Albrecht
Beutelspachers

Knobelaufgabe der Woche

März bis Juli 2020

mathematikum
Mathematik zum Anfassen.

1 Die Schokoladentafel

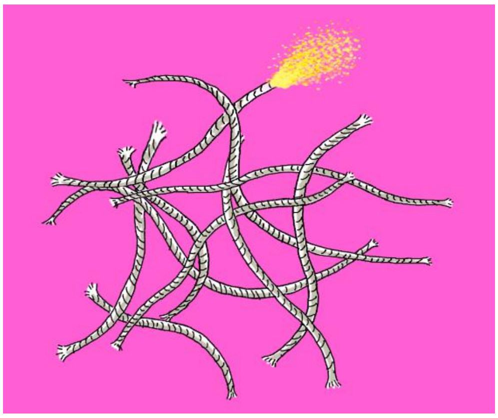
Das ist eine meiner Lieblingsaufgaben.

Stellen Sie sich vor, dass eine leckere Schokoladentafel vor Ihnen liegt. Diese besteht aus 24 Stückchen, die in 4 Reihen zu je 6 Stückchen eingeteilt sind. Sie möchten die Tafel in die 24 einzelnen Stückchen aufteilen. Dabei könnte man zuerst eine Reihe nach der anderen abbrechen und dann die einzelnen Reihen durchbrechen oder man könnte zunächst die Spalten herstellen und dann diese in Stückchen zerlegen oder man könnte eine noch ganz andere Methode verfolgen. Sie dürfen machen was Sie wollen. Es gibt nur eine Regel: In jedem Schritt nehmen Sie ein schon existierendes Teil und brechen dieses entzwei. (Übereinanderlegen u. ä. ist verboten.)

Frage: Wie viele Schritte brauchen Sie, das heißt: wie oft müssen Sie ein Teil durchbrechen, bis alle 24 Stückchen einzeln vor Ihnen liegen?

2 Die Zündschnüre

Das ist eine schwierige Aufgabe, lassen Sie sich Zeit.



Vor Ihnen steht eine Kiste mit Zündschnüren. All diese Schnüre haben eine einzige Eigenschaft: Sie brennen, wenn man sie an einem Ende anzündet, genau 60 Sekunden. Aber sonst haben sie keine Eigenschaft. Es ist nicht so, dass in 30 Sekunden die halbe Länge abgebrannt ist, denn manchmal verdickt sich eine Schnur, an anderen Stellen ist sie dafür ganz dünn. Und bei jeder Zündschnur ist es anders, keine ist wie die andere. Das einzige was man weiß, ist: Wenn man eine Schnur an einem Ende anzündet dauert es genau 60 Sekunden bis der Funke am anderen Ende angekommen ist.

Frage: Wie kann man mit diesen Zündschnüren eine Zeitspanne von 45 Sekunden abmessen?

Wenn Sie nicht draufkommen, überlegen Sie zuerst: Wie kann man 30 Sekunden abmessen?

Und ein kleines Forschungsprojekt für kleine und große Tüftler: Gibt es noch weitere Zeitspannen, die man mit diesen Zündschnüren abmessen kann? Welche Zeitspannen sind das?

3 Über die Brücke

Familie Mathefix macht einen Ausflug: Vater, Mutter, Tochter und Sohn. Sie haben sich in der Zeit verschätzt. Es ist schon dunkel und sie müssen einen Fluss überqueren. Über den Fluss führt nur ein schmaler Steg; dieser ist so schmal und so instabil, dass beim besten Willen immer nur zwei Personen drüber gehen können.

Sie wissen, wie lange jeder braucht, um die Brücke zu überqueren: Die Tochter ist schon groß und schafft es in einer Minute, während ihr kleiner Bruder zwei Minuten braucht. Die Eltern sind ängstlich und brauchen daher länger: Die Mutter vier Minuten und der Vater sogar fünf.

Nun kommt erschwerend hinzu, dass es inzwischen so dunkel ist, dass man eine Taschenlampe braucht, um überhaupt irgendetwas zu sehen. Zum Glück hat der kleine Bruder seine Taschenlampe mitgenommen. Mit der kann man den Steg überqueren, man muss die Taschenlampe aber immer wieder zurückbringen.

Natürlich will Familie Mathefix so schnell wie möglich über die Brücke kommen. Wie lange braucht sie?

4 Der perfekte Tee

Unsere Mathematikum-Mitarbeiterin Jördis Beck schrieb uns folgendes: Ich habe eine Knobelaufgabe von meiner Oma bekommen, welche ich sehr interessant finde.

Für einen besonders edlen Tee müssen Sie exakt auf die richtige Zeit des Ziehens achten. Fünf Minuten sollen es sein. Sie haben aber nur zwei Sanduhren. Die eine läuft in drei Minuten durch, die andere in vier Minuten. Beide werden gleichzeitig umgedreht und sie laufen immer bis zum Ende durch. Können Sie es schaffen, fünf Minuten abzumessen?

Wie ist es, wenn man Sanduhren mit 3 Minuten und 7 Minuten verwendet?

Kann man mit diesen Sanduhren jede Anzahl von Minuten schaffen? Zum Beispiel auch Tee, der genau 8 Minuten braucht?

Und ein kleines Forschungsprojekt für kleine und große Tüftler: Vor Ihnen stehen viele Sanduhren in einem Regal. Die erste läuft in einer Minute ab, die zweite in zwei die dritte in drei Minuten usw. Kurz: Für jede natürliche Zahl a gibt es eine Sanduhr, die genau a Minuten braucht.

(a) Finden Sie zwei Sanduhren, mit denen man 5 Minuten garantiert nicht abmessen kann!

(b) Nehmen Sie zwei Sanduhren aus dem Regal. Können Sie schon an den Zeiten dieser Sanduhren erkennen, ob man mit ihnen jede Zeit stoppen kann?

5 Der zerstreute Professor

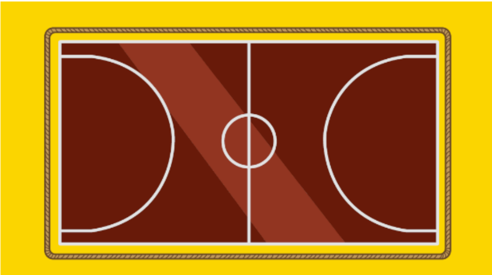
Der Professor und seine Frau haben zwei befreundete Ehepaare zum Abendessen eingeladen. Zunächst trinken sie zusammen einen Begrüßungssekt. Sie stoßen miteinander an, nicht jeder mit jedem, sondern nur mit ein paar anderen oder auch mit keinem. Aber jedenfalls stößt keiner mit seinem Ehepartner an.

Der Professor ist ein bisschen zerstreut und hat nicht aufgepasst, wer mit wem angestoßen hat. Als er danach fragt, antwortet seine Frau geheimnisvoll: „Ich verrate Dir nur, dass wir anderen fünf jeweils mit einer unterschiedlichen Zahl von Menschen angestoßen haben."

Da blinzelt der Professor, schaut seine Frau an und sagt: „Dann haben wir zwei mit den gleichen Personen angestoßen."

Wir fragen ganz einfach: Mit wie vielen Menschen hat der Professor angestoßen?

6 Seil um ein Spielfeld



Stellen Sie sich ein Fußballfeld vor. Es kann auch ein Handballfeld, ein Baseballfeld, ein Volleyballfeld oder noch etwas anders sein, es sollte nur ein großes rechteckiges Feld sein. Um dieses legen wir jetzt ein Seil, das genau auf den Begrenzungslinien des Feldes liegt. Die Länge des Seils ist also genau der Umfang des Feldes. Nun verlängern wir das Seil um genau einen Meter und legen es dann so aus, dass es überall den gleichen Abstand zu den Markierungen des Feldes hat.

Frage: Wie groß ist dieser Abstand?

7 Münzwurf mit dem Teufel

Der Teufel bietet mir ein Spiel an. Wir nehmen dazu eine Münze, und zwar eine, die absolut fair ist, also langfristig in 50% der Fälle Kopf und sonst Zahl zeigt. Bei dem Spiel geht es um drei aufeinanderfolgen Münzwürfe und deren Ergebnisse. Diese können so etwas sein wie KKK, KZK, ZZK und so weiter. Insgesamt gibt es acht solche Folgen, und wenn man nur drei Mal wirft, tritt jede dieser Folgen in genau 1/8 der Fälle auf.

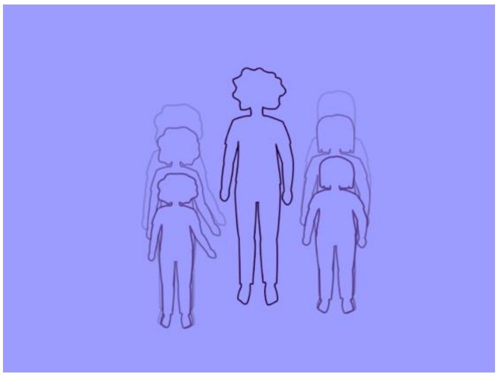
Nun flüstert mir der Teufel ins Ohr: „Du wählst Dir eine solche Folge aus drei Ergebnissen, dann wähle ich eine und dann werfen wir so lange, bis eine unserer Folgen auftaucht. Wenn Deine Folge zuerst auftaucht, hast Du gewonnen, sonst ich."

Ich ahne Schlimmes, aber fange einfach mal an und sage: „KKK". Da kann der Teufel nur müde lächeln und zischt: „ZKK".

Frage: Warum gewinnt der Teufel in der Mehrzahl der Fälle? Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er tatsächlich?

Zusatzfrage: Wenn ich ZZK setze oder ZKZ, was ist dann des Teufels Antwort?

8 Das Alter der Töchter



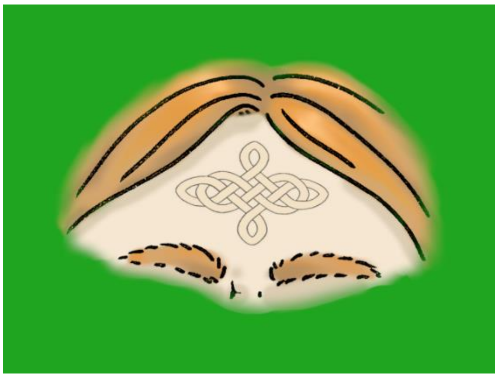
In unserer Nachbarschaft ist eine Familie neu eingezogen. Als ich mit dem Vater ins Gespräch komme, erzählt er, dass sie drei Töchter haben. Als ich frage, wie alt sie sind, stellt er mich auf die Probe.

Zunächst sagt er: „Das Produkt der Alter unserer Töchter ist 36." Darauf erwidere ich: „Das schließt natürlich viele Möglichkeiten aus, lässt aber auch noch einige zu." Darauf er: „Die Summe der Alter unserer Töchter ist unsere Hausnummer." Ich schaue, rechne und überlege, komme aber zu dem Schluss: „Damit kann ich die Alter immer noch nicht eindeutig bestimmen." In diesem Augenblick kommt eine der Töchter und der Vater stellt sie vor: „Das ist unsere Älteste."

Damit bekomme ich heraus, wie alt die Töchter sind. Sie auch?

9 Keltische Krieger

Die Kelten lebten in Runddörfern. Wir stellen uns vor, dass in jedem Haus genau ein Kelte wohnt.



Einige der Kelten wurden vom Gott der Kelten ausgewählt, Krieger zu werden. Das äußere Zeichen dafür ist ein Zeichen, das die Krieger auf ihrer Stirne tragen. Keiner der Kelten weiß allerdings, ob er selbst ein Zeichen trägt. Alles was sie wissen ist, dass mindestens einer als Krieger ausgewählt wurde.

Die Aufgabe war die: Am Morgen jeden Tages treten die Kelten, ohne ein einziges Wort zu sprechen, kurz vor ihre Hütten, schauen sich gegenseitig an und gehen dann wieder in ihre Hütten zurück. Erst dann fangen sie an nachzudenken. Dafür haben sie den gesamten restlichen Tag Zeit. So sollen sie herausbekommen, wer ausgewählt wurde und wer nicht.

Am ersten Tag zeigen die Kelten keine Reaktion. Auch am zweiten Tag nicht, offenbar hat ihr Nachdenken nicht dazu geführt, dass sie wissen, ob sie Krieger sind. Aber am zehnten Tag kommen einige Kelten mit einem Strahlen im Gesicht heraus; sie wissen genau, dass sie die Krieger sind.

Frage: Wie viele Krieger wurden ausgewählt?

Tipp: Versuchen Sie sich klarzumachen, was passieren würde, wenn nur ein Krieger ausgewählt worden wäre.

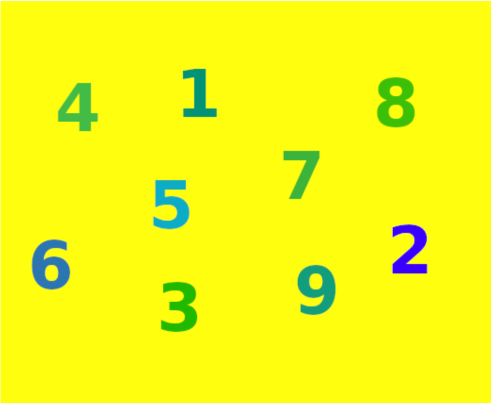
10 Möglichst wenig Gewichtssteine

Wie viele Gewichtssteine braucht man, um jedes Gewicht von 1 Gramm bis 200 Gramm auf einer Balkenwaage wiegen zu können?

Tipp: Wie viele Steine brauchen Sie, wenn die Steine die üblichen Gewichte 1, 5, 10, 50, 100 Gramm haben? Sie dürfen sich aber Gewichtssteine wünschen, also zum Beispiel 1, 2, 4, 8, … Gramm. Es geht aber noch besser…

11 Eine teilbare Zahl

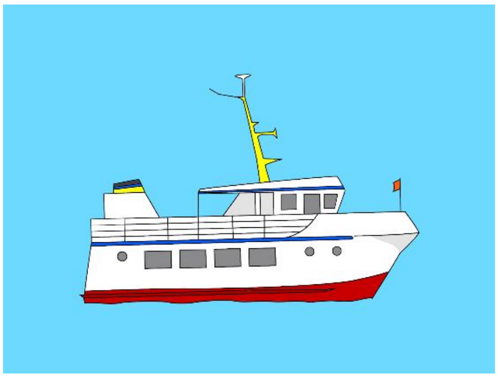
Finden Sie die Zahl, die aus den neun Ziffern 1, 2, 3, …, 9 besteht, wobei jede Ziffer genau einmal verwendet werden muss, und die folgenden Eigenschaften hat:



- Die erste Ziffer der Zahl ist durch 1 teilbar.
- Die Zahl aus den ersten beiden Ziffern ist durch 2 teilbar.
- Die Zahl aus den ersten drei Ziffern ist durch 3 teilbar.
- Und so weiter, bis…
- Die Zahl aus allen neun Ziffer ist durch 9 teilbar.

Tipp: Um eine erste Orientierung zu erhalten, überlegen Sie: Wo steht die 5? Wo stehen die geraden und wo die ungeraden Ziffern?

12 Wie alt ist der Kapitän?



Der Steuermann eines Ausflugsschiffs sagt an einem verregneten Nachmittag zum Smutje: „Heute waren nur drei Passagiere auf dem Sonnendeck. Da konnte ich mich mit allen unterhalten."

Der Smutje fragt ihn: „Wie alt waren die drei denn?"

Da stellt der Steuermann dem schlauen Smutje eine Aufgabe: „Das Produkt der Alter der drei ist 2450. Und wenn du die Zahlen zusammenzählst, erhältst du genau dein Alter."

Der Smutje rechnet und denkt nach. Dann sagt er: „Also, so bekomme ich das nicht raus. Mir fehlen noch Informationen."

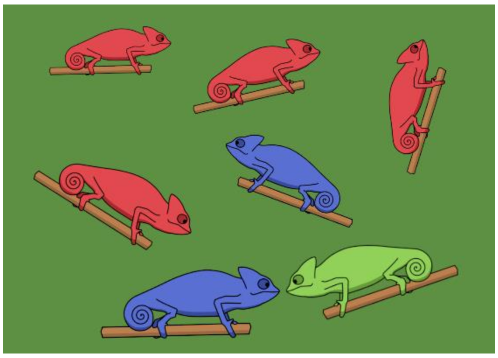
Da sagt der Steuermann beiläufig: „Übrigens sind alle drei jünger als unser Kapitän."

Da leuchten die Augen des Smutje: „Na klar, jetzt weiß ich, wie alt die sind."

Das will ich von Ihnen aber gar nicht wissen, sondern meine Frage lautet: Wie alt ist der Kapitän?

13 Chamäleons

In einem großen Terrarium leben ganz vergnügt einige Chamäleons. Und zwar 4 rote, 2 blaue und ein grünes. Diese Chamäleons haben eine merkwürdige Eigenschaft: Wann immer sich zwei Chamäleons verschiedener Farbe begegnen, nehmen beide die dritte Farbe an. Das heißt, wenn sich ein blaues und ein grünes Chamäleon begegnen, werden beide rot.



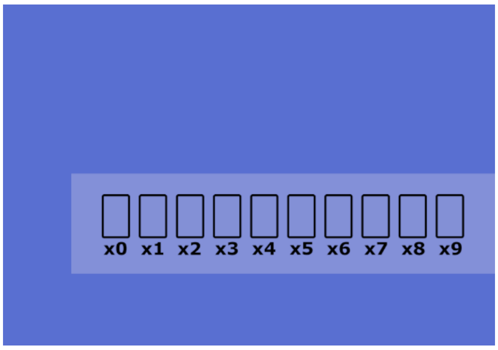
Frage: Kann es passieren, dass irgendwann alle Chamäleons die gleiche Farbe haben?

Zusatzfrage: Wie ist die Antwort, wenn zu Beginn 6 Chamäleons rot, 2 blau und eines grün ist?

14 Eine Zahl, die sich selbst beschreibt

Zugeschickt von Inesh Shaimerden

Die Originalaufgabe lautet: Gesucht ist eine 10-stellige Zahl, Die erste Ziffer ist die Anzahl der Nullen, die in dieser Zahl vorkommen, die zweite Ziffer die Anzahl der Einsen, die dritte die Anzahl der Zweien usw. Schließlich gibt die letzte Ziffer die Anzahl der Neunen an.

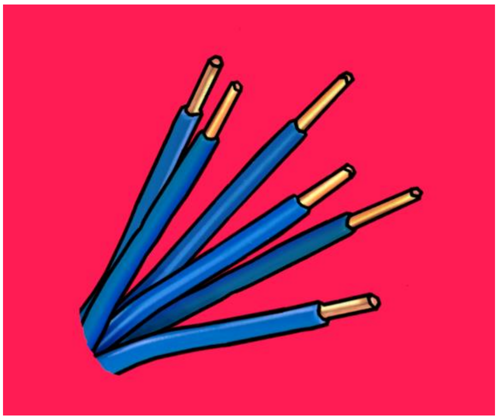


Wie lautet die Zahl?

Bemerkung: Es gibt auch Variationen der Aufgabe, die ein klein bisschen einfacher sind: Gesucht ist eine 7-stellige, eine 8-stellige und eine 9-stellige Zahl mit den entsprechenden Eigenschaften.

15 Wo ist welches Kabel?

Azubi Lena hat durch einen Kabelkanal, der vom Keller in das 2. Obergeschoss führt, sechs Kabel gezogen. In der Aufregung hat sie sich nicht gemerkt, welche Kabelenden im Keller zu welchen Enden der Kabel im Obergeschoss passen. Das muss sie also jetzt rauskriegen.



Lena hat eine Methode, wie sie das Problem lösen kann: Sie kann im Keller zwei Kabelenden verbinden; sie kann auch zwei oder drei Paare von Kabelenden verbinden. Dann geht sie nach oben und kann dort testen, ob zwei Kabelenden unten verbunden sind, zum Beispiel indem sie versucht, einen Stromkreis zu schließen.

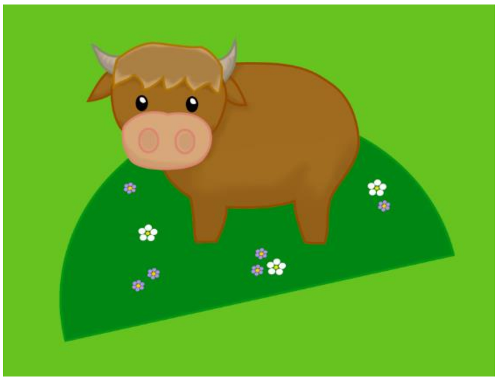
Wir bezeichnen die Kabelenden im Keller mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 und die Kabelenden oben mit A, B, C, D, E, F.

Wenn Lena im Keller die Enden 1 und 2 verbunden hätte und sie oben einen Stromkreis hinbekommen würde, indem sie A und C verwendet, dann wüsste sie, dass 1 zu A und 2 zu B oder 1 zu B und 2 zu A gehört.

Wie kann sie das Problem lösen? Dabei möchte Lena möglichst selten in den Keller gehen.

16 Kühe im Halbkreis

Ihr Großvater hat Ihnen ein Grundstück vererbt, das eine ganz spezielle Form hat, nämlich die eines Halbkreises. Außerdem besteht das Erbe aus einer Kuh, die diese Wiese abgrasen soll. Aber die Bedingung aus Großvaters Testament ist, dass Sie eine Methode finden, wie die Kuh genau das halbkreisförmige Grundstück abgrast, nicht mehr aber auch nicht weniger.



Dazu hat Ihnen der Großvater noch ein paar geheimnisvolle Gegenstände vererbt: drei hölzerne Pfosten, eine Rolle Seil, einen Ring und eine Schere.

Wie können Sie die Kuh so anseilen, dass sie genau die halbkreisförmige Wiese abgrasen kann?

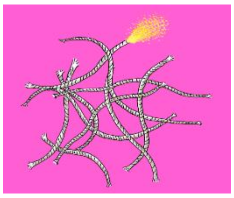
Anmerkung: Es geht nur darum, die Kuh anzubinden. Das Seil eignet sich nicht dazu, einen „Zaun“ für die Kuh zu bauen.

LÖSUNGEN

1 Die Schokoladentafel

Es ist vollkommen egal, wie Sie das Zerbrechen organisieren: Sie brauchen in jedem Fall genau 23 Schritte. Warum? In jedem Schritt machen Sie aus einem Teil zwei Teile, also wird die Anzahl der Teile um Eins größer. Da Sie mit einem Teil starten und 24 Teile erreichen wollen, brauchen Sie genau 23 Schritte.

2 Die Zündschnüre



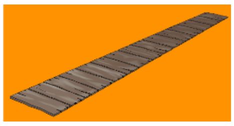
Lösung für die 30 Sekunden-Aufgabe:

Wenn man eine Zündschnur an beiden Enden gleichzeitig anzündet, brennt sie genau 30 Sekunden. (Wobei nicht gesagt ist, dass sich die beiden brennenden Stellen in der Mitte der Schnur treffen!)

Lösung für die 45 Sekunden-Aufgabe:

Dafür brauchen Sie zwei Zündschnüre. Sie zünden gleichzeitig die beiden Enden der ersten und ein Ende der zweiten Zündschnur an. In dem Moment, in dem die brennenden Stellen der ersten Schnur zusammenkommen (also nach 30 Sekunden), zünden Sie das zweite Ende der ersten Schnur an.

3 Über die Brücke



Familie Mathefix braucht 12 Minuten.

Wenn das nicht Ihr Ergebnis war, können Sie noch einmal nachdenken, bevor Sie weiterlesen.

Der Trick: Die Eltern, die am längsten brauchen, gehen gemeinsam und sie gehen nicht mehr zurück.

4 Der perfekte Tee

Man beginnt damit, dass man beide Sanduhren umdreht. Wann immer eine Sanduhr abgelaufen ist, dreht man sie sofort wieder um, so dass sie ohne Verzögerung wieder von vorne anfängt. Die einzigen Zeitpunkte, die man erfassen kann, sind die Momente, in denen eine Sanduhr umgedreht wird. Mit der ersten Sanduhr misst man als die Zeitpunkte 0 Minuten, 3 Minuten, 6 Minuten, 9 Minuten usw. und mit der zweiten 0 Minuten, 4 Minuten, 8 Minuten usw.

Die Frage ist, ob zwischen irgendwelche dieser Zeitpunkte genau 5 Minuten liegen. Das ist klar: zwischen 3 und 8. Das heißt: man gießt den Tee genau dann auf, wenn die 3-Minuten

Uhr zum ersten Mal umgedreht wird und holt den Beutel raus, wenn die 4-Minuten Sanduhr zu zweiten Mal umgedreht würde.

Mathematisch steckt die Gleichung $1 \cdot 3 + 5 = 2 \cdot 8$ beziehungsweise $5 = 2 \cdot 8 - 1 \cdot 3$ dahinter.

Frage: Wie würden Sie in der Sanduhrsprache die Gleichung $1 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4$ interpretieren?

Hinweis zum Forschungsprojekt:

Es kommt auf den größten gemeinsamen Teiler der beiden Zeiten an!

Nehmen Sie zunächst einmal an, dass die Zeiten der beiden Sanduhren den größten gemeinsamen Teiler 3 haben. Das könnten Sanduhren sein, die 6 Minuten und 9 Minuten laufen. Hat man eine Chance, mit diesen Sanduhren 5 Minuten abzumessen? Es hängt davon ab, ob die beiden Zeiten als größten gemeinsamen Teiler die Zahl 1 haben oder ob dies eine größere Zahl ist.

5 Der zerstreute Professor

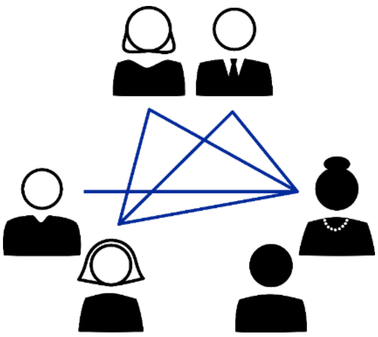
Der Professor hat mit zwei Personen angestoßen.

Die Erklärung ist trickreich: Da keiner mit seinem Ehepartner anstößt, stößt jeder mit höchstens 4 anderen Menschen an. Wenn die fünf anderen unterschiedliche Zahlen haben, dann müssen das die Zahlen 4, 3, 2, 1 und 0 sein.

Wenn die Frau des Professors mit 4 anderen angestoßen hätte, müssten das die Gäste sein. Dann hätte aber keiner von diesen mit 0 anderen Personen angestoßen, was der Aussage der Frau widerspricht.

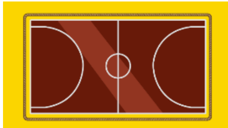
Also muss ein Gast, sagen wir die Frau aus dem ersten Ehepaar, mit 4 anderen angestoßen haben. Das sind der Professor und seine Frau und das zweite Ehepaar. Also ist der Mann aus dem ersten Ehepaar die Person, die mit keinem anderen angestoßen hat.

Nun überlegen wir weiter: Wenn die Frau des Professors mit 3 anderen angestoßen hätte, müssten das die erste Frau und das zweite Ehepaar sein. Dann hätten aber Mann und Frau des zweiten Ehepaars jeweils mit mindestens zweien angestoßen, und keiner würde mit nur einem anstoßen. Also hat, zum Beispiel, die Frau des zweiten Ehepaars mit 3 angestoßen. Das sind die erste Dame, sowie der Professor und seine Frau. Damit hat die Frau des Professors mit mindestens zwei angestoßen, also hat der zweite Mann nur einmal angestoßen.



Es folgt, dass der Professor nur mit den beiden eingeladenen Damen angestoßen hat.

6 Seil um ein Spielfeld



Die Lösung lautet 12,5 cm.

Man kann sich das verlängerte Seil in verschieden Teile aufgeteilt vorstellen: Zwei Teile, die so, lang sind wie die Längsseiten des Spielfelds, zwei die so lang sind wie die beiden Schmalseiten des Spielfeldes. Übrig bleiben vier Teile an den Ecken. Diese vier Teile sind insgesamt 1 Meter lang, jedes einzelne also 25 cm. Damit ist der Abstand zum Spielfeld 12,5 cm.

Zusatzinfo: Zunächst stellen wir fest, dass das Ergebnis völlig unabhängig von der Größe des Spielfelds ist. Sicher ist manchen von Ihnen die Geschichte vom Seil um den Äquator eingefallen: Ein Seil wird am Äquator um die Erde gelegt. Dann wird dieses Seil um 1 Meter verlängert und so gehalten, dass es überall den gleichen Abstand von der Erdoberfläche hat. Wie groß ist dieser Abstand? Man kann ausrechnen, dass der Abstand genau ½ π Meter, also etwa 16 cm beträgt, übrigens auch unabhängig vom Radius der Erde. Ich kenne aber keine Erklärung für dieses Phänomen, die so anschaulich ist, wie die Erklärung des Seils um das Fußballfeld.

7 Münzwurf mit dem Teufel

Wenn die ersten drei Würfe KKK sind, habe ich gewonnen, in allen anderen Fällen der Teufel. Denn dann ist irgendwann Z gefallen und der Teufel muss nur warten, bis einmal eine Zahl gefolgt von zwei Mal Kopf erscheint. Das passiert bestimmt, bevor drei Mal Kopf kommt. Also gewinnt der Teufel in 7 von 8 Fällen, also mit einer Wahrscheinlichkeit von 7/8 = 87,5%.

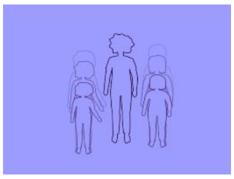
Zur Zusatzfrage:

Auf ZZK antwortet der Teufel mit KZZ und gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von 75%. Wenn die beiden ersten Würfe ZZ sind, gewinne ich, denn ich muss nur warten, bis irgendwann mal K kommt. In allen anderen Fällen gewinnt der Teufel. Genauer: Wenn irgendwann K fällt, bevor ich gewonnen habe, kann ich nicht mehr gewinnen. Denn entweder kommen zwei Z (und der Teufel hat gewonnen) oder es kommt ein K dazwischen – und dann wartet der Teufel wieder auf zwei Z.

Wenn ich ZKZ sage, sagt der Teufel ZZK und gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit 2/3, also etwa 66%.

Das bedeutet, der Teufel gewinnt nicht immer mit der gleichen Wahrscheinlichkeit, aber er gewinnt immer!

8 Das Alter der Töchter



Antwort:

Die Kinder sind 9, 2 und 2 Jahre alt.

Erklärung:

Wenn das Produkt der Lebensalter der drei Töchter 36 ist, dann gibt es dafür nur die Möglichkeiten in der Tabelle.

Eine dieser Möglichkeiten muss es sein. Die einzigen Kombinationen mit gleicher Summe, sind 1 6 6 und 2 2 9. Nur in diesem Fall bringt mir der Blick auf die Hausnummer noch nicht die endgültige Entscheidung. Aber die Aussage, dass es eine älteste Tochter gibt, scheidet die Kombination 1 6 6 aus, so dass nur 2 2 9 in Betracht kommt.

Alter der Töchter	Summe der Alter
1 1 36	38
1 2 18	21
1 3 12	16
1 4 9	14
1 6 6	13
2 2 9	13
2 3 6	11
3 3 4	10

9 Keltische Krieger

Antwort: 10

Wenn nur ein Krieger ausgewählt worden wäre, würde dieser am ersten Tag bei keinem anderen ein Zeichen sehen. Da es aber mindestens einen Krieger geben muss, wüsste er, dass er der Krieger ist.

Angenommen, es gäbe genau zwei Krieger A und B. Dann hätte A bei B ein Zeichen gesehen. Als er wieder in seiner Hütte ist, überlegt er: „Da sich B nicht als Krieger zu erkennen gegeben hat, weiß ich, dass auch B ein Zeichen gesehen haben muss. Also gibt es insgesamt zwei Krieger und der zweite muss ich sein, denn ich habe nur ein Zeichen gesehen.“ Am nächsten Morgen geben sich A und B als Krieger zu erkennen.

Hätte es drei Krieger gegeben, wüssten diese Bescheid, wenn sich die beiden Krieger, bei denen sie ein Zeichen sehen konnten, am zweiten Tag nicht zu erkennen geben. Sie outen sich am dritten Tag.

So geht es weiter, bis zum zehnten Tag.

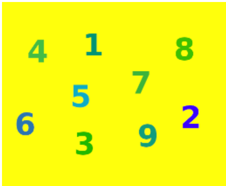
10 Möglichst wenig Gewichtssteine

Man braucht 6 Steine mit den Gewichten 1, 3, 9, 27, 81, 243 Gramm. Die Zahlen sind die Potenzen von drei: $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, $243 = 3^5$.

Wir stellen uns vor, dass auf der Balkenwaage links das Objekt steht, das gewogen werden soll. Üblicherweise legt man die Gewichtssteine auf die rechte Waagschale. Der Trick ist nun, Gewichtssteine auch auf die linke Seite zu geben. So kann man zum Beispiel 2 Gramm abwiegen: das 3 Gramm-Stück auf die rechte, das 1 Gramm-Stück auf die linke Seite. Wie wiegt man 7 Gramm ab: Das 9 Gramm-Stück und das 1 Gramm-Stück auf die rechte Seite, das 3 Gramm-Stück auf die linke Seite ($7 = 9 + 1 – 3$). Entsprechend gelten:

$100 = 81 + 27 + 1 – 9$, $128 = 243 + 3 – 81 – 27 – 9$, $200 = 243 + 27 + 9 + 3 – 81 – 1$.

11 Eine teilbare Zahl



Es gibt eine einzige Zahl mit den geforderten Eigenschaften und diese lautet 381654729.

Zunächst verschaffen wir uns eine grobe Orientierung. Da eine Zahl, die durch 5 teilbar ist, als Einerstelle eine 5 oder eine 0 haben muss, und da keine 0 vorkommt, muss an der fünften Stelle die 5 stehen. Ferner sind die Zahlen aus den ersten 2, 4, 6 oder 8 Ziffern durch 2 teilbar, also müssen deren Endziffern (an den Stellen 2, 4, 6, 8) gerade sein. Daher müssen an den Stellen 1, 3, 5, 7 die ungeraden Ziffern stehen. Daher sieht die gesuchte Zahl schematisch so aus:

Stelle	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ziffern	1	2	1	2	5	2	1	2	1
	3	4	3	4		4	3	4	3
	7	6	7	6		6	7	6	7
	9	8	9	8		8	9	8	9

Nun schauen wir uns die Zahlen aus den ersten vier bzw. den ersten acht Ziffern an. Diese Zahlen sind durch 4 teilbar. Das bedeutet, dass die Zahl aus ihren letzten beiden Ziffern durch 4 teilbar sein muss. Da die Zehnerziffern dieser Zahlen ungerade sind, sind das die Zahlen 12, 16, 32, 36, 52, 56 usw. in jedem Fall kommen für die 4. und 8. Stelle nur die Ziffern 2 und 6 in Frage. Somit stehen an den Positionen 2 und 6 die Ziffern 4 und 8.

Stelle	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ziffern	1	4	1	2	5	4	1	2	1
	3	8	3	6		8	3	6	3
	7		7				7		7
	9		9				9		9

Da die Zahlen aus den ersten 3 Ziffern und die Zahl aus den ersten 6 Ziffern durch 3 teilbar sind, muss auch die Zahl aus den Stellen 4, 5, 6 durch 3 teilbar sein. Dafür kommen nur die Kombinationen 258 und 654 in Frage.

Stelle	1	2	3	4, 5, 6	7	8	9
Ziffern	1	4	1	258	1	2	1
	3	8	3	654	3	6	3
	7		7		7		7
	9		9		9		9

Da die Zahl aus den ersten acht Stellen durch 8 teilbar ist, muss die Zahl aus ihren letzten drei Stellen, d.h. die Zahl aus den Stellen 6, 7, 8 durch 8 teilbar sein. Dafür gibt es nur folgende Möglichkeiten: 816, 832, 872, 896, 416, 432, 472, 496. Von diesen entfallen aber 832, 872 bzw. 416, 469, weil sonst die 2 bzw. die 6 doppelt vorkommen würde.

Stelle	1	2	3	4, 5, 6, 7, 8	9
Ziffern	1	4	1	25816	1
	3	8	3	25896	3
	7		7	65432	7
	9		9	65472	9

Nun muss auch die Zahl aus den Stellen 7, 8, 9 durch 3 teilbar sein. Dafür gibt es insgesamt nur fünf Möglichkeiten:

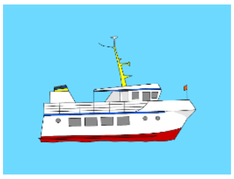
Stelle	1	2	3	4, 5, 6, 7, 8, 9
Ziffern	1	4	1	258963
	3	8	3	654321
	7		7	654327
	9		9	654723
				654729

Nun schauen wir noch auf die Zahl aus den Ziffern Nr. 1, 2, 3. Da diese durch 3 teilbar ist, gibt es die folgenden Möglichkeiten: 141, 147, 183, 189, 381, 387, 783, 789, 981, 989. Wenn man diese Kombinationen mit dem Rest der Zahl zusammensetzt und beachtet, dass keine Ziffer doppelt vorkommen darf, bleiben nur die folgenden zehn Möglichkeiten:

Stelle	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Ziffern	147258963
	183654729
	189654723
	189654729
	381654729
	741258963
	789654321
	981654327
	981654723
	987654321

Nur eine dieser Möglichkeiten, nämlich 381654729 hat die Eigenschaft, dass die Zahl aus den ersten sieben Ziffern durch 7 teilbar ist.

12 Wie alt ist der Kapitän?



Die Lösung ist zunächst so ähnlich wie bei Knobelaufgabe 8, nur am Schluss kommt noch ein neues Argument dazu.

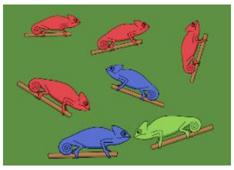
Man zerlegt 2450 auf alle möglichen Arten in drei Faktoren (dabei ist es nützlich zu wissen, dass $2450 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$ ist). Zusätzlich berechnet man die Summen der Faktoren (siehe unten).

Da der Smutje noch keine Lösung findet, wenn er die Summe kennt, kommen nur die beiden Möglichkeiten 50, 7, 7 und 49, 10, 5 mit der Summe 64 in Frage.

Wie alt ist der Kapitän? Wenn er 49 Jahre alt oder jünger wäre, dann könnte es nicht sein, dass die Passagiere alle jünger sind als der Kapitän. Wenn er 51 oder älter wäre, dann könnte der Smutje keine Entscheidung treffen, denn bei beiden Möglichkeiten wären alle jünger als der Kapitän. Also ist der Kapitän 50 Jahre alt, und die drei Passagiere sind 49, 10 und 5 Jahre alt.

Alter 1	Alter 2	Alter 3	Summe
2450	1	1	2452
1225	2	1	1228
490	5	1	496
350	7	1	358
245	10	1	256
245	5	2	252
175	14	1	190
175	7	7	189
98	25	1	124
98	5	5	108
70	35	1	106
70	7	5	82
50	49	1	100
50	7	7	64
49	25	2	76
49	10	5	64
35	35	2	72
35	14	5	54
35	10	7	52
25	14	7	46

13 Chamäleons



Wenn sich ein rotes und ein blaues Chamäleon begegnen, entstehen 2 grüne. Daher gibt es anschließend jeweils 3 rote und 3 grüne Chamäleons, sowie ein blaues. Aus den 3 roten und 3 grünen Chamäleons werden 6 blaue. Damit sind alle Chamäleons blau.

Zur Zusatzfrage:

Wir betrachten die Anzahlen N_r, N_b und N_g der roten, blauen und grünen Chamäleons. Genauer gesagt betrachten wir die Differenzen dieser Zahlen. Zum Beispiel beschreibt die Differenz $N_r - N_b$ um wie viel sich die Anzahlen der roten und blauen Chamäleons unterscheiden.

Die entscheidende Beobachtung ist, dass jede Differenz durch die Begegnung von zwei Chamäleons entweder gleichbleibt oder sich so ändert, dass sie um genau 3 größer oder um 3 kleiner wird.

Dazu nehmen wir beispielsweise an, dass sich ein rotes und ein blaues Chamäleon begegnen. Bei dem Umfärbeprozess wird die Anzahl der roten und blauen Chamäleons um 1 erniedrigt und die der grünen um 2 erhöht: $N_r^* = N_r - 1$, $N_b^* = N_b - 1$, $N_g^* = N_g + 2$. Für die Differenzen gilt somit

$N_r^* - N_b^* = (N_r - 1) - (N_b - 1) = N_r - N_b$.

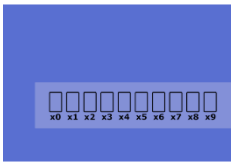
$N_r^* - N_g^* = (N_r - 1) - (N_g + 1) = N_r - N_g + 3$.

$N_b^* - N_g^* = (N_b - 1) - (N_g + 1) = N_b - N_g + 3$.

Diese technisch anmutende Aussage hat weitreichende Konsequenzen: Wenn eine Differenz zu Beginn kein Vielfaches von 3 ist, dann kann sie nie Null werden. Insbesondere können die beide Anzahlen nicht Null werden. Das heißt: Wenn keine der Differenzen ein Vielfaches von 3 ist, werden nie alle Chamäleons die gleiche Farbe haben.

Wenn die Anzahlen der Chamäleons 6, 2 und 1 wären, wären die Differenzen 4, 5 und 1; also würden nie alle die gleiche Farbe haben.

14 Eine Zahl, die sich selbst beschreibt



Antwort:

6210001000 bzw. 521001000 bzw. 42101000 bzw. 3211000

Wir behandeln das Problem einer 7-stelligen Zahl. Klar: Die Summe der Ziffern sagt, wie viele Ziffern insgesamt vorkommen, also ist die Summe der Ziffern 7.

Wir bestimmen nun Stelle für Stelle der Zahl. Dies scheint langwierig zu sein; machen Sie sich aber klar, dass sich bei jedem Schritt die Anzahl der Möglichkeiten um den Faktor 10 reduziert!

- Wir überlegen uns zunächst, dass die letzten drei Stellen Null sein müssen: Angenommen, die letzte Ziffer wäre nicht Null. Da diese Ziffer die Anzahl der Sechsen angibt, müsste irgendwo die Ziffer 6 stehen. Wenn diese 6 an der ersten Stelle stünde, gäbe es 6 Nullen, insgesamt also mindestens 8 Stellen: Widerspruch. Also steht die 6, wenn überhaupt, an einer anderen Stelle. Dann müsste eine von Null verschiedene Ziffer sechsmal vorkommen. Also wäre die Summe der Ziffern mindestens $6 + 6*1 = 12$ – auch ein Widerspruch.

- Angenommen, die vorletzte Ziffer wäre verschieden von Null. Dann müsste irgendwo eine 5 stehen. Dies muss an der ersten Stelle stehen (sonst wäre die Summe der Ziffern größer als 7). Dann wären alle Ziffern außer der der ersten und vorletzten gleich Null. Weil die Summe der Ziffern 7 ist, muss die Ziffer an der vorletzten Stelle 2 sein. Das geht aber nicht, weil keine 2 Ziffern gleich 5 sein können.

- Angenommen, die drittletzte Ziffer wäre größer als Null. Diese müsste 1 sein (weil es keine zwei Vieren geben kann). Die 4 muss an der ersten Stelle stehen (sonst gäbe es mindestens vier Eisen, was der Summe der Ziffern widerspricht). Da schon mindestens eine 1 vorkommt, muss an der zweiten Stelle eine von Null verschiedene Ziffer stehen. Alle anderen Stellen sind dann Null. Also müsste an der zweiten Stelle eine 2 stehen – es gibt aber nur eine Eins!

- Insbesondere hat die gesuchte Zahl mindestens drei Nullen; daher ist die erste Ziffer mindestens 3.

- Angenommen, die viertletzte Ziffer (die auch die Anzahl der Vieren angibt) wäre Null. Dann gäbe es mindestens vier Nullen, also müsste an der ersten Stelle eine Ziffer ≥ 4 stehen. An den Stellen, an denen die Anzahlen der Vieren, Fünfen, Sechsen angezeigt werden, steht aber jeweils eine Null: Widerspruch!
  Also steht an der viertletzten Stelle eine Ziffer > 0. Diese kann aber nur 1 sein, denn sonst gäbe es mindestens zwei Vieren.

- Daher ist genau eine der ersten Stellen eine 3. Das kann nicht die dritte Stelle sein (es gibt keinen Platz für drei Zweien). Die 3 kann aber auch nicht an der zweiten Stelle stehen, denn weil die erste Ziffer mindestens 3 ist, gibt es auch nur Platz für höchstens zwei Einsen. Also ist die erste Ziffer eine 3.

- Daher gibt es genau drei Nullen. Weiterhin stehen an den Stellen 2 und 3 von Null verschiedene Ziffern. Wegen der Ziffernsumme müssen das die Ziffern 2 und 1 sein. Die 1 kann nicht an der zweiten Stelle stehen (weil es zwei Einsen gibt).

Somit lautet die gesamte Zahl 3211000.

Nach dem gleichen Schema kann man die Aufgabe für jede Zahl von Ziffern lösen.

15 Wo ist welches Kabel?

Lena geht in den Keller und verbindet 1 mit 2 und 3 mit 4.

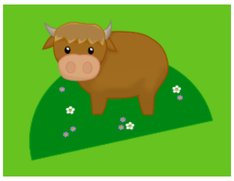
Dann testet sie oben und findet heraus, dass A mit B und C mit D Verbindungen geben. Das bedeutet:

Entweder gehören die Enden 1 und 2 zu A und B und 3 und 4 zu C und D
oder die Enden 1 und 2 gehören zu C und D und 3 und 4 zu A und B.
Außerdem weiß sie sicher, dass 5 und 6 zu E und F gehören müssen.

Damit hat Lena das Problem schon enorm reduziert, aber noch nicht gelöst. Sie muss noch einmal in den Keller. Dort löst sie die Verbindungen von vorher und verbindet jetzt 2 mit 3 und 4 mit 5.

Wieder oben findet sie heraus, dass B und C, sowie D und E zusammengehören. Damit weiß sie, dass auf jeden Fall 1 zu A und 6 zu F gehört. Damit muss B zu 2 und E zu 5 gehören. Und daher sind auch 3 und C sowie 4 und D jeweils Enden des gleichen Kabels.

16 Kühe im Halbkreis

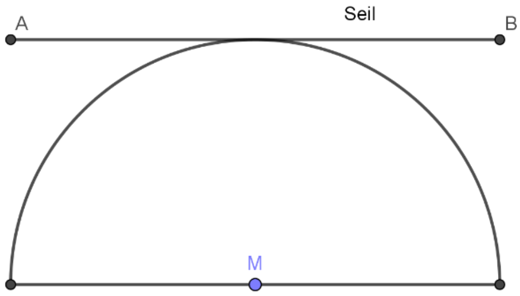


Wir zerlegen das Problem in zwei Teilprobleme.

Wenn Ihr Großvater Ihnen ein kreisrundes Grundstück vererbt hätte, hätten Sie Ihre Aufgabe gelöst, ohne groß nachdenken zu müssen: Ein Pflock wird im Mittelpunkt des Kreises eingeschlagen und die Kuh wird durch ein Seil mit dem Pflock verbunden, das genau so lang wie der Radius des Kreises ist.

Wie können Sie erreichen, dass Ihre Kuh entlang einer geraden Linie und zwar nur auf einer Seite der Linie grast? Das ist ein bisschen trickreicher: Sie schlagen zwei Pflöcke ein, deren Verbindungsstrecke parallel zu der geraden Linie ist. Dann befestigen Sie ein Seilende an einem der Pfosten, fädeln den Ring auf das Seil und befestigen es dann am anderen Pfosten, so dass das Seil straff gespannt ist. Schließlich nehmen Sie ein weiteres Seil, das genau so lang ist wie der Abstand der Strecke zwischen den Pfosten zur Grenzlinie und befestigen ein Ende des Seils am Ring, und das andere an der Kuh. Dann kann die Kuh innerhalb des Rechtecks, das von den zwei Pfosten und der Grenzlinie gebildet wird, nur genau dieses Rechteck abfressen.

Zur Lösung Ihrer Aufgabe kombinieren wir die beiden Ansätze: Sie schlagen drei Pflöcke in den Punkten A, B und M ein (siehe Zeichnung auf der nächsten Seite).



Dann verbinden Sie A und B mit einem straff gespannten Seil, das den Ring enthält. Schließlich leinen Sie die Kuh wie beschrieben mit zwei Seilen sowohl am Mittelpunkt M als auch am Ring an.