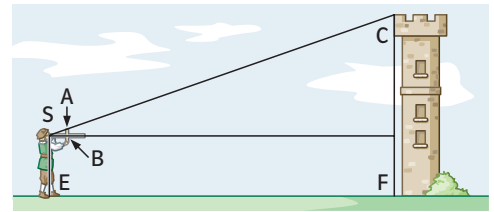


Fig. 3

14 Eine Erbse von 6 mm Durchmesser verdeckt gerade den Vollmond, wenn man sie 66 cm vom Auge entfernt hält (Fig. 4). Bei einer totalen Sonnenfinsternis verdeckt der Mond die Sonne, weil der Mond seinen Schatten auf die Erde wirft. Die Größe dieses Schattens hängt von der genauen Stellung der Himmelskörper ab (Fig. 5). Berechne
a) den Durchmesser des Mondes,
b) die Entfernung der Sonne von der Erde, wenn der Schatten des Mondes auf der Erde einen Durchmesser von 245 km hat und sich der Mond in 384 000 km Entfernung von der Erdoberfläche befindet.

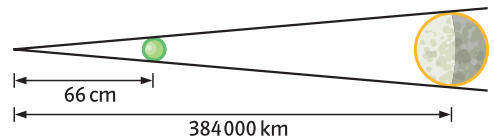


Fig. 4

15 a) Die Strecke $\overline{AB}$ in Fig. 6 wird in drei Teilstrecken geteilt. Beschreibe anhand der Bildfolge die Vorgehensweise. Begründe, dass die Teilstrecken gleich lang sind. In welchem Verhältnis stehen die Parallelenabschnitte zueinander?

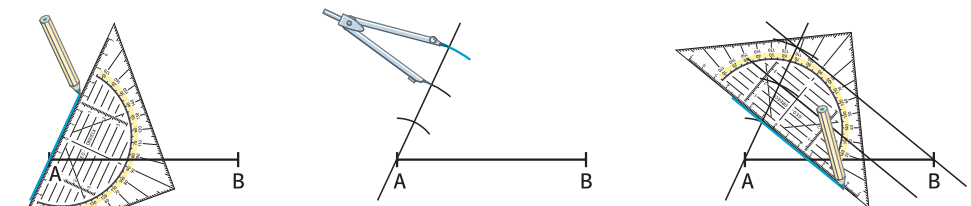


Fig. 6

b) Teile wie in Fig. 6 eine 11 cm lange Strecke in fünf gleiche Teilstrecken. In welchem Verhältnis teilt der von A aus betrachtete Endpunkt der zweiten Teilstrecke die Gesamtstrecke?
c) Teile eine 12 cm lange Strecke im Verhältnis 3 : 5.

16 Zu einer Strecke $\overline{AB}$ ist in Fig. 1 ein Punkt T_i innerhalb und ein Punkt T_a außerhalb von AB konstruiert. Beschreibe diese Konstruktion, die man auch als **harmonische Teilung** der Strecke $\overline{AB}$ bezeichnet. Gib das Teilungsverhältnis $\overline{AT_i}:\overline{T_iB}$ an. Vergleiche mit dem Verhältnis $\overline{AT_a}:\overline{T_aB}$.

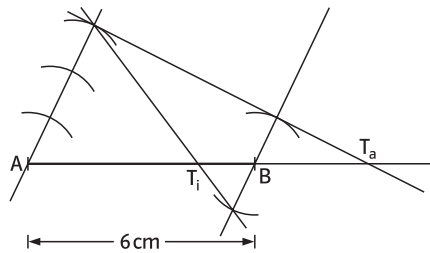


Fig. 1

17 Teile eine 8,4 cm lange Strecke $\overline{AB}$ innen und außen (harmonische Teilung)
a) im Verhältnis 2:1
b) im Verhältnis 2:5.

18 a) Begründe die Ähnlichkeit der Dreiecke ABD und AEC in Fig. 2 und zeige, dass $\frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b}$ ist.

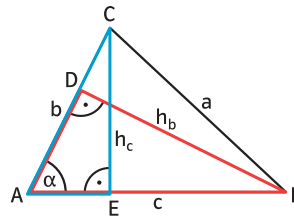


Fig. 2

b) Welche Aussagen ergeben sich für die Höhenverhältnisse $\frac{h_a}{h_b}$ und $\frac{h_a}{h_c}$? Begründe.

c) Prüfe anhand einer geeigneten Zeichnung, ob die Aussagen aus a) und b) auch für stumpfwinklige Dreiecke gelten.

d) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $h_a = 4$ cm, $h_b = 3$ cm und $h_c = 5$ cm. Anleitung: Nutze die Aussagen aus a) und b). Zeichne zunächst ein zu ABC ähnliches Hilfsdreieck $A'B'C'$. Strecke dieses dann zum Beispiel an einem seiner Eckpunkte, sodass die Höhen im Bilddreieck die geforderten Längen haben.

19 Fig. 3 zeigt den Strahlenverlauf bei der Bildentstehung an einer Sammellinse. Dabei bezeichnet man g als Gegenstandsweite, b als Bildweite; G ist die Gegenstandshöhe, B die Bildhöhe. Die Brennweite f der Linse hängt von ihrer Form und der Glasart ab.

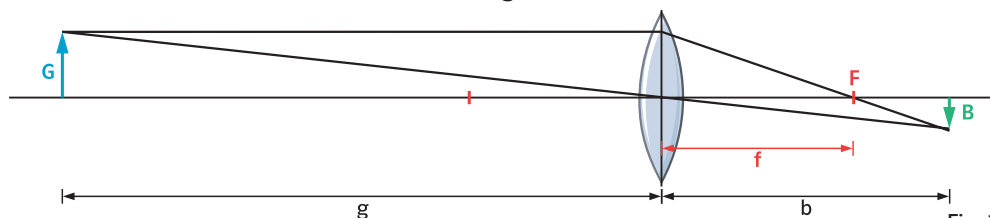


Fig. 3

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Größen g , b , G und B , welcher zwischen den Größen b , g und f ? Nutze geeignete Strahlensatzfiguren.

b) Wie weit muss ein 1,6 m hoher Gegenstand von einer Sammellinse der Brennweite 35 mm entfernt sein, damit ein Bild von 24 mm Höhe entsteht?

20 In welcher Entfernung von den beiden runden Säulen in Fig. 4 befindet sich ein Betrachter, für den die dünnere Säule gerade die dickere Säule verdeckt?

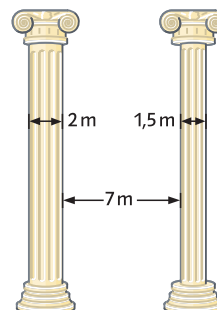
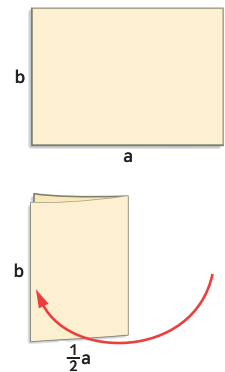


Fig. 4

*Zum Nachdenken:
Wenn man ein Din-A4-Blatt entlang der kurzen Mittellinie faltet, erhält man ein dazu ähnliches DIN-A5-Blatt. Wird dieses wiederum so gefaltet, entsteht ein DIN-A6-Blatt usw.*



Begründe, dass die jeweiligen Rechteckseiten im Verhältnis $\sqrt{2}:1$ stehen müssen.

Exkursion Ähnlichkeit mit DGS

Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge bei zentrischen Streckungen kann man durch das Experimentieren mit einem Geometrieprogramm erkennen.

Untersuchung der zentrischen Streckung

Zum Dreieck ABC wird eine zentrische Streckung konstruiert. Dazu legt man das Streckungszentrum S und den Streckungsfaktor k als Verhältnis der Teilstrecken $\overline{EG}$ und $\overline{GF}$ fest (Fig. 1). Durch das Verschieben des Punktes G auf der Strecke EF kann der Streckungsfaktor $k = \frac{\overline{GF}}{\overline{EG}}$ zwischen 0 und unendlich verändert werden.

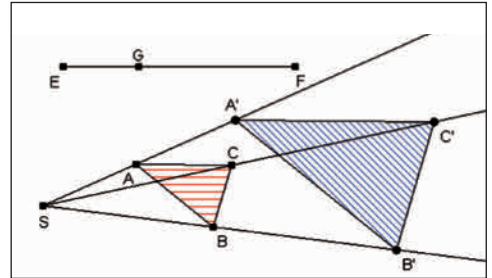


Fig. 1

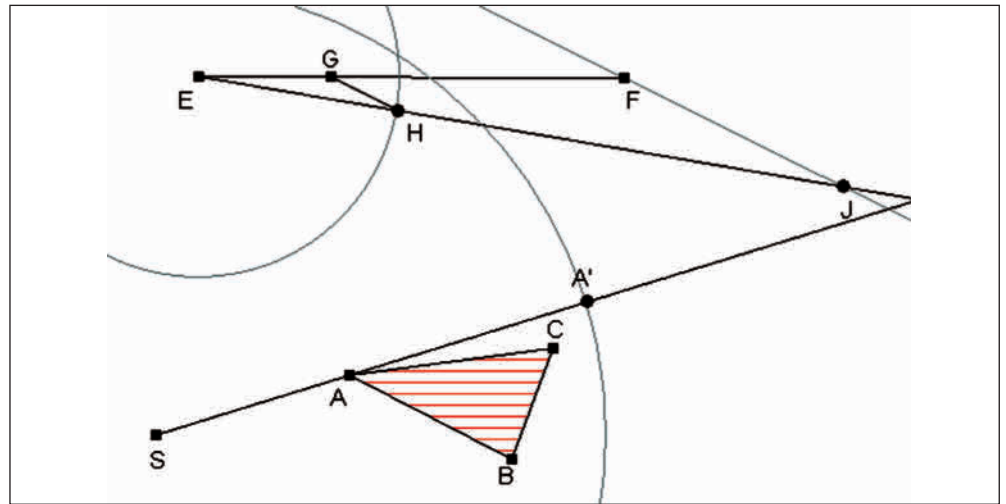


Fig. 2



Einen Kreis mit Radius abtragen.

Um den Punkt A' zu konstruieren (Fig. 2), zeichnet man in E beginnend einen Strahl, auf dem die Länge $\overline{SA}$ von E aus abgetragen wird. Man erhält den Punkt H und $\overline{EH} = \overline{SA}$. Durch eine Parallele zur Strecke $\overline{GH}$ durch den Punkt F entsteht eine Strahlensatzfigur.

Aus dem ersten Strahlensatz folgt: $\frac{\overline{GF}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{HJ}}{\overline{EH}}$. Da $k = \frac{\overline{GF}}{\overline{EG}}$ ist, folgt $\overline{HJ} = k \cdot \overline{EH}$.

Die Länge der Strecke $\overline{SA'}$ entspricht damit der Länge der Strecke $\overline{HJ}$. Durch das Abtragen der Länge $\overline{HJ}$, beginnend im Punkt S, erhält man den Punkt A'. Nach dem Ausblenden der Hilfslinien konstruiert man in entsprechender Weise die Punkte B' und C'.

- 1** Konstruiere eine zentrische Streckung eines Dreiecks mit einem dynamischen Geometrieprogramm.
- 2** Wie verändert sich die Lage von Bild und Original zueinander, wenn die Lage des Streckungszentrums verändert wird?
- 3** Wie ändert sich die Lage von Bild und Original zueinander, wenn der Streckungsfaktor verändert wird?

Ähnlichkeitssätze am Kreis

Zeichnet man in einen Kreis zwei Sehnen ein, so können diese sich wie in Fig. 1 schneiden. Dabei werden die Sehnen in vier Teilstrecken unterteilt. Beobachtet man die Längen der einzelnen Teilstrecken, so kann man Zusammenhänge feststellen.

- 4** a) Konstruiere einen Kreis mit zwei Sehnen wie in Fig. 1. Verändere die Lage der Sehnen und beobachte die Längen der Teilstrecken. Versuche, einen Zusammenhang zu entdecken und diesen als Gleichung zu beschreiben.
b) Formuliere den **Sehnensatz** als Erkenntnis aus den Untersuchungen an Fig. 1. Beginne wie folgt: „Schneiden sich zwei Sehnen in einem Punkt E im Kreisinneren, dann gilt: ...“

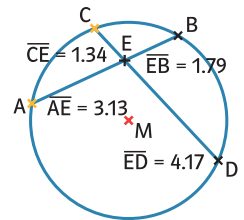


Fig. 1

- 5** a) Konstruiere einen Kreis mit zwei Sekanten wie in Fig. 2. Miss die Längen der Sekantenabschnitte SA, SB, AA', BB' und versuche, durch das Verändern der Figur Zusammenhänge zu erkennen.
b) Formuliere den **Sekantensatz** als Ergebnis deiner Beobachtungen mithilfe einer Verhältnisgleichung. Vergleiche mit einer Formelsammlung.

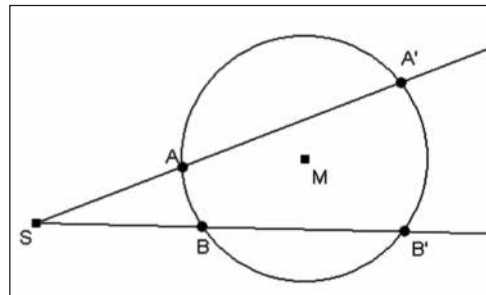


Fig. 2

- 6** a) Beweise den Sekantensatz. Zeige dazu zunächst, dass die Dreiecke SAB' und SBA' in Fig. 2 ähnlich sind.
b) Wie verändert sich die Aussage des Sekantensatzes, wenn eine Sekante die spezielle Lage einer Tangente annimmt?

*Dieser Spezialfall des Sekantensatzes ist der **Sekanten-Tangenten-Satz**.*

Die Konstruktion eines maximalen Quadrats innerhalb einer vorgegebenen Figur

Soll in eine Figur ein maximales Quadrat eingezeichnet werden, so kann dies durch eine zentrische Streckung erfolgen. Streckungszentrum und Ausgangsquadrat werden dabei so platziert, dass beim Zeichnen der gestreckten Figur ein maximales Quadrat innerhalb der vorgegebenen Figur entsteht. Um auf die richtige Lage des Ausgangsquadrats und des Streckungszentrums zu kommen, kann man mit einem Geometrieprogramm experimentieren.

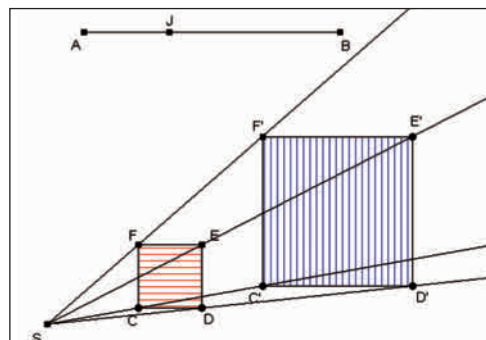
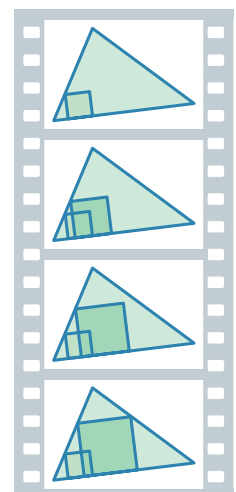


Fig. 3

- 7** Konstruiere eine zentrische Streckung eines Quadrats, bei der der Streckungsfaktor $k = \frac{JB}{AJ}$ eingestellt werden kann. Orientiere dich an Fig. 3.

- 8** Suche für die Figuren Dreieck, Halbkreis, Kreissektor und Parallelogramm passende Streckzentren und Lagen des Ausgangsquadrats, um ein maximales Quadrat durch zentrische Streckung in die Figur zu konstruieren.



Ähnliche Figuren

Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn sie in den Längenverhältnissen entsprechender Seiten und in der Größe entsprechender Winkel übereinstimmen.

Zentrische Streckungen

Bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckungszentrum S und dem Streckungsfaktor k wird jeder Punkt P auf einen Punkt P' abgebildet, der auf der Geraden durch S und P liegt und für den gilt: $\overline{SP'} = |k| \cdot \overline{SP}$. Für $k > 0$ liegen P und P' auf derselben Seite von S, für $k < 0$ auf verschiedenen Seiten von S.

Für zentrische Streckungen mit dem Streckungsfaktor k gilt:

- Original- und Bildwinkel sind gleich groß.
- Die Bildstrecke ist $|k|$ -mal so lang wie die zugehörige Originalstrecke.
- Die Bildstrecke verläuft zur zugehörigen Originalstrecke parallel.
- Der Flächeninhalt der Bildfigur ist k^2 -mal so groß wie der der Originalfigur.
- Das Volumen des Bildkörpers ist $|k|^3$ -mal so groß wie das des Originalkörpers.

Original und Bild einer zentrischen Streckung sind ähnlich zueinander.

Strahlensätze

In jeder Strahlensatzfigur verhalten sich die Abschnitte auf einem Strahl (einer Geraden) wie die entsprechenden Abschnitte auf dem (der) anderen.

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} \text{ und } \frac{\overline{SA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{BB'}} \quad (1. \text{ Strahlensatz})$$

In jeder Strahlensatzfigur verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die von S aus gemessenen entsprechenden Abschnitte auf ein und demselben Strahl (ein und derselben Geraden).

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \text{ und } \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} \quad (2. \text{ Strahlensatz})$$

Der erste Strahlensatz ist umkehrbar, der zweite nicht.

Ähnlichkeitsabbildungen

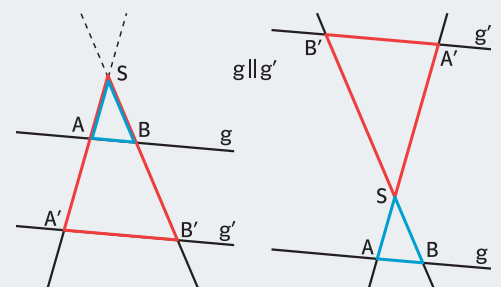
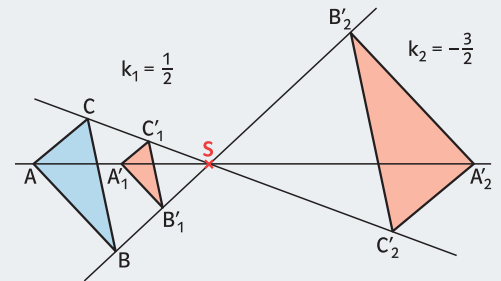
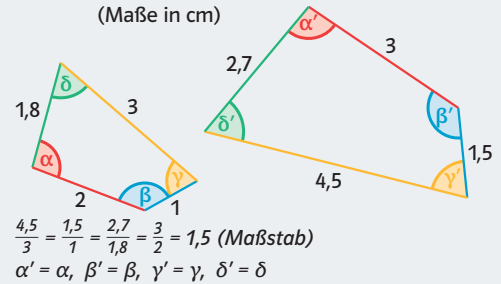
Durch zentrische Streckung und ihre Verkettung mit Kongruenzabbildungen wird zu einer Originalfigur F eine dazu ähnliche Figur F' erzeugt (Schreibweise: $F \sim F'$).

Zentrische Streckungen und ihre Verkettungen mit Kongruenzabbildungen heißen Ähnlichkeitsabbildungen.

Ähnliche Dreiecke

Stimmen zwei Dreiecke in der Größe zweier Winkel überein, sind sie zueinander ähnlich (Hauptähnlichkeitssatz).

Weitere Ähnlichkeitssätze ergeben sich in Analogie zu den Kongruenzsätzen.

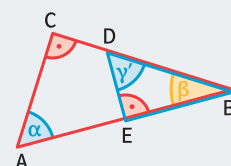


$$\overline{AB} = 3,2 \text{ cm}; \overline{SB} = 5 \text{ cm}; \overline{SB'} = 12,5 \text{ cm}$$

Mit dem 2. Strahlensatz gilt:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = \frac{12,5 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 2,5, \text{ also}$$

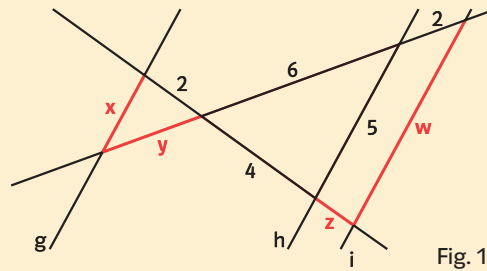
$$\overline{A'B'} = 2,5 \cdot \overline{AB} = 2,5 \cdot 3,2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$



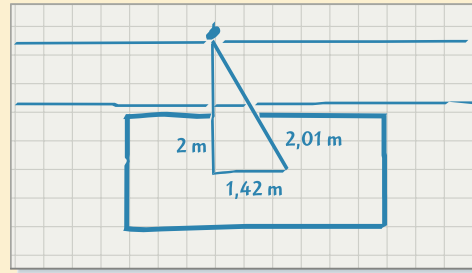
Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und EBD: gemeinsamer Winkel β , je ein rechter Winkel, damit $\triangle ABC \sim \triangle EBD$

Training

1 Die Geraden g , h und i in Fig. 1 sind parallel. Berechne die Längen der Strecken w , x , y und z (Maße in Fig. 1 in cm).



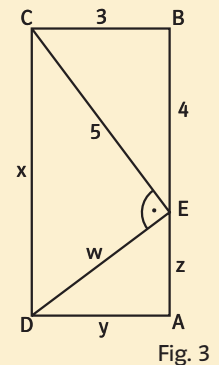
2 Zeichne den Punkt $S(2|2)$ und das Fünfeck $ABCDE$ mit $A(4|1)$, $B(6|2)$, $C(6|5)$, $D(4|6)$ und $E(2|4)$ in ein Koordinatensystem. Strecke das Fünfeck von S aus
a) mit dem Streckungsfaktor $k = 2,5$,
b) mit dem Streckungsfaktor $k = -1$.



3 Mia und Kai peilen aus ihrem Zimmerfenster heraus einen Lichtmast auf der anderen Straßenseite an. Um seine Entfernung von der Hauswand zu berechnen, haben sie die Strecken im Zimmer gemessen (Fig. 2). Die Fensteröffnung ist 1,20 m breit. Welche Entfernung ergibt sich?

4 In das Rechteck $ABCD$ ist ein rechter Winkel eingezeichnet (Fig. 3; Maße in cm).

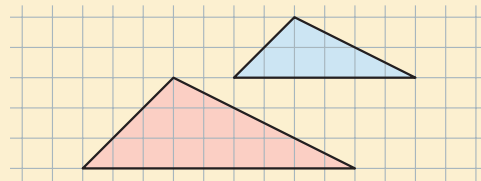
- a) Zeige, dass die Dreiecke AED , DEC und EBC ähnlich sind.
b) Wie lang sind die Strecken w , x , y und z ?



5 a) Begründe die Ähnlichkeit der Dreiecke in Fig. 4.

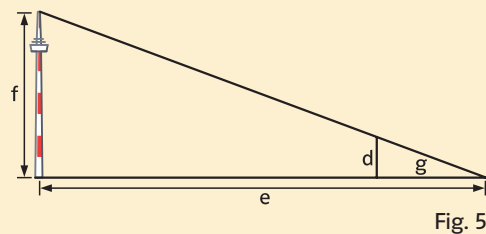
b) Das größere Dreieck ist das Bild des kleineren bei einer zentrischen Streckung. Wie groß ist der Streckungsfaktor k ?

c) Übernimm die Dreiecke in dein Heft und konstruiere das Streckungszentrum S .



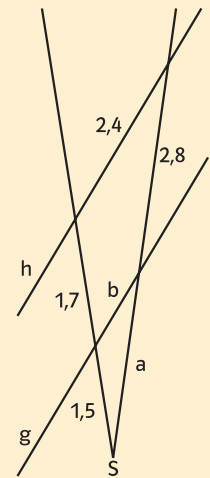
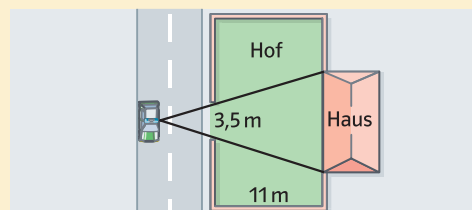
6 Wie hoch ist der Turm in Fig. 5, wenn $d = 1,8$ m, $g = 64$ m und $e = 2,6$ km sind?

7 Die Geraden g und h in Fig. 6 sind parallel. Wie lang sind die Strecken a und b (Maße in Fig. 6 in cm)?



8 Ein Bauplan wird so verkleinert, dass alle Längen im Maßstab 1:5 erscheinen. Auf wie viel Prozent hat sich dabei der Flächeninhalt verkleinert? Wie ändern sich die Längen, wenn der Flächeninhalt beim Kopieren um 125% größer wird?

9 Gegenüber einer Toreinfahrt steht ein Polizeiauto, um das im Hof befindliche 10 m breite Hinterhaus zu observieren. Wie weit muss der Wagen von der Toreinfahrt entfernt sein, damit die gesamte Hausfront eingesehen werden kann?



d)

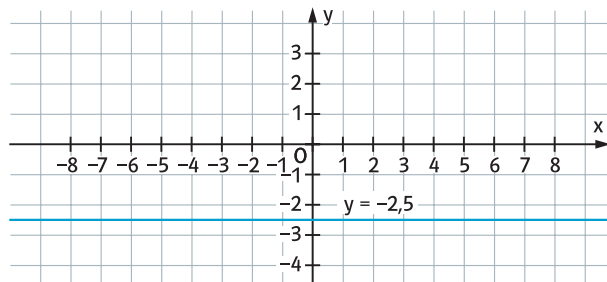


Fig. 4

2

- a) (1|2) b) (10|3) c) (3|1)
d) Die entsprechenden Geraden sind zueinander parallel, also gibt es keine Lösung.

3

- a) S(1|2) b) S(-1,8|0,4)

4

Gleichungen: $3x + 4y = 18$; $-5x + 6y = 8$
Lösung: $x = 2$; $y = 3$

5

Anzahl der Zelte der Mädchen: x
Anzahl der Zelte der Jungen: y
Gleichungen: $x + y = 12$; $3x + 4y = 43$
Lösung: (5|7)
Es nahmen am Zeltlager insgesamt 15 Mädchen und 28 Jungen teil.

6

a) x : Preis für einen Tag, y : Preis pro Kilometer (jeweils in Euro)
Rechnung 1 führt auf die Gleichung: $x + 50y = 40$.
Rechnung 2 führt auf die Gleichung: $2x + 140y = 88$.
Lösung: $x = 30$; $y = 0,2$.
Also: 30,- € für einen Tag und 20 ct pro Kilometer
b) Es werden nur die Kosten für einen Tag betrachtet.
Bei Fix ergibt sich eine Rechnungssumme von 50 €, wenn man 100 km fährt, und eine Rechnungssumme von 55 €, wenn man 125 km fährt.
Bei mehr als 125 km ist demnach der Tarif Car und Fahr von German-Car günstiger.
Vorher sollte man sich besser für Fix entscheiden, weil da der Kilometerpreis 2 ct günstiger ist als beim Tarif Car und Spar von German-Car. Der Tarif Car und Spar von German-Car ist nur genauso günstig wie Fix, wenn man exakt 100 km fährt.

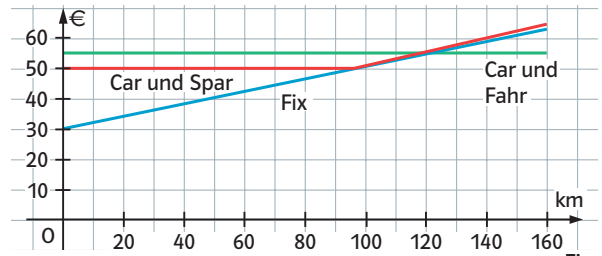
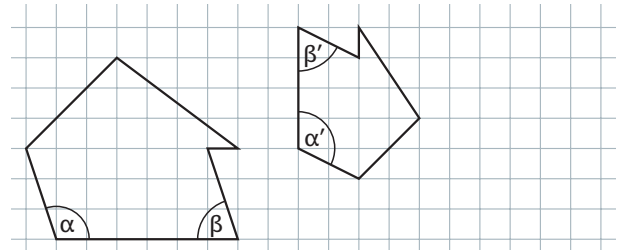


Fig. 5

Kapitel V, Bist du sicher?, Seite 185

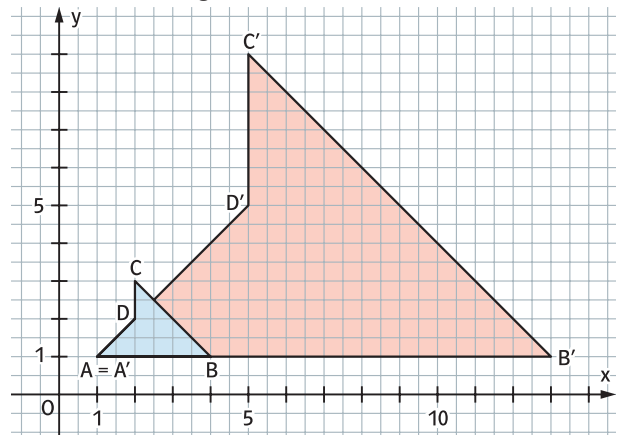
1

Die Sechsecke sind nicht ähnlich. Dies erkennt man zum Beispiel beim Vergleich der einander entsprechenden Winkel. So ist beispielsweise $\alpha < \alpha'$ und $\beta < \beta'$.



2

Das zu ABCD ähnliche Viereck A'B'C'D' kann zum Beispiel so gezeichnet werden, dass A' mit A zusammenfällt und B' auf der Geraden AB liegt.



Kapitel V, Bist du sicher?, Seite 189

1

Grafik siehe nächste Seite

2

Es existiert eine zentrische Streckung mit Streckungszentrum $(0|0)$ und Streckungsfaktor 3, die das Dreieck ABC auf das Dreieck A'B'C' abbildet, denn die Eigenschaften (1) bis (3) aus dem Schülerbuch S. 187 sind erfüllt.

Grafik siehe nächste Seite

Kapitel V, Bist du sicher?, Seite 192

1

a) $V' = 2^3 \cdot 27 \text{ cm}^3 = 8 \cdot 27 \text{ cm}^3 = 216 \text{ cm}^3$

b) Für die Länge der Seitenkante des ursprünglichen Würfels muss gelten: $a = 3 \text{ cm}$, denn $(3 \text{ cm})^3 = 27 \text{ cm}^3$. Also gilt für den Flächeninhalt einer Seitenfläche des ursprünglichen Würfels: $A = a^2 = 9 \text{ cm}^2$. Für den Flächeninhalt der gestreckten Seitenfläche muss nun gelten: $A' = 2^2 \cdot 9 \text{ cm}^2 = 36 \text{ cm}^2$.

Kapitel V, Bist du sicher?, Seite 195

1

$a = 2,47 \text{ cm}$

$b = 1,125 \text{ cm}$

2

Der Fernsehturm hat eine Höhe von 73,125 m.

Kapitel V, Bist du sicher?, Seite 199

1

$x = 3 \text{ cm}$

$y = 0,8 \text{ cm}$

$z = 0,75 \text{ cm}$

2

Die Flussbreite beträgt 12 m.

Kapitel V, Bist du sicher?, Seite 204

1

a) Der Winkel $\sphericalangle DEC$ und der Winkel $\sphericalangle CBA$ sind gleich groß. Ebenfalls gleich groß sind der Winkel $\sphericalangle ACB$ und der Winkel $\sphericalangle ECD$ (Scheitelwinkel). Da die beiden Dreiecke in der Größe zweier Winkel übereinstimmen, sind sie nach dem Hauptähnlichkeitssatz ähnlich.

b) Es gilt: $C = C'$; $E = B'$ und $D = A'$. Weiter gilt $4,5 \text{ cm} = \overline{DE} = \overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB} = k \cdot 7,5 \text{ cm}$. Der Streckungsfaktor k beträgt also $\frac{3}{5}$. Damit lässt sich berechnen:

$$\overline{CE} = \overline{B'C'} = k \cdot \overline{BC} = \frac{3}{5} \cdot 19,5 \text{ cm} = 11,7 \text{ cm} \quad \text{und}$$

$$k \cdot \overline{AC} = \overline{A'C'} = \overline{CE} = \overline{CD} = 10,8 \text{ cm},$$

$$\text{also } \overline{AC} = \frac{1}{k} \cdot 10,8 \text{ cm} = \frac{5}{3} \cdot 10,8 \text{ cm} = 18 \text{ cm}.$$

Kapitel V, Kannst du das noch?, Seite 205

16

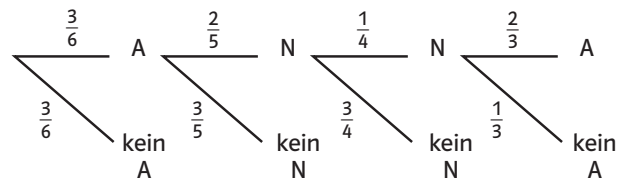
a) $x = \frac{4}{7}$; $y = -\frac{1}{7}$

b) $x = \frac{2}{3}$; $y = -\frac{7}{6}$

c) $x = \frac{26}{27}$; $y = \frac{2}{9}$

17

Der beschriebene Ablauf kann durch ein Baumdiagramm veranschaulicht werden:



Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{30}.$$

Kapitel V, Training, Seite 213

1

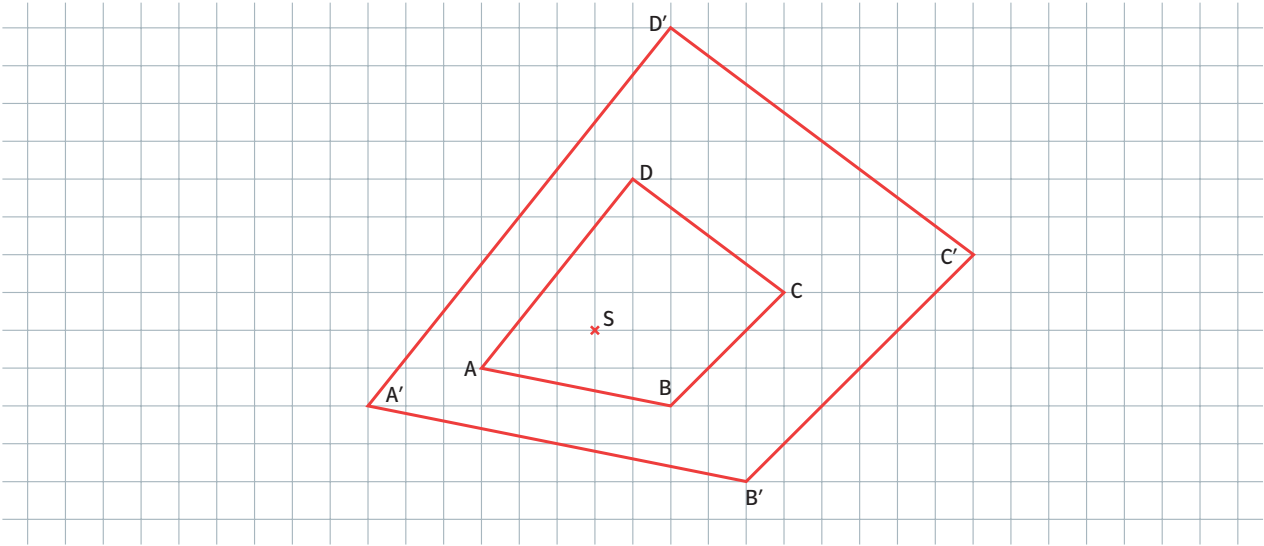
$$\frac{w}{5 \text{ cm}} = \frac{6 \text{ cm} + 2 \text{ cm}}{6 \text{ cm}}, \quad \text{also } w = \frac{8}{6} \cdot 5 \text{ cm} = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

$$\frac{x}{5 \text{ cm}} = \frac{2 \text{ cm}}{4 \text{ cm}}, \quad \text{also } x = \frac{2}{4} \cdot 5 \text{ cm} = 2,5 \text{ cm}$$

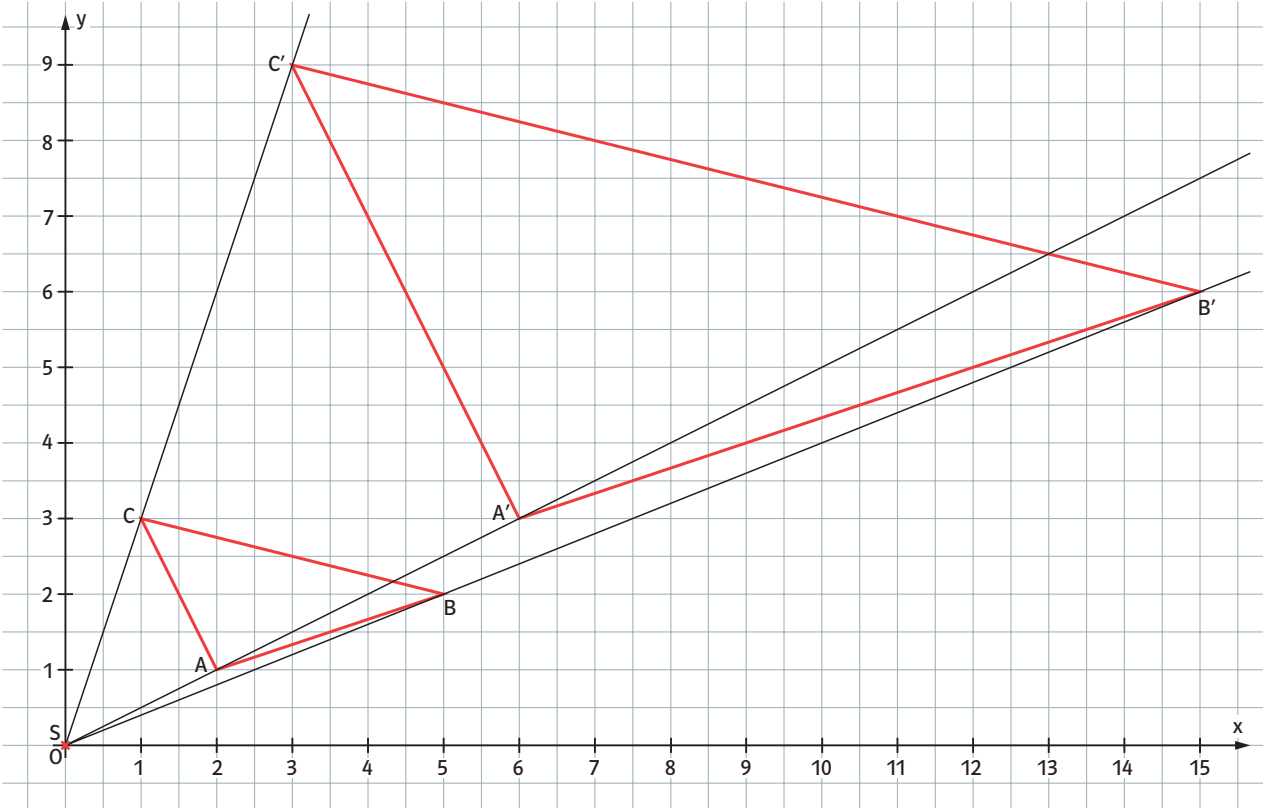
$$\frac{y}{6 \text{ cm}} = \frac{2 \text{ cm}}{4 \text{ cm}}, \quad \text{also } y = \frac{2}{4} \cdot 6 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{z}{4 \text{ cm}} = \frac{2 \text{ cm}}{6 \text{ cm}}, \quad \text{also } z = \frac{2}{6} \cdot 4 \text{ cm} = \frac{4}{3} \text{ cm}$$

Grafik zu Aufgabe 1, Seite 189

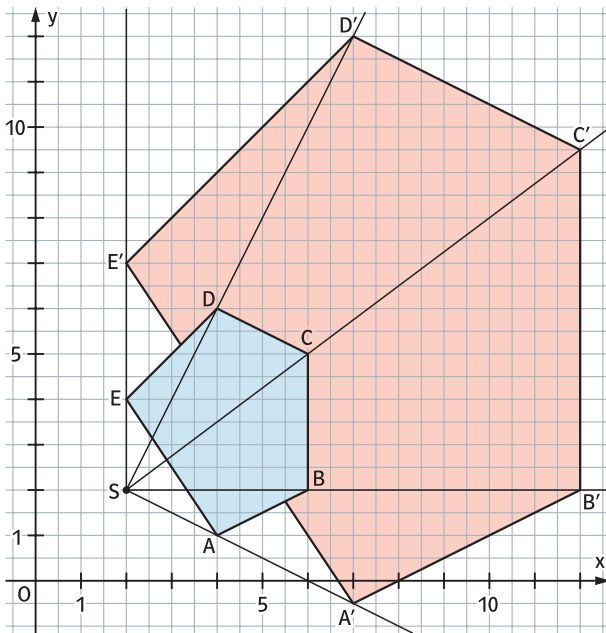


Grafik zu Aufgabe 2, Seite 189

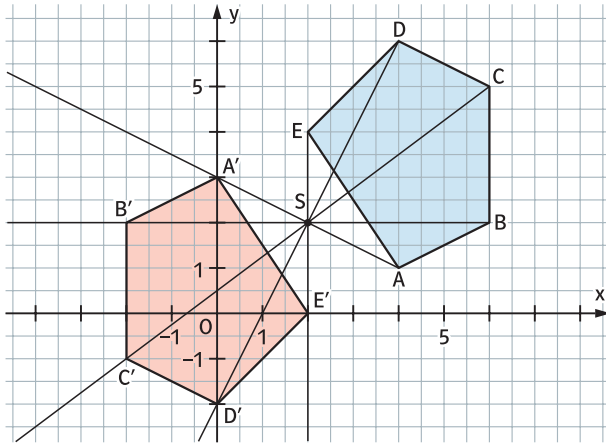


2

a)



b)



3

Mit x für den Abstand (in m), den der Lichtmast vom Haus hat, ergibt sich $\frac{x}{x+2} = \frac{1,2}{1,42}$, also $1,42x = 1,2x + 2,4$ und damit $x = \frac{2,4}{0,22} \approx 10,9$.

Der Lichtmast steht etwa 10,9 m vom Haus entfernt.

(Für die „schräg“ gemessene Entfernung y (in m) ergibt sich $y \approx 10,96$.)

4

a) Alle drei Dreiecke besitzen jeweils einen rechten Winkel. Die Winkel $\sphericalangle DEA$ und $\sphericalangle EDC$ sind Wechselwinkel und folglich gleich groß. Damit stimmen die Dreiecke AED und DEC in den Größen zweier Winkel überein, sind also ähnlich. Da auch die Winkel $\sphericalangle DCE$ und $\sphericalangle BEC$ Wechselwinkel sind, stimmen auch die Dreiecke DEC und EBC in den Größen zweier Winkel überein, sind also ebenfalls ähnlich. Das Dreieck DEC ist ähnlich zum Dreieck AED und auch ähnlich zum Dreieck EBC. Also sind auch die Dreiecke AED und EBC ähnlich.

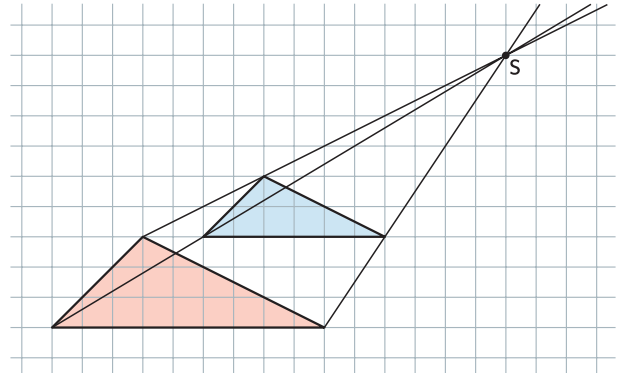
b) $w = 3,75$ cm; $x = 6,25$ cm; $y = 3$ cm; $z = 2,25$ cm

5

a) Die Seiten der Dreiecke sind paarweise parallel. Also stimmen die Dreiecke in den Größen ihrer Innenwinkel überein und sind ähnlich.

b) $k = 9 - 6 = 1,5$

c)



6

$\frac{f}{e} = \frac{d}{g}$, also $f = \frac{d}{g} \cdot e = \frac{1,8}{64} \cdot 2,6 \text{ km} = 73,125 \text{ m}$
Der Fernsehturm ist etwa 73 m hoch.

7

$\frac{a}{2,8 \text{ cm}} = \frac{1,5 \text{ cm}}{1,7 \text{ cm}}$, also $a = \frac{1,5}{1,7} \cdot 2,8 \text{ cm} \approx 2,47 \text{ cm}$

$\frac{b}{2,4 \text{ cm}} = \frac{1,5 \text{ cm}}{,5 \text{ cm} + 1,7 \text{ cm}}$, also $b = \frac{1,5}{3,2} \cdot 2,4 \text{ cm} = 1,125 \text{ cm}$

8

Der Flächeninhalt verkleinert sich auf $\frac{1}{25}$, das sind 4% des ursprünglichen Flächeninhalts.

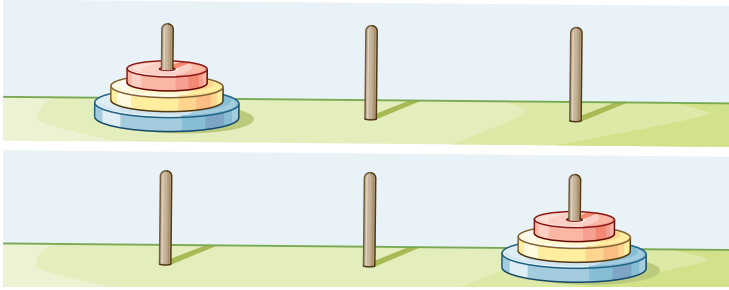
Wird der Flächeninhalt um 125% vergrößert, so ist der Flächeninhalt in der Kopie 2,25-mal so groß wie im Original. Alle Längen vergrößern sich dabei auf das 1,5-Fache, das bedeutet einen Längenzuwachs von 50%.

9

Mit x für den Abstand des Polizeiautos von der Toreinfahrt (in m) ergibt sich $\frac{x}{x+11} = \frac{3,5}{10}$, also $10x = 3,5(x+11)$ und damit $x = \frac{3,5 \cdot 11}{6,5} \approx 5,92$.

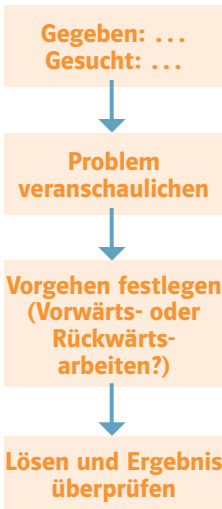
Das Polizeiauto darf höchstens etwa 5,92 m von der Toreinfahrt entfernt sein.

Vernetzung Heuristische Strategien



Beim Spiel „Türme von Hanoi“ sollen die Scheiben vom linken Pflock auf den rechten Pflock nach folgenden Spielregeln übertragen werden.

- Der mittlere Pflock darf verwendet werden.
- Es dürfen immer nur einzelne Scheiben bewegt werden.
- Es darf nie eine größere auf einer kleineren Scheibe liegen.



Bei schwierigen Aufgaben weiß man häufig nicht sofort, wie bei ihrer Lösung vorzugehen ist. Es gilt dann, sich einen geeigneten Lösungsweg zu erarbeiten. Dabei sollten folgende Schritte (man nennt sie auch heuristische Regeln) eine Rolle spielen:

(1) Analyse der Situation

- Erfasse, was gegeben und was gesucht ist.
- Überprüfe, ob du die auftretenden Begriffe und Redeweisen verstehst.
- Wenn möglich, veranschauliche dir den Sachverhalt durch eine Skizze.

(2) Erarbeitung eines Lösungsweges

- Führe passende Bezeichnungen ein.
- Suche nach Aussagen, die mit der Aufgabe zusammenhängen könnten.
- Übertrage in der Aufgabe gegebene Bedingungen in die Sprache der Mathematik.
- Ziehe Folgerungen aus den Voraussetzungen (Vorwärtsarbeiten).
- Suche nach Bedingungen, die zur Lösung führen könnten (Rückwärtsarbeiten).

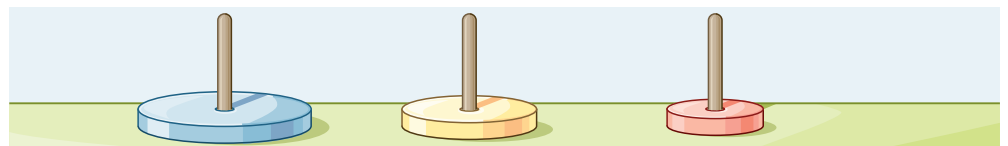
(3) Darstellung der Lösung

- Beschreibe deinen Lösungsweg und gib die Folge der Lösungsschritte an.
- Begründe deine Lösungsschritte.

(4) Kontrolle der Lösung

- Überprüfe die Berechtigung jedes einzelnen Lösungsschrittes.
- Prüfe die Korrektheit der einzelnen Schritte und ob dein Ergebnis sinnvoll ist.
- Formuliere deine Antwort zur Aufgabenstellung.

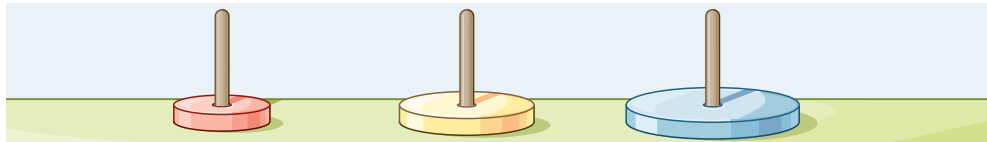
Betrachten wir als Beispiel das Spiel „Türme von Hanoi“. Nutzen wir die Strategie des **Vorwärtsarbeitens**, dann überlegen wir uns, wie wir vorgehen müssen, damit unter Beachtung der gegebenen Regeln die Scheiben schrittweise vom linken Pflock auf den rechten Pflock bewegt werden. Um die größte Scheibe rechts ablegen zu können, müssen zunächst die kleine und die mittlere Scheibe auf andere Blöcke abgelegt werden. Werden die kleine Scheibe rechts und die mittlere Scheibe in der Mitte abgelegt,



kann man nach 5 weiteren Schritten das Ziel erreichen.

Bei Nutzung der Strategie **Rückwärtsarbeiten** gehen wir vom Ziel (oder Ergebnis) aus und überlegen uns, in welchen Schritten die Scheiben vom linken Pflock auf den rechten Pflock bewegt worden sind. Im letzten Schritt muss die kleine und im vorletzten Schritt die mittlere Scheibe rechts abgelegt worden sein. Wo sollten diese sich vorher befunden haben?

Die Abbildung zeigt eine Möglichkeit:



Zu finden ist dann noch, durch welche Schrittfolge diese Lage der Scheiben erreicht werden kann.

Die Beschäftigung mit Glücksspielen war eine der Grundlagen für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Folgende Aufgabe hat in der Zeit von 1494 bis 1654 die Fachwelt stark beschäftigt:



Zwei Spieler A und B mit gleichen Gewinnchancen pro Partie spielen gegeneinander. Sieger ist derjenige, der zuerst 6 Partien gewonnen hat. Er erhält einen Geldbetrag. Die beiden Spieler müssen das Spiel abbrechen, als A bereits fünf und B zwei Partien gewonnen haben. Wie ist der Geldbetrag aufzuteilen?

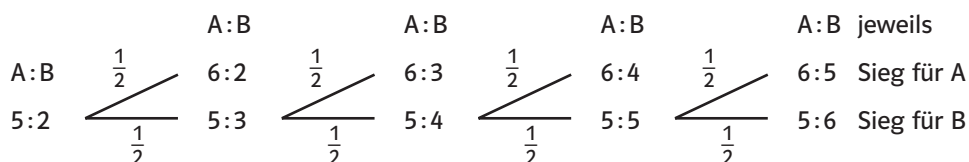
Damals bedeutsame Mathematiker schlugen folgende Aufteilung vor:

Luca Pacioli	5:2
Fontana Tartaglia	4:1
Blaise Pascal, Pierre de Fermat	15:1

Mit welchem der Vorschläge könntest du dich anfreunden? Versuche, dabei eine Begründung für deine Auffassung zu formulieren.

Wollen wir das Problem mathematisch lösen, müssen wir dieses Spiel erst einmal näher untersuchen. Wenn die Gewinnchancen gleich sind, dann hat jeder Spieler in jeder Partie eine Gewinnchance von 0,5. Jede Partie ist ein Zufallsexperiment und nach 7 Durchführungen solcher Zufallsexperimente steht es 5:2 für A. Ausgehend von diesem Spielstand können wir ein Baumdiagramm erstellen, das den weiteren Verlauf dieses Zufallsexperiments beschreibt. Dabei ist zu beachten, dass nach der Spielregel der Wettbewerb zu Ende ist, wenn einer der beiden Spieler 6 Partien gewonnen hat.

Es ergibt sich folgendes Baumdiagramm:



Daraus ergibt sich: $P(\text{Sieg für A}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$
 $P(\text{Sieg für B}) = \frac{1}{16}$

Demnach ist der Gewinn im Verhältnis 15 zu 1 aufzuteilen.

Es ist schon erstaunlich, wie wir jetzt in Klasse 8 mit solchen Hilfsmitteln wie Baumdiagramm und Pfadregeln Probleme lösen können, die berühmte Mathematiker früherer Jahre nicht oder erst nach langer Zeit lösen konnten.

Aufgaben

1 In einem neu angelegten Teich wächst eine Seerose. Jeden Tag verdoppelt die Pflanze ihre Größe. Nach 11 Tagen ist der gesamte Teich zugewachsen. Wie lange hätte das Zuwachsen des Teiches gedauert, wenn man zwei Seerosen eingepflanzt hätte?

2 Paul und Bruno besitzen jeweils ein Aquarium mit Fischen. Paul sagt zu Bruno: „Schenk mir einen deiner Fische, dann habe ich doppelt so viele wie du“. Bruno antwortet: „Nein, aber schenk du mir einen deiner Fische, dann haben wir beide gleich viele.“ Wie viele Fische haben Paul und Bruno in ihren Aquarien?

3 In einem Lager befanden sich 100 kg Beeren. Eine Analyse ergab, dass die Beeren 99 % Wasser enthielten. Später wurde die Analyse wiederholt und diese ergab einen Wassergehalt von 98 %. Wie viel wogen die Beeren jetzt?

4 Bei einer Geburtstagsfeier wird folgendes Hütespiel gespielt:
In einer Schachtel befinden sich fünf Hüte, zwei davon sind weiß, drei schwarz. Finn, Simon und Timm setzen sich hintereinander auf drei Stühle und bekommen je einen dieser Hüte aufgesetzt. Sie wissen nicht, welche Farbe ihr Hut hat. Timm sieht, welche Farbe die Hüte der beiden vor ihm Sitzenden haben, und Simon sieht, welche Farbe der Hut von Finn hat. Nur Finn besitzt keinerlei Informationen.
Zunächst wird Timm gefragt, ob er sagen kann, welche Farbe sein Hut hat. Er antwortet: „Nein“. Als nächster wird Simon gefragt, seine Antwort ist dieselbe. Als man dann Finn fragt, antwortet dieser: „Mein Hut ist schwarz“.
Wie kam er darauf?

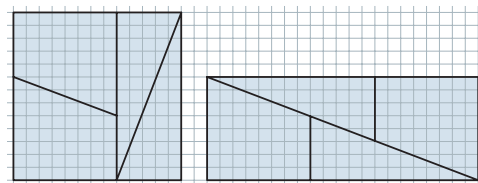
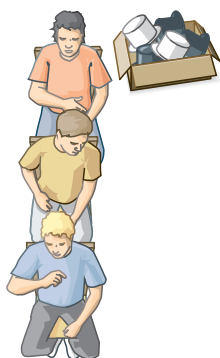
5 Auf einem Teich, der weder Zufluss noch Abfluss hat, befindet sich ein Boot mit zwei Jungs. Einer der beiden wirft aus dem Boot einen Cent ins Wasser. Wird dadurch der Wasserspiegel des Teichs steigen, fallen oder unverändert bleiben? (Vielleicht fällt dir die Entscheidung leichter, wenn du dir anstelle des Cent einen großen Steinbrocken vorstellst!)

6 Der indische Zauberer Randi hat einen 13×13 Fuß großen Teppich. Er möchte ihn in einen Teppich mit den Maßen 8×21 Fuß umarbeiten lassen, ohne dass dabei Abfall entsteht. Den Einwand des Meisters, dass dies nicht gehe, da $13 \cdot 13 = 169$ aber $8 \cdot 21 = 168$ ist, entkräftet er durch die Vorlage seines Zerlegungsplanes:

Wer von beiden hat recht? Begründe deine Aussage.

7 Ein Milchverkäufer hat nur einen 5-Liter- und einen 3-Liter-Krug zur Verfügung, um die Milch aus der großen Milchkanne für seine Kundschaft abzumessen. Wie kann er einen Liter abmessen, ohne Milch vergießen zu müssen?

8 In einem Dreieck ist eine Seite 18 cm und eine zweite Seite 24 cm lang. Finde jeweils eine dritte Seite so, dass aus den drei Seiten ein rechtwinkliges, ein spitzwinkliges bzw. ein stumpfwinkliges Dreieck entsteht.



9 In einem sehr alten Rätsel wird von einem Schausteller berichtet, der mit einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf übers Land reiste. Er kam dabei an einen Fluss. Die einzige Hilfe, an das andere Ufer zu gelangen, war ein kleines Boot. Mit dem Boot konnte aber außer ihm nur entweder der Wolf, die Ziege oder der Kohlkopf auf die andere Seite des Flusses gebracht werden.

Unglücklicherweise konnte er nicht den Wolf mit der Ziege und auch nicht die Ziege mit dem Kohlkopf allein lassen, da der Wolf die Ziege bzw. die Ziege den Kohlkopf gefressen hätte. Nach gründlicher Überlegung fand der Schausteller aber eine Möglichkeit, all sein Hab und Gut sicher über den Fluss zu bringen.

Wie musste er vorgehen?



10 Aus zehn Münzen wird ein Dreieck, wie in Fig. 1 dargestellt, gelegt.

Wie viele Münzen müssen mindestens bewegt werden, um das in Figur 2 dargestellte Dreieck zu erzeugen?



Fig. 1



Fig. 2

11 Neben fünf normalen Münzen befindet sich in einer Tasche eine Münze, die auf beiden Seiten ein Wappen hat. Aus diesen sechs Münzen wird zufällig eine gezogen und diese fünfmal geworfen. Bei all diesen Würfeln liegt bei der Münze das Wappen oben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gezogene Münze eine normale Münze ist?

12 Ein Quadrat mit der Seitenlänge 10 cm wird durch drei Strecken, die parallel zu den Seiten sind, in Rechtecke zerlegt (Fig. 3).

Bestimme den Umfang des kleinsten und des größten Rechteckes, wenn B doppelt so groß, C dreimal und D viermal so groß wie A sind!

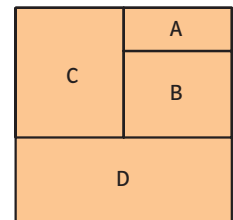


Fig. 3

13 Luis hat zwei (natürlich quadratische) Schachbretter. Das kleinere Brett hat einen Umfang von 112 cm. Der Umfang des Größeren beträgt 212 cm, ist also einen Meter länger. Wie groß ist dann der Abstand d der Seitenkanten der beiden Bretter, wenn man sie wie in Fig. 4 aufeinander stellt?

Nun stelle man sich vor, man hätte ein Quadrat mit einer Fläche von einem Quadratkilometer. Man verlängert jetzt wie oben den Umfang des Quadrats um einen Meter und legt die Quadrate wie in Fig. 4 ineinander. Wie weit sind jetzt die Seiten der beiden Quadrate voneinander entfernt?

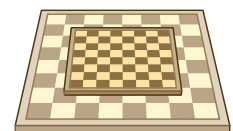


Fig. 4

14 In einer Höhle stehen vier Personen, die die Höhle durch den einzigen Ausgang wieder verlassen wollen. Dabei ist zu berücksichtigen:

- (1) Die Personen sind unterschiedlich schnell:
A benötigt fünf, B vier und C zwei Stunden, D schafft es in einer Stunde.
- (2) Der Weg ist so dunkel und gefährlich, dass man ihn nur mit (leuchtender) Taschenlampe gehen kann. Es gibt aber nur eine Taschenlampe.
- (3) Die Höhle ist so eng, dass stets nur maximal zwei Personen gleichzeitig den Weg benutzen können.
- (4) Die Taschenlampe brennt nur 12 Stunden.

Finde heraus, wie die vier es anstellen müssen, dass sie alle die Höhle in der verfügbaren Zeit verlassen können.

Bild- und Textuellennachweis

Bildquellen

U1.1 Avenue Images GmbH (Stockbyte), Hamburg; **U1.2** Getty Images (RR/The Image bank/Malcolm Piers), München; **4.1** Klett-Archiv (Simianer & Blühdorn), Stuttgart; **4.2** Getty Images (Taxi/Marc Douet), München; **4.3** SalzkammergutBahn/Schafbergbahn, St. Wolfgang; **5.1** Picture-Alliance (Lander), Frankfurt; **5.2** FOCUS (Roloff), Hamburg; **8.1** Gebhardt, Dieter, Asperg; **8.3** Getty Images (Photonica/Jakob Helbig), München; **8.4**; **9.1**; **9.2**; **9.3** Klett-Archiv (Simianer & Blühdorn), Stuttgart; **9.4** Klett-Archiv (Simianer & Blühdorn), Stuttgart; **12.1** Klett-Archiv, Stuttgart; **21.1** © VG Bild-Kunst, Bonn 2012 (Richard Paul Lohse: 6 Komplementäre Farbreihen 1983); **27.1** ddp images GmbH, Hamburg; **35.1** Imago (Icon SMI), Berlin; **46.1** Klett-Archiv (Simianer & Blühdorn), Stuttgart; **47.1** Getty Images (Jan von Holleben), München; **47.2** Getty Images (Taxi/Marc Douet), München; **47.3** Getty Images (MARCUS BRANDT), München; **47.4** Getty Images (Stone/Gary Holscher), München; **51.1**; **52.1** Klett-Archiv, Stuttgart; **52.2**; **52.3**; **52.4** Deutsches Spielkartenmuseum Leinfelden-Echterdingen - Ein Zweigmuseum des Württembergischen Landesmuseums Stuttgart; **52.5** Klett-Archiv (KD Busch Fotostudio GmbH), Stuttgart; **53.1**; **54.1** Klett-Archiv, Stuttgart; **56.1** Deutsches Museum, München; **56.2** Klett-Archiv (Simianer & Blühdorn), Stuttgart; **58.1**; **58.2**; **59.1** Klett-Archiv, Stuttgart; **62.1** EZB, Frankfurt; **62.2** EZB, Frankfurt; **62.3** Klett-Archiv (KD Busch Fotostudio GmbH), Stuttgart; **65.1**; **65.2** Klett-Archiv (Simianer und Blühdorn), Stuttgart; **65.3** Klett-Archiv, Stuttgart; **72.1** Getty Images, München; **76.1** Klett-Archiv (KD Busch Fotostudio GmbH), Stuttgart; **77.1** Getty Images (Taxi), München; **78.1** PIXTAL, New York NY; **79.1** Fotolia.com (Janine Fretz Weber), New York; **80.1** Fotolia.com (Svetlana Larina), New York; **81.1** Klett-Archiv (KD Busch Fotostudio GmbH), Stuttgart; **83.1** Mauritius Images (Alamy), Mittenwald; **83.2** Thinkstock (iStockphoto), München; **84.1** iStockphoto (kertlis), Calgary, Alberta; **85.1** laif (KEYSTONE/Martin Ruetschi), Köln; **85.2** Fotolia.com (Daniel Ernst), New York; **86.1** Klett-Archiv, Stuttgart; **87.1** Getty Images (Taxi/FPG), München; **90.1** Fotosearch Stock Photography, Waukesha, WI; **91.1** Ullstein Bild GmbH (Efe), Berlin; **93.1**; **93.2**; **93.3** Deutsches Spielkartenmuseum Leinfelden-Echterdingen - Ein Zweigmuseum des Württembergischen Landesmuseums Stuttgart; **94.1**; **94.2** EZB, Frankfurt; **94.3** Fotolia.com (Gjermund Alsos), New York; **95.1** Thinkstock (Getty Images/iStockphoto/Jeff Dalton), München; **97.1** allesalltag bildagentur, Hamburg; **97.2** FOCUS (Christian Kruska), Hamburg; **99.1** Ullstein Bild GmbH (CARO/Frank Sorge), Berlin; **100.1** culture-images (Rossen Gargolov), Köln; **100.2** brueckenweb (Frank Sellke), Krefeld; **100.3** brueckenweb (Frank Sellke), Krefeld; **100.4** brueckenweb (Frank Sellke), Krefeld; **101.1** Imago (Siepmann), Berlin; **101.2** Helga Lade Fotoagentur (Joke), Frankfurt; **101.2** URW, Hamburg; **102** Picture-Alliance (Matthias Hiekel), Frankfurt; **102** Picture-Alliance (R. Schmid/Bildagentur Huber), Frankfurt; **102.3** laif (Frank Heuer), Köln; **102.4** LOOK GmbH (Ingolf Pompe), München; **102.5** shutterstock (Galyna Andrushko), New York, NY; **102.6** SalzkammergutBahn/Schafbergbahn, St. Wolfgang; **103.1** Interfoto (Rainer Waldkirch), München; **104.1** Schwaneberger Verlag GmbH, Unterschleißheim; **107.1** MEV Verlag GmbH, Augsburg; **112.1** Imago, Berlin; **117.1** Ullstein Bild GmbH (Nowosti), Berlin; **125.1** Corel Corporation Deutschland, Unterschleißheim; **126.1** Kneffel, Michael, Essen; **126.3** Lokomotiv-Ateliers für Visuelle Kommunikation (Willemssen), Stadtlohn; **127.1** Corel Corporation Deutschland, Unterschleißheim; **130.1** ddp images GmbH (dapd/Germania), Hamburg; **132.1** Mauritius Images (Heidi Velten), Mittenwald; **133.1** Getty Images RF (Photodisc/PhotoLink), München; **134.1** shutterstock (Holger Mette), New York, NY; **137.1** laif (Huanhuan/XINHUA/GAMMA), Köln; **142.1**; **142.2** Picture-Alliance (Lander), Frankfurt; **143.1** Corbis (Mika), Düsseldorf; **146.1** Corbis (Ariel Skelley), Düsseldorf; **149.1** vario images (Hans-Guenther Oed), Bonn; **155.1** Avenue Images GmbH (Image Source), Hamburg; **155.2** Avenue Images GmbH (Digital Vision), Hamburg; **155.3** Avenue Images GmbH (Image Source), Hamburg; **161.3** Klett-Archiv, Stuttgart; **162.1** Mauritius Images (Gatzen), Mittenwald; **166.1** akg-images, Berlin; **167.1** Fotosearch Stock Photography (Stockbyte), Waukesha, WI; **167.2** Getty Images RF (Photodisc), München; **167.3** Avenue Images GmbH (Comstock), Hamburg; **167.4** Mineralbrunnen Überkingen-Teinach KG, Bad Überkingen; **167.5** Ernst Kumpf GmbH & Co. KG, Markgröningen; **168.1** Deutsches Museum, München; **178.1** Picture-Alliance (akg-images), Frankfurt; **178.2** Deutsches Schiffahrtsmuseum, Bremerhaven; **178.3** FOCUS (Roloff), Hamburg; **179.1** Arco Images GmbH (Tuns), Lünen; **179.2** Arco Images GmbH (Tuns), Lünen; **179.3** iStockphoto (RF/Lavrenov), Calgary, Alberta; **179.4** www.reinsch-fotodesign.de; **180.1** Ullstein Bild GmbH (NMSI/Science Museum), Berlin; **180.1** Klett-Archiv (Jens Negwer), Stuttgart; **182.1** iStockphoto (RF/Dirk Houben), Calgary, Alberta; **182.2** iStockphoto (RF/Dirk Houben), Calgary, Alberta; **183.1** aus Falk/ADAC Straßenkartografie Deutschland 1:200.000 © Falk Verlag, D-73760 Ostfildern; **184.1** Klett-Archiv (Simianer & Blühdorn), Stuttgart; **184.2** shutterstock (Bluestone/Science Photo Library), New York, NY; **185.1** BPK (Rolf Koehler), Berlin; **185.1a** Corbis (Robert Holmes), Düsseldorf; **185.1b** Corbis (Robert Holmes), Düsseldorf; **186.1** Klett-Archiv (Simianer und Blühdorn), Stuttgart; **192.1a** Klett-Archiv (Ulrich Schönbach), Stuttgart; **192.1b** Klett-Archiv (Ulrich Schönbach), Stuttgart; **198.1** PIXTAL, New York NY; **200.1** Picture-Alliance, Frankfurt; **200.1** The M. C. Escher Company; **200.1** Portrait of M. C. Escher. © 2012 Cordon Art - Baarn - Holland. All rights reserved; **206.1a** Klett-Archiv (Aribert Jung), Stuttgart; **206.1b** Klett-Archiv (Aribert Jung), Stuttgart; **207.1** Interfoto (MNG Collection), München

Textquellen

40 Der Nippel (Refrain) T: Krüger, Mike © Wachtel Edition Mike Krüger-Birgit Krüger; **90** New York Times vom 21.07.1991; **142** Das Leben im Werk des Herbert Grönemeyer ... aus: Stuttgarter Zeitung vom 09.07.2003

Sollte es in einem Einzelfall nicht gelungen sein, den korrekten Rechteinhaber ausfindig zu machen, so werden berechnete Ansprüche selbstverständlich im Rahmen der üblichen Regelungen abgegolten.

Mathematik ist mehr als Rechnen. Mit Mathematik kann man die Welt um uns herum beschreiben und verstehen, Probleme in ihr lösen und Vermutungen aufstellen und begründen. Hierzu benötigt man verschiedene Fähigkeiten, die durch die acht Symbole dargestellt sind. Diese begleiten dich durch dein Schulbuch und weisen darauf hin, welche Schwerpunkte im jeweiligen Kapitel eine Rolle spielen. Du lernst zum Beispiel:



Argumentieren / Kommunizieren
Warum ein mathematischer Satz Hand und Fuß hat und warum man beim Lesen von Zeitungsartikeln Köpfchen beweisen sollte.



Problemlösen
Du löst spannende Fragen und Probleme und lernst dabei weitere Strategien, die du immer wieder anwenden kannst.



Modellieren
Interessante Fragen aus dem Alltag und aus der Umwelt kannst du mithilfe von Mathematik beschreiben sowie die mathematischen Lösungen in den jeweiligen Situationen deuten.



Werkzeuge
Du verwendest elektronische Werkzeuge wie z. B. den grafikfähigen Taschenrechner (GTR), Computeralgebrasysteme (CAS), dynamische Geometriesoftware (DGS) und Tabellenkalkulation.



Arithmetik / Algebra
Eine Gleichung mit einer Variablen zu lösen ist leicht. Aber wie löst man ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen? Bald ist das auch kein Problem mehr für dich.



Funktionen
Funktionen zeigen Zusammenhänge zwischen Größen. Hier erfährst du, auf welche verschiedenen Arten man eine Funktion darstellen kann.



Geometrie
Die Welt ist voller Formen und Figuren. Hier kannst du geometrische Zusammenhänge erkennen, Größen messen und berechnen.



Stochastik
Wahrscheinlichkeiten kann man schätzen und berechnen. Hier lernst du verschiedene Instrumente und Methoden dafür kennen.

ISBN 978-3-12-734181-2



9 783127 341812