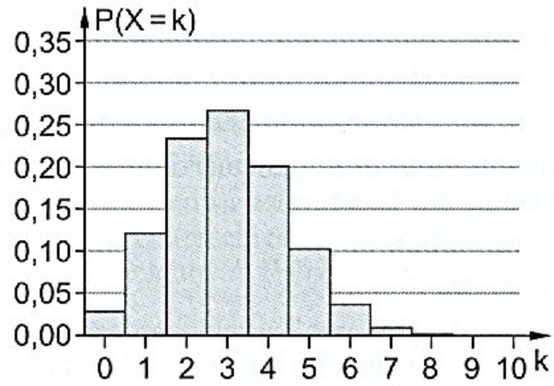
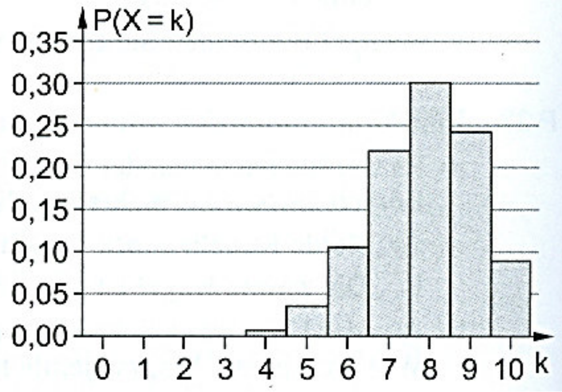
Aufgabe 1

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}3$.

a) Welches der beiden Histogramme zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ? Begründen Sie Ihre Entscheidung. Wie verändert sich das Histogramm, wenn p zunimmt?

b) Bestimme anhand der korrekten Abbildung näherungsweise die Wahrscheinlichkeiten $P(3 < X < 6)$ und $P(X \neq 4)$.





Aufgabe 2

Ein Medikament heilt eine Krankheit mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}6$.
Im Rahmen einer Erprobung des Medikaments an Patienten, die an dieser Krankheit leiden, findet sich die folgende Rechnung:

$P(X \geq 1) > 0{,}98$

$1 - (0{,}4)^n > 0{,}98$

$n > 4$

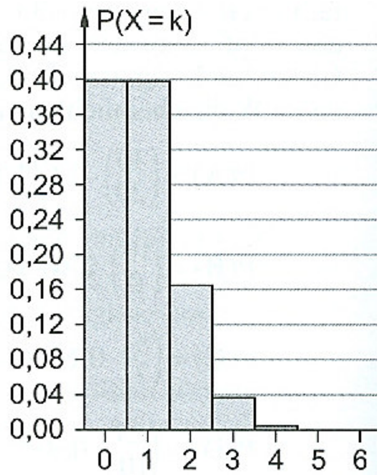
Erläutere diese Rechnung.

Aufgabe 3

Der Graph rechts zeigt die Verteilung einer $B_{n;p}$-verteilten Zufallsvariable X mit $n = 6$ und $0 < p < 1$.
Es gilt $P(X = 0) = P(X = 1)$.

a) Bestimme näherungsweise $P(X \geq 2)$.

b) Zeige mithilfe der Formel von Bernoulli, dass für die Trefferwahrscheinlichkeit gilt:
$p = \frac{1}{7}$.
(Hinweis: $\binom{6}{0} = 1$; $\binom{6}{1} = 6$)

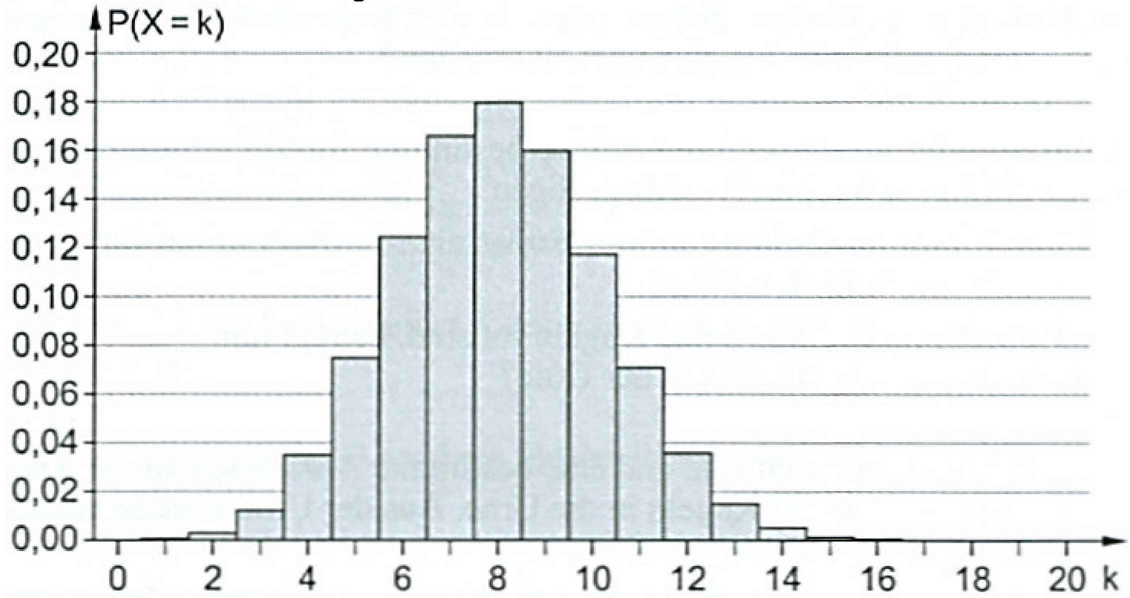


Aufgabe 4

Gummibärchen werden in den Farben Rot und Gelb produziert und in Packungen zu 20 Stück ausgeliefert.
Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der gelben Gummibärchen in einer Packung. Ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung ist durch das Histogramm unten gegeben. Der Erwartungswert von X ist eine ganze Zahl.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind 8 oder 9 gelbe Gummibärchen in einer Packung?

b) Bestimme den Parameter p der Binomialverteilung mithilfe des Histogramms. Von welchem Mischungsverhältnis kann man bei den Farben der Gummibärchen ausgehen?



Aufgabe 5

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Familie mit fünf Kindern

a) genau drei Mädchen,

b) mindestens zwei Mädchen,

c) höchstens drei Jungen,

d) vier Mädchen und ein Junge sind?

Aufgabe 6

Ist der Zufallsversuch eine Bernoulli-Kette? Wenn ja, gib die Länge und die Trefferwahrscheinlichkeit an.

a) Ein Würfel wird fünfzigmal geworfen. Es wird gezählt, wie oft eine gerade Augenzahl fällt.

b) Ein Fußballspieler hat beim Elfmeterschießen eine Trefferquote von $70\,\%$. Er schießt zehn Elfmeter und dabei wird gezählt, wie oft er trifft.

c) Ein Mathematik-Kurs besteht aus 11 Schülerinnen und 9 Schülern. Es werden 8 Personen ausgewählt und ihr Geschlecht notiert.

d) In Deutschland verfügen ca. $80\,\%$ der Haushalte über einen Internetzugang. Es werden 1000 Haushalte ausgewählt und befragt, ob sie einen Internetzugang haben.

Aufgabe 7

Ein Glücksrad besteht aus 4 gleich großen Feldern, die mit den Buchstaben A, B, C und D beschriftet sind. Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Es wird gezählt, wie oft das Feld "A" kommt. Stelle die Bernoulliformel auf und berechne:

a) $P(X = 4)$ b) $P(X = 0)$ c) $P(X \leq 2)$

Lösung A1

Lösungslogik

Der Erwartungswert bei einer Binomialverteilung ist $\mu = n \cdot p$.

Klausuraufschrieb

a) Schaubild 1 ist das Histogramm der angegebenen Wahrscheinlichkeits-verteilung. Das Maximum ist bei Binomialverteilungen im Erwartungswert mit $\mu = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}3 = 3$. Dies ist in Schaubild 2 nicht der Fall.
Nimmt p zu, so verschiebt sich das Maximum wegen $\mu = n \cdot p$ nach rechts.

b) $P(3 < X < 3) = P(4) + P(5) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$
$P(X \neq 4) = 1 - P(X = 4) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

Lösung A2

Lösungslogik

Es handelt sich um eine $B_{0,6;n}$-Verteilung.

Klausuraufschrieb

$P(X \geq 1) > 0{,}98$

X gibt die Anzahl der durch das Medikament geheilten Patienten an, in dieser Aufgabe ist die Wahrscheinlichkeit für die Heilung mindestens eines Patienten größer als $98\,\%$.

$1 - (0{,}4)^n > 0{,}98$

Der Term $(0{,}4)^n$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass von n Patienten keiner geheilt wird, d.h. $P(X = 0)$.
Somit ist $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}4^n$ die Wahrscheinlichkeit, dass von n behandelten Personen mindestens einer geheilt wird.

$n > 4$

Aus dieser Zeile der Rechnung ergibt sich, dass mindestens 5 Personen mit dem Medikament behandelt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von $98\,\%$ mindestens ein Patient geheilt wird.

Lösung A3

Lösungslogik

a) Es gilt $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$.

b) Wenn $P(X = 0) = P(X = 1) = 0{,}4$ kann $P(X = 0)$ mit $P(X = 1)$ gleichgesetzt werden.

Klausuraufschrieb

a) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

b) $P(X = 0) = \binom{6}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^6 = (1-p)^6$

$P(X = 1) = \binom{6}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^5 = \frac{6}{7} \cdot (1-p)^5$

Wegen $P(X = 0) = P(X = 1)$ gilt:

$(1-p)^6 = \frac{6}{7} \cdot (1-p)^5$

$1 - p = \frac{6}{7} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{7}$

Lösung A4

Lösungslogik

Es handelt sich um eine $B_{p;20}$-Verteilung. Wegen der Aufgabenstellung „Der Erwartungswert von X ist eine ganze Zahl" lässt sich $\mu = 8$ aus der Grafik ablesen und über $\mu = n \cdot p$ ist p ermittelbar.

Klausuraufschrieb

a) $P(8 \leq X \leq 9) = P(X = 8) + P(X = 9) = 0{,}18 + 0{,}16 = 0{,}34 = 34\,\%$

b) $\mu = 8;\ \ n = 20$ | Aufgabenstellung

$\mu = n \cdot p$

$p = \frac{\mu}{n} = \frac{8}{20} = 0{,}4$

Es handelt sich um eine $B_{0,4;20}$-Verteilung.

Man kann von einem Mischungsverhältnis $4{:}6$ bzw. $2{:}3$ von gelben zu roten Gummibärchen ausgehen.

Lösung A5

Lösungslogik

Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette mit $n = 5$ Elementen und $p = 0{,}5$ (Junge oder Mädchen).

Klausuraufschrieb

a) Genau drei Mädchen entspricht $k = 3$.

$B_{5;0,5}(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^2 = 0{,}3125$

b) Mindestens zwei Mädchen entspricht $k \geq 2$. Dies ist das Gegenereignis zu höchstens ein Mädchen mit $k \leq 1$.

$B_{5;0,5}(X \geq 2) = 1 - B_{5;0,5}(X \leq 1) = 1 - \left(\binom{5}{0} \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^4\right) = 0{,}1875$

c) Höchstens drei Jungen sind null, einer, zwei oder drei Jungen, also

$B_{5;0,5}(X \leq 3) = \binom{5}{0} \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^4 + \binom{5}{2} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^3 + \binom{5}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^25$
$= 0{,}812$

d) Vier Mädchen und ein Jungen ist $X = 4 \ \vee \ X = 1$.

$B_{5;0,5}(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^1 = 0{,}15625$

$B_{5;0,5}(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^4 = 0{,}15625$

Lösung A6

Klausuraufschrieb

a) ja, es ist eine Bernoulli-Kette mit $n = 50$ und $p = 0{,}5$.

b) ja, es ist eine Bernoulli-Kette (sofern die Trefferquote gleich bleibt) mit $n = 10$ und $p = 0{,}7$.

c) nein, es ist keine Bernoulli-Kette, da es sich um eine Ziehung ohne Zurücklegen handelt und sich die Trefferwahrscheinlichkeit pro Ziehung ändert

d) ja, es ist eine Bernoulli-Kette mit $n = 1000$ und $p = 0{,}8$.

(es handelt sich zwar wie in c) um eine Ziehung ohne Zurücklegen, aber aufgrund der großen Grundgesamtheit spielt dies hier keine Rolle)

Lösung A16

Klausuraufschrieb

$B_{10;0,25}$-verteilt

a) $B_{10;0,25}(X=4)=\binom{10}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^6=0{,}1459$

b) $B_{10;0,25}(X=0)=\binom{10}{0}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}=0{,}0563$

c) $B_{10;0,25}(X\le 2)=\binom{10}{0}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}+\binom{10}{1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9+\binom{10}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^8=0{,}5256$