Anwendungsaufgaben zur Exponentialfunktion

Wir gehen hier von der Form $f(x) = b \cdot a^x$ für die Exponentialfunktion aus. In der Oberstufe wird hierfür oft die Darstellung $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$ mit der Euler'schen Zahl e verwendet. Die Funktionen sind identisch mit $k = \ln(a)$ bzw. $a = e^k$.

Aufgaben:

1) Am Anfang gab es 1000 Bakterien in einer Probe. Nach 3 Stunden waren es 3375 Bakterien.
a) Wie lautet die Gleichung der Exponentialfunktion für die Zuordnung: Zeit in Stunden → Anzahl Bakterien?
b) Wie viele Bakterien sind es nach diesem Modell in 10 Stunden?

2) Luna hat 2000€ auf einem Konto angelegt. Die Bank zahlt 1,5% Zinsen.
a) Wie lautet die Gleichung der Exponentialfunktion (Zeit in Jahren → Kontostand), wenn auch für die Zinsen in den folgenden Jahren Zinsen gezahlt werden (Zinseszins)?
b) Wie hoch ist ihr Kontostand nach 4 Jahren?
c) Wann beträgt der Kontostand 2252,99€?

3) Der Akku eines Smartphones verliert im Betrieb pro Tag 20% an Ladung bzw. Energie. Wie viel Ladung hat er nach 10 Tagen verloren?

4) 10 Schülerinnen/Schüler kennen ein Gerücht. Die Anzahl der Schülerinnen/Schüler, die das Gerücht kennen, verdreifacht sich pro Tag. Wann kennt es die ganze Schule mit 810 Schülerinnen und Schülern?

5) In 2020 kauften eine Millionen Personen das Smartphone X. Im Jahr 2024 kauften es 2,0736 Millionen. Wie viele werden es im Jahr 2030 kaufen (bei exponentiell wachsenden Verkaufszahlen, wie oben vorausgesetzt)?

6) Tamara hat ein neues Auto gekauft. Nach 2 Jahren ist dieses noch 28900€ wert und nach 5 Jahren noch 17748,21€.
   a) Wie viel hat dieses beim Kauf gekostet?
   b) Wie viel ist es in 10 Jahren noch wert?

Lösungen

1) a)

$f(x) = b \cdot a^x$
$f(0) = b \cdot a^0 = 1000$
$\Rightarrow b = 1000 \qquad (\text{da } a^0 = 1)$

$f(3) = 3375$ ergibt: $b \cdot a^3 = 3375 \qquad (1)$

Wir setzen a = 1000 in (1) ein: $1000 \cdot a^3 = 3375 \quad |:1000$

$a^3 = 3{,}375 \quad |\sqrt[3]{\ }$

$a = 1{,}5$

Also: $f(x) = 1000 \cdot 1{,}5^x$

a) $f(10) = 1000 \cdot 1{,}5^{10} \approx 57665$

Also sind es nach 10 Stunden ca. 57665 Bakterien.

2) a) Hier ist b = 2000 (Anfangswert) und a = 1,015 = 1+ Zinssatz/100, denn nach einem Jahr hätte sie

$$2000 + 2000 \cdot \frac{1{,}5}{100} = 2000 \cdot \left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right) = 2000 \cdot 1{,}015 = 2030€\,.$$

Also: $f(x) = 2000 \cdot 1{,}015^x$

b) $f(4) = 2000 \cdot 1{,}015^4 \approx 2122{,}73€$

c) x wird bestimmt, so dass $f(x) = 2252{,}99$ gilt:

$2000 \cdot 1{,}015^x = 2252{,}99 \quad |:2000$

$1{,}015^x = 1{,}126495\ldots.\ (\text{Ergebnis im Taschenrechner belassen.})$

$1{,}015^x = 1{,}126495\ldots \quad |\log_{1{,}015}(\,)$

$x = \log_{1{,}015}(1{,}126495\ldots) \approx 8, \text{also ca. } 8 \text{ Jahre.}$

3) b = 100 (Wir setzen b auf 100 für 100%, wir hätten auch b = 1 setzen können.)

$$a = 1 - \frac{\text{prozenutaler Verlust}}{100} = 1 - \frac{20}{100} = 0{,}8$$

$f(x) = 100 \cdot 0{,}8^x$

Nach 10 Tagen: $f(10) \approx 10{,}74$

Damit sind nach 10 Tagen noch ca. 10,74% Restladung vorhanden:

Verlust ≈ 100% - 10,74% = 89,26%

4) Anfangswert: $b = 10$

Wachstumsfaktor bei Verdreifachung pro Zeiteinheit (Tag): $a = 3$

$f(x) = 10 \cdot 3^x$

$10 \cdot 3^x = 810 \quad | : 10$

$3^x = 81 \quad | \log_3()$ $\qquad x = \log_3(81) = 4$

5) Wir wählen 2010 als Jahr 0 (also x = 0), damit ist 2014 das Jahr 4. b = 1 (Mio.)

$f(x) = 1 \cdot a^x = a^x$

$f(4) = a^4 = 2{,}0736 \quad |\sqrt[4]{}$

$a = 1{,}2$ (a muss größer 0 sein.)

$f(x) = 1{,}2^x$

Das Jahr 2020 ist das Jahr 10.

$f(10) = 1{,}2^{10} \approx 6{,}19 \text{ (Mio.)}$

6) $f(x) = b \cdot a^x$

$f(2) = b \cdot a^2 = 28900$ (1)
$f(5) = b \cdot a^5 = 17748{,}21$ (2)

Wir lösen (1) nach b auf:

$b \cdot a^2 = 28900 \quad | \; : a^2$

$b = 28900/a^2$ (3)

Dies setzen wir in (2) ein: $\frac{28900}{a^2} \cdot a^5 = 17748{,}21$

$28900 \cdot a^3 = 17748{,}21$ $\qquad (a^n/a^m = a^{n-m})$

$a^3 = 17748{,}21/28900 \quad | \sqrt[3]{}$

$a \approx 0{,}85$ Setzt man dies in (3) ein, ergibt sich: $b \approx 28900/0{,}85^2 = 40000$

Damit ist $f(x) = 40000 \cdot 0{,}85^x$ und der Anfangspreis beträgt 40000€ (Antwort zu a)).

Bemerkung: $a^3 = 17748{,}21/28900$ hätte sich auch bei der Division der Gleichung (2) durch (1) ergeben: $\frac{b \cdot a^5}{b \cdot a^2} = \frac{17748{,}21}{28900} \Leftrightarrow a^3 = \frac{17748{,}21}{28900}$ denn $\frac{b \cdot a^5}{b \cdot a^2} = a^3$.

$f(10) = 40000 \cdot 0{,}85^{10} \approx 7874{,}98$, womit das Auto nach 10 Jahren noch ca. 7874,98€ wert ist.